

Комплексные числа



ОБЯЗАТЕЛЬНЫЙ МИНИМУМ СОДЕРЖАНИЯ ОСНОВНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ



ЧИСЛОВЫЕ И БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Комплексные числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

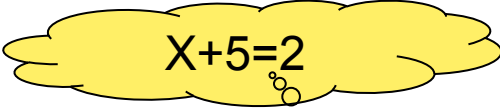
Действительная и мнимая часть, модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел. Арифметические действия над комплексными числами в разных формах записи. Комплексно сопряженные числа.

Возведение в натуральную степень (формула Муавра). Основная теорема алгебры.



Понятие комплексного числа

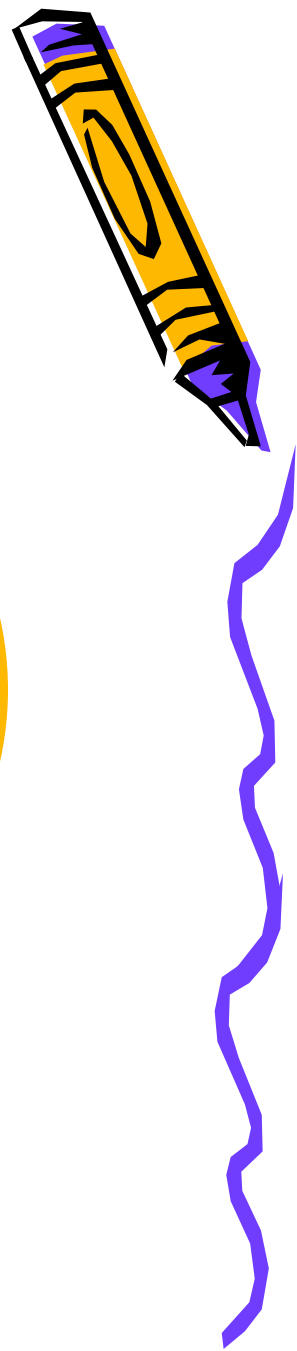
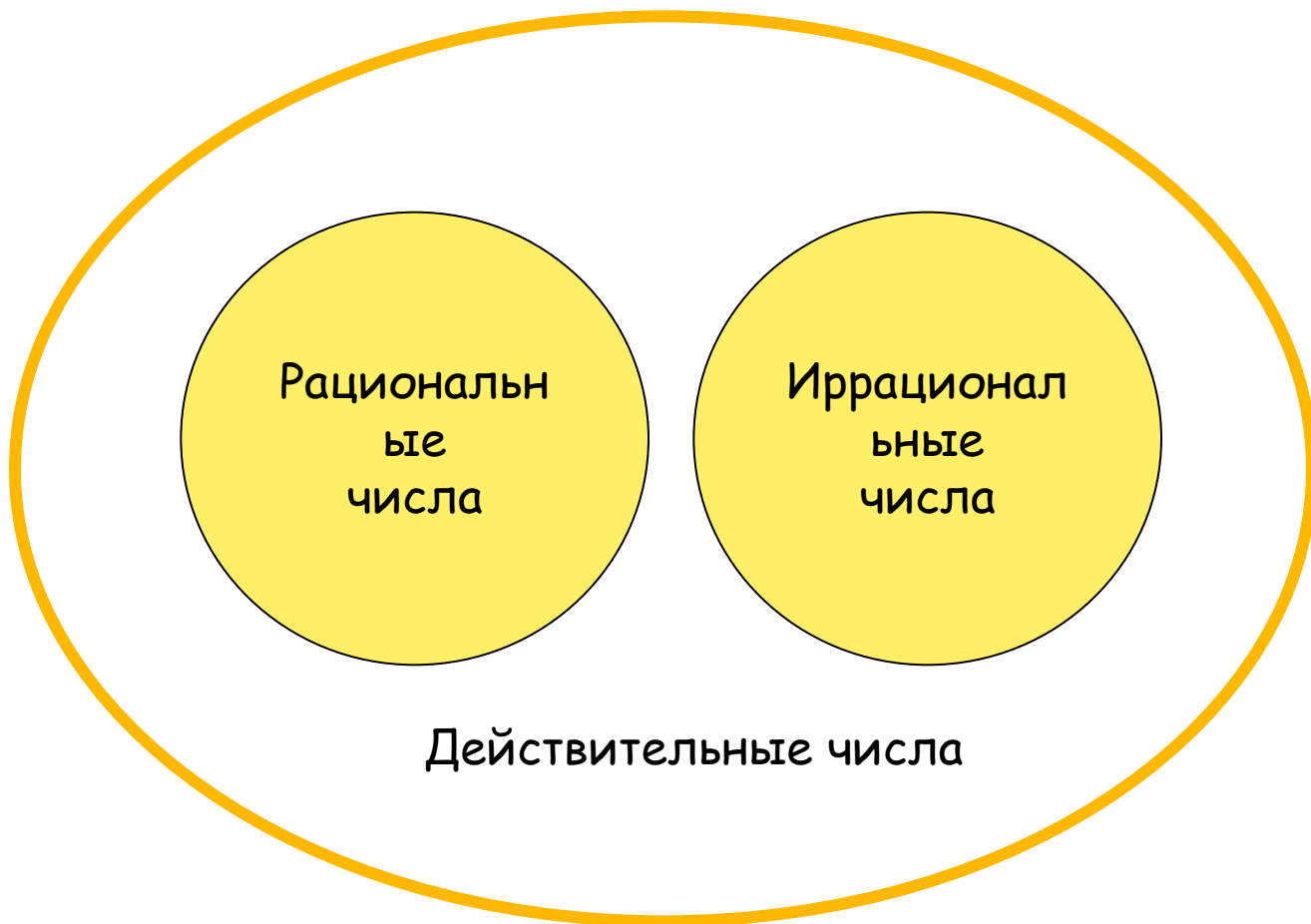
$X+A=B$ - недостаточно положительных
чисел


$$X+5=2$$

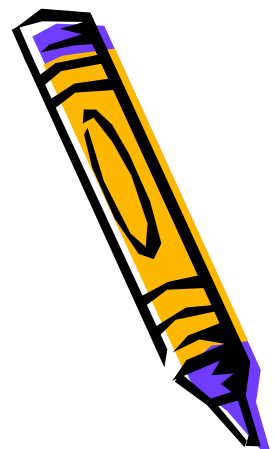
$A \cdot X + B=0$ ($A \neq 0$) – разрешимы на
множестве рац. чисел

$X^2=2$ или $X^3=5$ - корни - иррациональные
числа



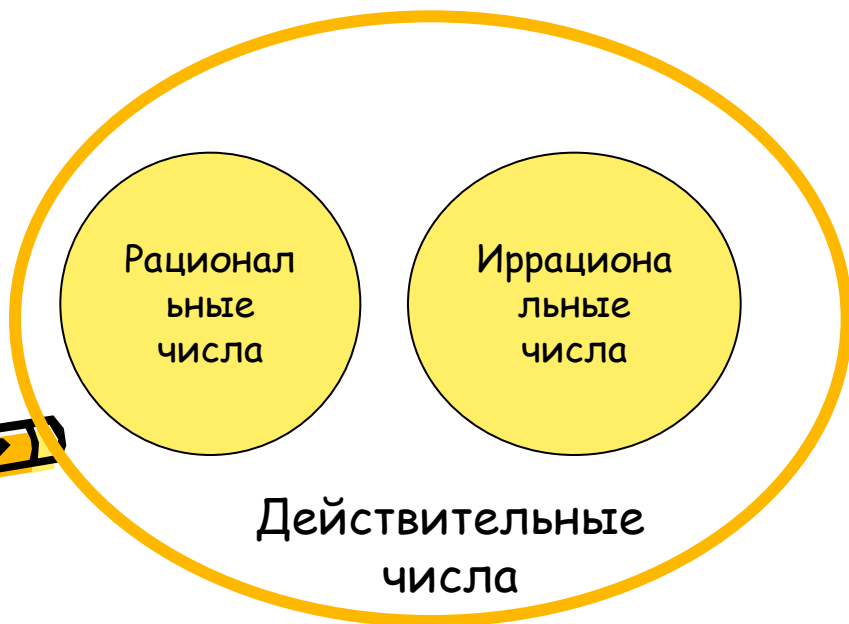


Решение квадратных уравнений



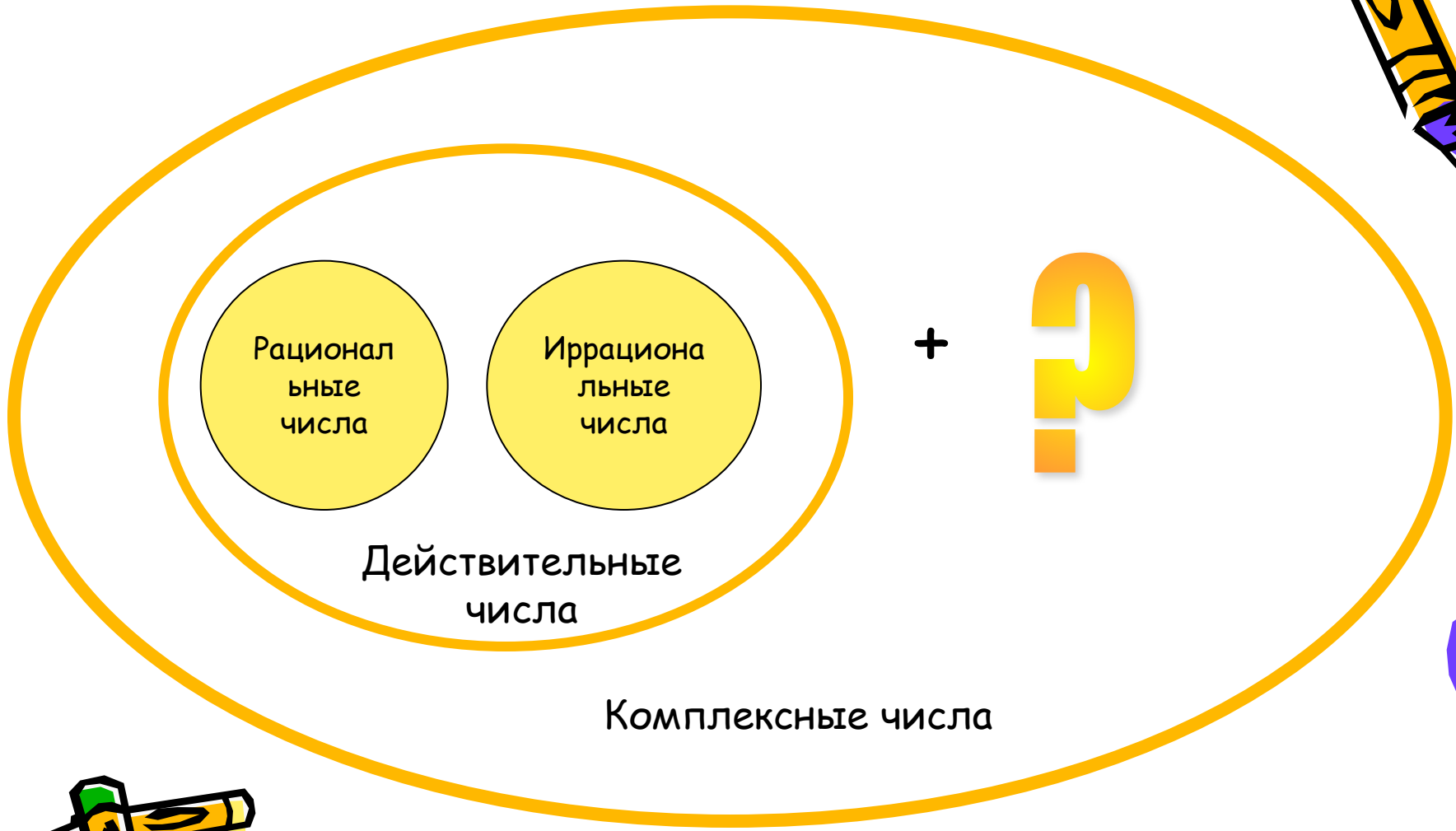
$$A \cdot X^2 + B \cdot X + C = 0$$

При $D < 0$ действительных корней нет



+





Вид комплексного числа

$$x^2 = -1$$

$x = i$ - корень уравнения

i - комплексное число, такое, что

$$i^2 = -1$$

$$A + B \cdot i$$

ЗАПИСЬ КОМПЛЕКСНОГО
ЧИСЛА В ОБЩЕМ ВИДЕ



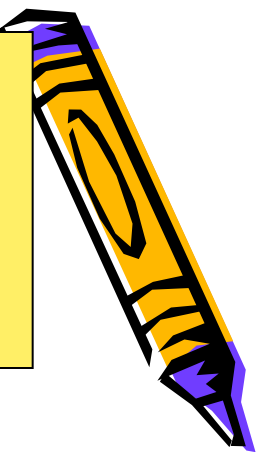
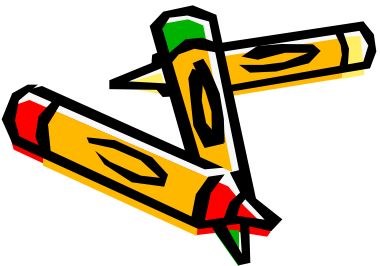
$$A + B \cdot i$$

A и B - действительные числа
 i - некоторый символ, такой, что $i^2 = -1$

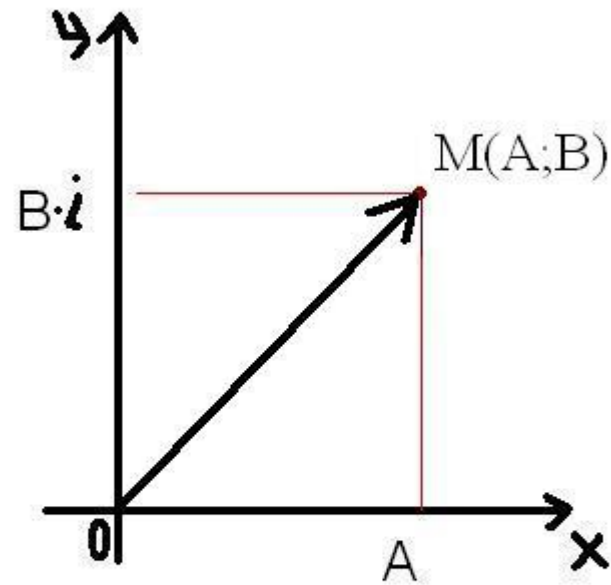
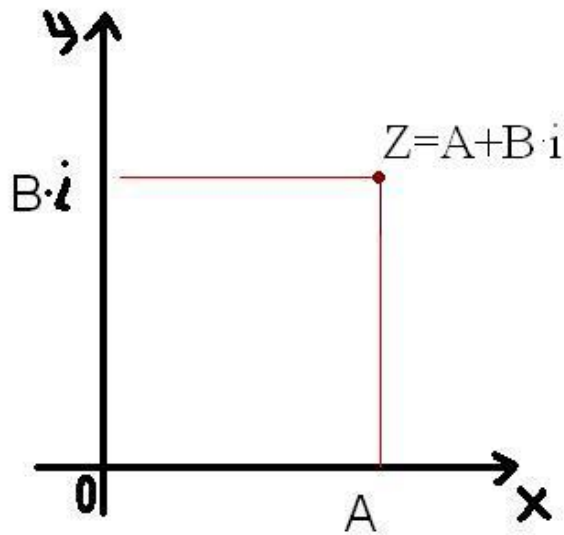
A - действительная часть

B - мнимая часть

i - мнимая единица



Геометрическая интерпретация комплексного числа



Комплексно сопряженные числа.

$$\overline{Z} = A - B \cdot i$$

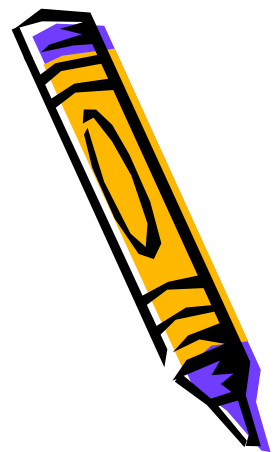
СОПРЯЖЕННОЕ

$$Z = A + B \cdot i$$

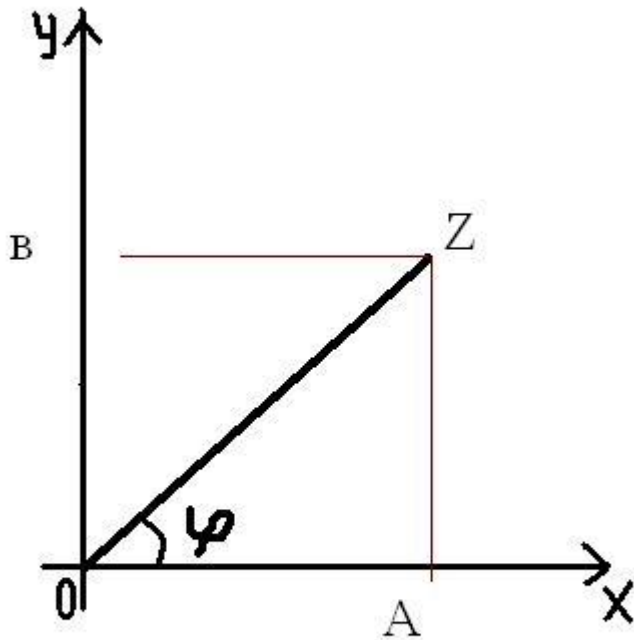
$$\overline{\overline{Z}} = Z$$

Модуль комплексного числа

$$|Z| = |A + B i| = \sqrt{A^2 + B^2}$$



Тригонометрическая форма комплексного числа

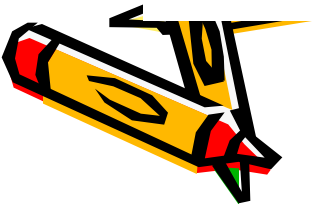
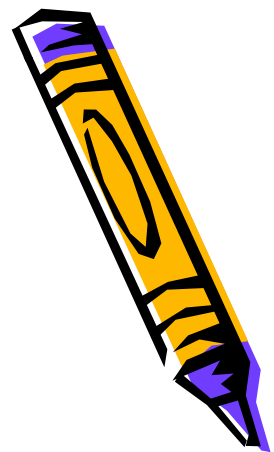


$$|Z|=r$$

φ - аргумент аргумент
комплексного числа

$$Z=r \cos \varphi + i Z \sin \varphi = \\ = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Для $Z=0$ аргумент не
определяется





$$\text{T.K } |Z| = r = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$Z = A + B \cdot \frac{i}{\sin \varphi} = \frac{A \cos \varphi + i B}{\sin \varphi}$$

$$\frac{\cos \varphi + i}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

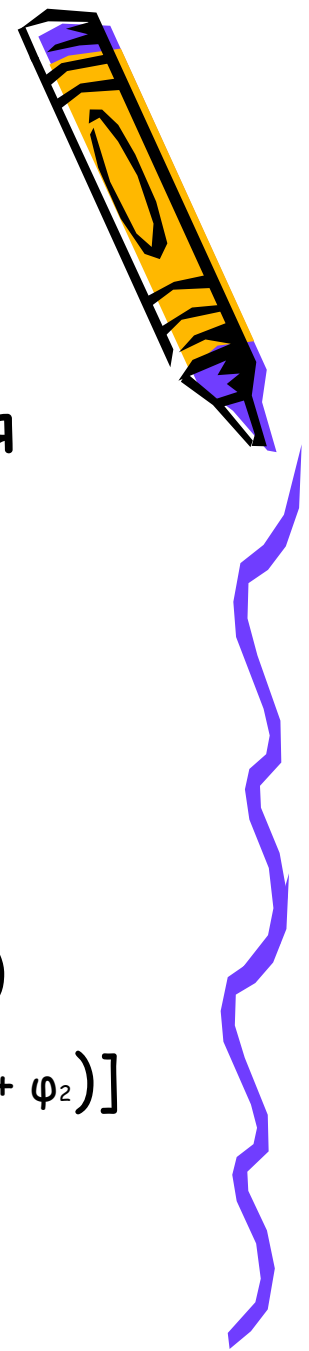
$$\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}$$



Сложение и умножение КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ



Алгебраическая
форма

Сумма

$$(A+iB) + (C+iD) =$$

$$(A+C) + (B+D)i$$

Произведение

$$(A+iB) \cdot (C+iD) =$$

$$(AC-BD) + (AD+BC)i$$

Геометрическая
форма

Произведение

$$Z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$Z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$



Если $Z_1 = Z_2$, то получим

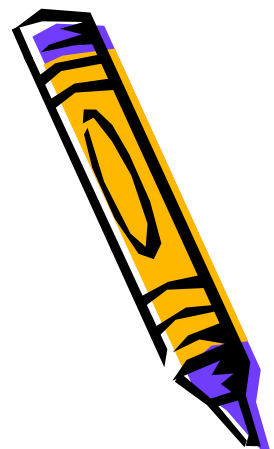
$$Z^2 = [r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^2 = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

$$Z^3 = Z^2 \cdot Z = [r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^2 \cdot r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$$

Формула Муавра

$$Z^n = [r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)]^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$$

Для любого $Z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$ и любого натурального числа n



Число Z называется **корнем степени n** из числа ω (обозначается $\sqrt[n]{\omega}$), если $Z^n = \omega$ (*)

Из данного определения вытекает, что каждое решение уравнения $Z^n = \omega$ является корнем степени n из числа ω .

$$Z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\omega = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$$

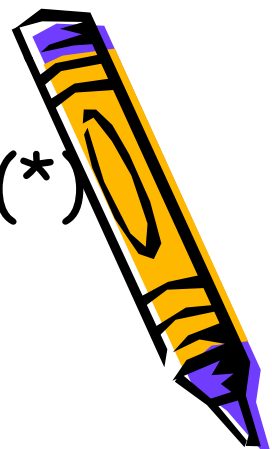
$$r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi) = \rho(\cos \psi + i \cdot \sin \psi)$$

$$r^n = \rho \text{ и } n\varphi = \psi + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{или } r = \sqrt[n]{\rho}, \varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$Z_k = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) \right], k \in \mathbb{Z}$$

Вторая формула Муавра



Вторая формула Муавра определяет все корни двучленного уравнения степени n

$$a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z^1 + a_0 = 0$$

где a_n, \dots, a_0 – заданные комплексные числа.

Теорема Гаусса: каждое алгебраическое уравнение имеет в множестве комплексных чисел по крайней мере один корень

Каждое алгебраическое уравнение степени n имеет в множестве комплексных чисел ровно n -корней.



Пример: Решить уравнение:

$$x^3 = -8$$

$$-8 = 8 \cdot (\cos(\pi + 2\pi k) + i \cdot \sin(\pi + 2\pi k)), \quad k \in Z$$

$$x = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

$$r^3 \cdot (\cos 3\varphi + i \cdot \sin 3\varphi) = 8 \cdot (\cos(\pi + 2\pi k) + i \cdot \sin(\pi + 2\pi k)), \quad k \in Z$$

$$\text{тогда} \quad 3\varphi = \pi + 2\pi k$$

$$\varphi = \frac{\pi + 2\pi k}{3}, \quad k \in Z$$

$$r^3 = 8$$

$$r = 2$$

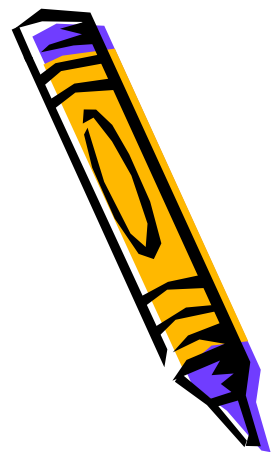
$$x = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right), \quad k \in Z$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3} \cdot i$$

$$x_2 = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = -2$$

$$x_3 = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) \right) = 1 - \sqrt{3} \cdot i$$



Свойства сложения и умножения



Переместительное свойство:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

Сочетательное свойство:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

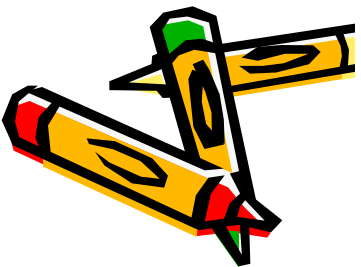
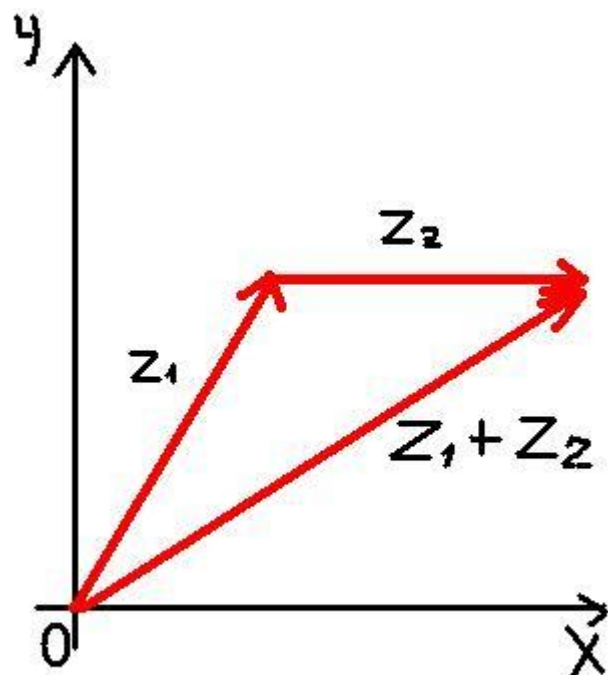
$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

Распределительные свойство:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$



Геометрическое изображение суммы комплексных чисел



Вычитание и деление комплексных чисел

Вычитание - операция, обратная сложению:

$$Z + Z_2 = Z_1$$

$$Z + Z_2 + (-Z_2) = Z_1 + (-Z_2)$$

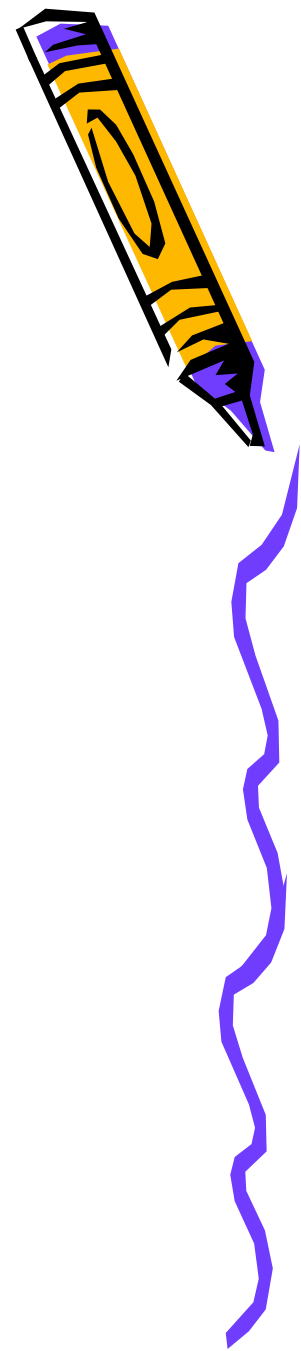
$$Z = Z_1 - Z_2 \text{ -разность}$$

Деление - операция, обратная умножению:

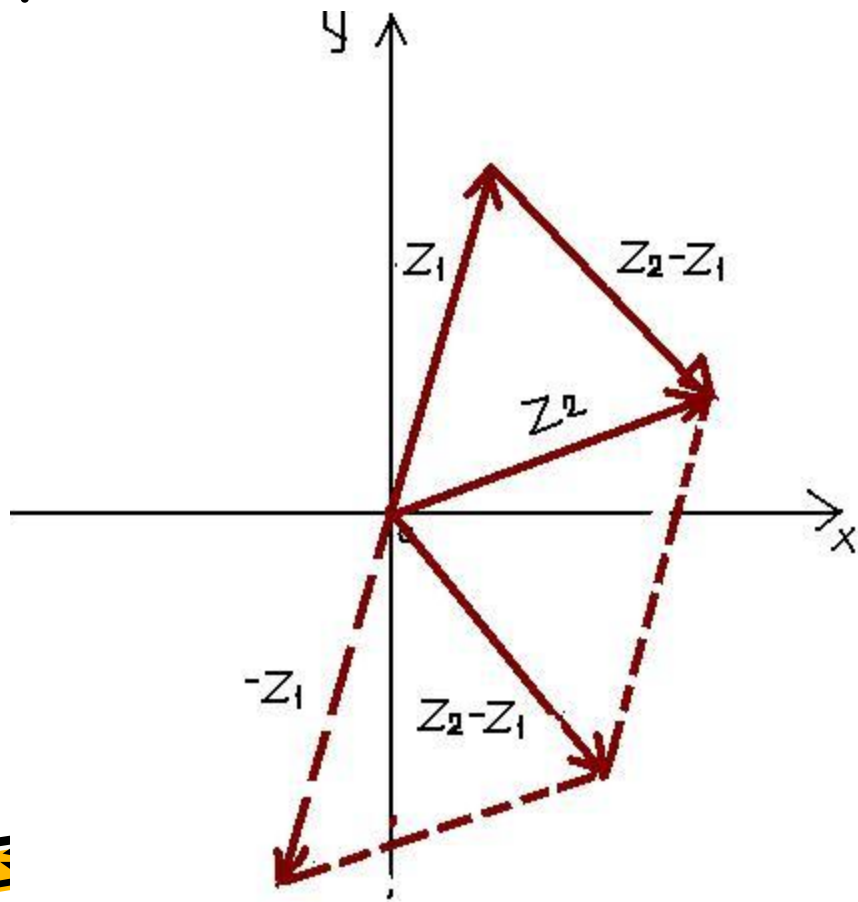
$$Z \cdot Z_2 = Z_1$$

Разделив обе части на Z_2 получим:

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} \quad Z_2 \neq 0$$



Геометрическое изображение разности комплексных чисел



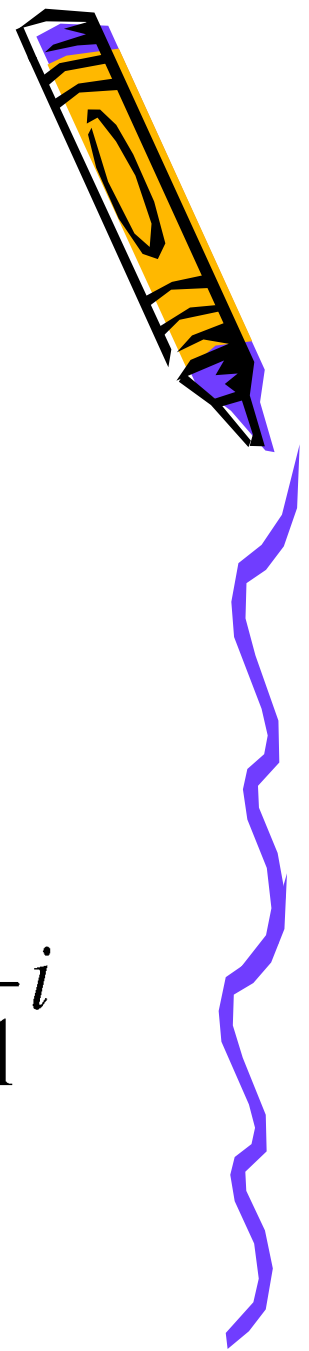
Примеры:

Найти разность и частное комплексных чисел $Z_1 = 4 + 5i$ и $Z_2 = 3 + 4i$

Решение:

$$Z_2 - Z_1 = (3 + 4i) - (4 + 5i) = -1 - i$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{16 + 25} + i \frac{4 \cdot 4 - 3 \cdot 5}{16 + 25} = \frac{32}{41} + \frac{1}{41}i$$



Литература

- Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др/ Алгебра и начала анализа 10-11кл, Просвещение 2005г,
- Колмагоров А.Н., Абрамов, Дудицин/ Алгебра и начала анализа 10-11кл, Просвещение 2005г
- Никольский С.М., Потапов Н.К, и др. Алгебра и начала анализа 10-11кл, Просвещение 2005г

