

Множество КОМПЛЕКСНЫХ чисел.

Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, в котором a и b – действительные числа, а i – некоторый символ такой, что

$$i^2 = -1$$

Действительное число a называется **действительной частью** $z=a+bi$ ($\operatorname{Re} z$), а число b – **мнимой частью** ($\operatorname{Im} z$)

Комплексное число $z=a+bi$ изображают точкой плоскости с координатами $(a;b)$

Точка $M(a;b)$, соответствующая комплексному числу $z=a+bi$, называется **аффиксом** данного числа z .

Два комплексных числа $(a; b)$ и $(c; d)$ называются **равными**, если $a = c$ и $b = d$.

Комплексное число $a-bi$ называется комплексно **сопряженным** с числом $a+bi$ и обозначается через \bar{z}

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

Комплексные числа вида $a+bi$ и $-a-bi$ называются **противоположными**.

Арифметические операции над КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Суммой комплексных чисел $z = (a; b)$ и $w = (c; d)$ называется комплексное число $(a+c; b+d)$.

Разностью комплексных чисел $z = (a; b)$ и $w = (c; d)$ называют такое число, которое в сумме с числом w даёт число z

$$z = w + u.$$

Справедливо следующее правило:

$$(a; b) - (c; d) = (a - c; b - d).$$

Произведением комплексных чисел $z = (a; b)$ и $w = (c; d)$ называют комплексное число $(ac - bd; ad + bc)$

Частным от деления z на w называют число u , равное:

$$u = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}; \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$$

Нахождение степеней числа i

Если показатель степени i делится на 4, то значение степени равно 1, если при делении показателя на 4 в остатке получается 1, то значение степени равно i , если при делении показателя на 4 остаток равен 2, то значение степени равно -1 , если в остатке при делении показателя на 4 будет 3, то значение степени равно $-i$.

- Вычислить: 1) i^{66} , 2) i^{143} , 3) i^{216} , 4) i^{137}

Решение:

1) i^{66}

$66:4=16(2)$. Остаток равен 2, значит $i^{66}=-1$

2) i^{143}

$143:4=35(3)$. В остатке 3, значит $i^{143}=-i$

3) i^{216}

$216:4=54(0)$. В остатке 0, значит $i^{216}=1$

4) i^{137}

$137:4=34(1)$. В остатке 1, значит $i^{137}=i$

Пример 1

Вычислить: $(1 + 2i)i - \frac{3 + 2i}{1 - i}$

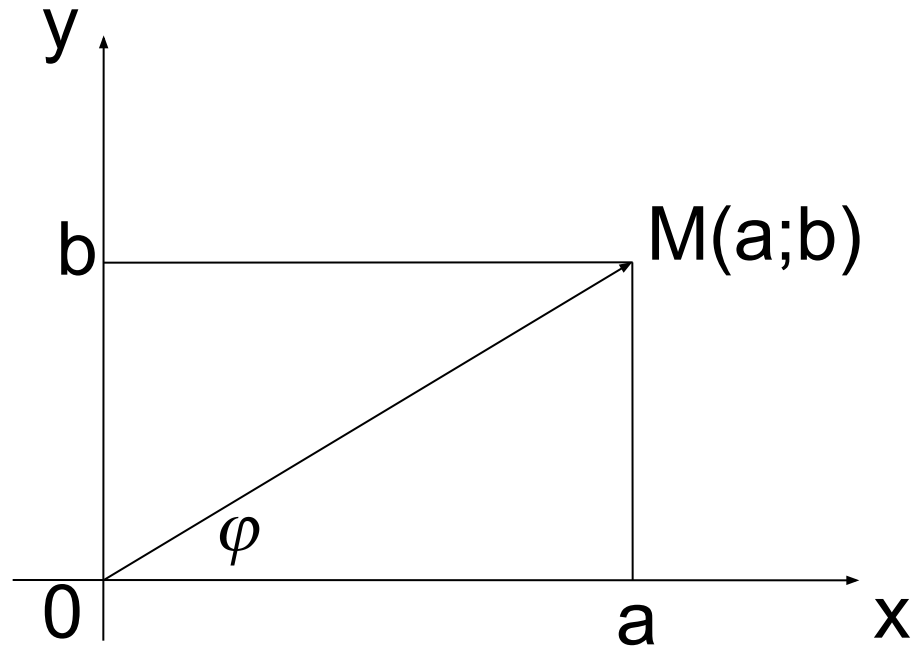
$$1) (1 + 2i)i = i + 2i^2 = -2 + i$$

$$2) \frac{3 + 2i}{1 - i} = \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{3 + 2i + 3i + 2i^2}{1 - i^2} = \frac{3 + 5i - 2}{1 + 1} = \frac{1 + 5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$3) (-2 + i) - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i \right) = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$$

Геометрический смысл комплексного числа

Каждой точке M плоскости с координатами (a, b) соответствует один и только один вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{z}$ с началом в точке $z = 0$ и концом в точке $z = a + bi$



Если комплексное число $Z = a + bi$ трактовать как точку $M(a, b)$ плоскости xOy , то модуль Z равен расстоянию точки $M(a, b)$ от начала координат

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Если на плоскости ввести полярные координаты (r, φ) , где φ **аргумент** числа z ($\varphi = \arg z$) - угол между действительной осью Ox и вектором OM , то **$a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$**

В силу этого комплексное число Z можно записать в форме **$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$** , где r – модуль числа Z , φ – угол (в рад.), который составляет вектор OM с положительным направлением оси ox

Тригонометрическая форма комплексного числа

Тригонометрической формой комплексного числа называют его запись в виде:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль, а

φ - аргумент числа z , связанный с a и b формулами:

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Угол φ из промежутка $[-\pi; \pi]$ называется главным аргументом. Все остальные значения угла φ могут быть получены прибавлением к главному аргументу значений $2\pi n$, где n - любое целое число.

Пример2.

Записать в тригонометрической форме: $-2\sqrt{3} + 2i$

Сначала находим модуль числа: $r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

Далее, согласно формулам (*),

имеем: $\cos \varphi = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sin \varphi = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Учитывая, что угол $\varphi \in [-\pi; \pi]$ $\varphi = \frac{5\pi}{6}$

Итак, $z = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

При умножении/делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются /делятся, а аргументы складываются (вычитаются).

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (2)$$

Пример 3. Выполнить действия:

$$4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) * \frac{1}{10} \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

Используя формулу (1), находим:

$$\frac{4}{10} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \frac{2}{5} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = -\frac{2}{5} i$$

При возведении комплексного числа
 $z = r (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в натуральную степень
 n

модуль данного числа возводится в эту степень,
а аргумент умножается на показатель степени:

формула Муавра

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)(4)$$

Корень n-й степени из комплексного числа $z = r (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле :

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) (3)$$

Здесь $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Пример 4. Решить уравнение $z^2 + 4 = 0$

Корнями данного уравнения являются все значения $\sqrt{-4}$

Для числа -4 имеем $r = 2$,

Согласно формуле(3),

находим:
$$\sqrt{-4} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2} \right)$$

Если $k = 0$, то
$$\omega_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2}i$$

Если $k = 1$, то
$$\omega_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -\sqrt{2}i$$

Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера

Если комплексному числу $(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, модуль которого равен 1, поставить в соответствие показанное выражение $e^{i\varphi}$, то получим

соотношение

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$$

то получим соотношение которое называется **формулой Эйлера**.

можно записать в

Любое комплексное число z в виде

$$z = r e^{i\varphi}$$

. Эта форма записи комплексного числа называется **показательной формой**.

Пример: Записать число в показательной форме.

$$z = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

Решение: Здесь $r = 3$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

тогда показательная форма числа имеет вид

$$z = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Пример: Записать число $z = -5i$ в показательной форме.

Решение. Что бы представить число нужно найти модуль и аргумент

$$z \text{ в виде } z = re^{i\varphi}$$

числа

Здесь $a = 0, b = -5$; тогда $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0 + (-5)^2} = 5, \varphi = \frac{3\pi}{2}$,

так как точка z лежит на мнимой оси комплексной плоскости.

Зная r и φ , получим

$$z = 5e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

- **Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме**

Если комплексные числа записаны в показательной форме, то умножение, деление, возведение в степень производится по правилам действий со степенями.

Так, для произведения и частного комплексных чисел

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ справедливы формулы

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

а для n -й степени комплексного числа используется

- формула $z^n = r^n e^{i\varphi n}$

Для вычисления корня из комплексного числа

$$z = re^{i\varphi}$$

используется формула

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$$

где k принимает n значений: $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Понятие функции комплексного переменного и отличие от действительного анализа

Пусть D – некоторая область на комплексной плоскости

Определение. *Функцией комплексного аргумента* с областью определения D называется соответствие, которое любому комплексному числу $z \in D$ сопоставляет одно или несколько комплексных значений.

Таким образом, в отличие от действительного анализа, в комплексном анализе допускаются многозначные функции.

Например,

$f(z) = az + b$ (a, b – фиксированные комплексные числа) – однозначная функция;

$f(z) = z^2$ – однозначная функция

$f(z) = \sqrt[n]{z}$ - n-значная функция;

$f(z) = \operatorname{Arg} z$ - бесконечнозначная функция.

Если функция однозначна, то она может быть задана в виде отображения $f : D \rightarrow C$. В таком случае функция называется **однолистной**. В дальнейшем, если не указано особо, будем рассматривать однолистные функции.

Пример: Для функции $f(z) = \frac{z^2 + 1}{2i} + 1$ найти $f(i)$

Решение: Подставим в место z значение i в функцию

$$f(i) = \frac{i^2 + 1}{2i} + 1 = \frac{-1 + 1}{2i} + 1 = 0 + 1 = 1$$

Ответ: $f(i) = 1$

Компоненты функции

Пусть дана функция , $f(z)$ $z \in D$ Представим z в алгебраической форме $z = x + iy$ Значение $f(z)$ - комплексное число, т.е. $f(z) \in \mathbb{C}$, которое также можем представить в алгебраической форме $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ действительные функции комплексного аргумента, но задание $f(z)$ эквивалентно заданию пары (x, y) .

Окончательно, любую функцию комплексного аргумента можно представить в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \text{ где } u(x, y) \text{ и } v(x, y) -$$

действительные функции двух действительных переменных. Функции u и v называются компонентами функции $f(z)$, u - действительная компонента, v -мнимая компонента. Пишут :

$$u = \operatorname{Re} f(z) \quad v = \operatorname{Im} f(z)$$

Пример: Для функции $f(z) = (x + iy)^2 + 4i$
Где $z = x + iy$ найти ее действительную и
мнимую часть.

Решение:

$$(x+iy)^2+4i=x^2+2ixy-y^2+4i=(x^2-y^2)+(2xyi+4i)=(x^2-y^2)+i(2xy+4).$$

Тогда действительная часть функции $f(z)$ - x^2-y^2 , а
мнимая - $2xy+4$.

$$\operatorname{Re}(f(z)) = x^2 - y^2$$

$$\operatorname{Im}(f(z)) = 2xy + 4$$

Понятие **непрерывности** определяется аналогично действительному случаю.

$f(z)$ -непрерывна в точке $z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$

$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ Так как это определение формально совпадает с обычным, то все свойства непрерывной функции комплексного аргумента совпадают дословно со свойствами действительных функций.