Множество комплексных чисел.

Комплексным числом называется выражение вида a + bi, в котором a и b – действительные числа, а i – некоторый символ такой, что

$$i^2 = -1$$

Действительное число a называется действительной частью z=a+bi (Re z), а число b-мнимой частью (Im z)

Комплексное число z=a+bi изображают точкой плоскости с координатами (a;b)
Точка M(a;b), соответствующая комплексному числу z=a+bi, называется ***аффиксом*** данного числа z.

Два комплексных числа (a; b) и (c; d) называются ***равными***, если a = c и b = d.

Комплексное число a-bi называется комплексно сопряженным с числом a+bi и обозначается через $\bar{z}$

$\bar{z} = \overline{a + bi}$ = a-bi

Комплексные числа вида a+bi и –a-bi называются противоположными.

Арифметические операции над комплексными числами

Суммой комплексных чисел $z = (a; b)$ и

$w = (c; d)$ называется комплексное число

$(a+c; b+d)$.

Разностью комплексных чисел $z = (a; b)$ и $w = (c; d)$ называют такое числоu, которое в сумме с числом w даёт число z

$z = w + u$.

Справедливо следующее правило:

(a; b) – (c; d) = (a – c; b – d).

Произведением комплексных чисел *z = (a; b)* и *w = (c; d)* называют комплексное число

(ac – bd; ad + bc)

Частным от деления *z* на *w* называют число u, равное:

$$u = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} ; \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$$

Нахождение степеней числа *i*

Если показатель степени i делится на 4, то значение степени равно 1, если при делении показателя на 4 в остатке получается 1, то значение степени равно i, если при делении показателя на 4 остаток равен 2, то значение степени равно -1, если в остатке при делении показателя на 4 будет 3, то значение степени равно –i.

- Вычислить: 1) i^{66}, 2) i^{143}, 3) i^{216}, 4) i^{137}

Решение:

1) i^{66}

66:4=16(2). Остаток равен 2, значит $i^{66}=-1$

2) i^{143}

143 :4=35(3).В остатке 3, значит $i^{143}=-i$

3) i^{216}

216:4=54(0).в остатке 0, значит $i^{216}=1$

4) i^{137}

137:4=34(1).В остатке 1, значит $i^{137}=i$

Пример 1

Вычислить: $$(1+2i)i-\frac{3+2i}{1-i}$$

$$1)(1+2i)i=i+2i^2=-2+i$$

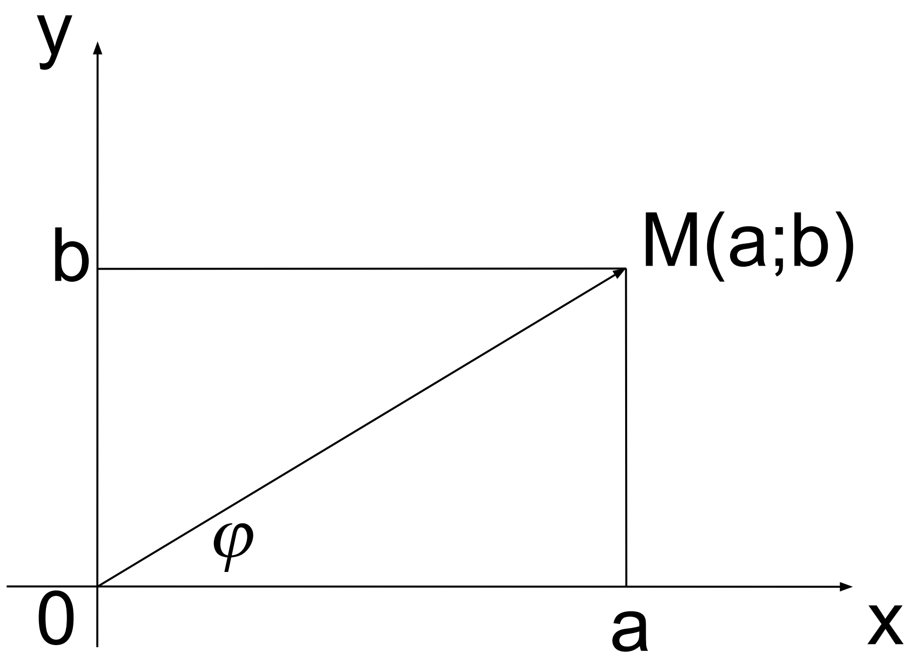
$$2)\frac{3+2i}{1-i}=\frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3+2i+3i+2i^2}{1-i^2}=\frac{3+5i-2}{1+1}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$$

$$3)(-2+i)-\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i\right)=-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i$$

Геометрический смысл комплексного числа

Каждой точке М плоскости с координатами (a,b) соответствует один и только один вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{z}$

с началом в точке z = 0 и концом в точке z=a+bi



Если комплексное число Z= a+bi трактовать как точку M (a,b) плоскости xOy, то модуль Z равен расстоянию точки M (a,b) от начала координат

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Если на плоскости ввести полярные координаты (r,φ), где φ ***аргумент*** *числа z (φ=argz) - угол между действительной осью OX и вектором OM, то* *a = r COS φ*, *b = r SIN φ*

В силу этого комплексное число Z можно записать в форме *z = r(COS φ+iSIN φ),*

где r – модуль числа Z, φ – угол (в рад.), который составляет вектор OM с положительным направлением оси ox

Тригонометрическая форма комплексного числа

Тригонометрической формой комплексного числа называют его запись в виде:

$z = r(cos\varphi + isin\varphi)$, где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль, а

φ – аргумент числа z, связанный с a и b формулами:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Угол φ из промежутка $[-\pi;\pi]$ называется главным аргументом. Все остальные значения угла φ могут быть получены прибавлением к главному аргументу значений 2π n, где n – любое целое число.

Пример2.

Записать в тригонометрической форме: $-2\sqrt{3}+2i$

Сначала находим модуль числа: $r=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

Далее, согласно формулам (*),

имеем: $\cos\varphi=-\frac{2\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}; \sin\varphi=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Учитывая, что угол $\varphi\in[-\pi;\pi]$ $\varphi=\frac{5\pi}{6}$

Итак, $z=4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

При умножении/делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются /делятся, а аргументы складываются (вычитаются).

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \qquad (1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \qquad (2)$$

Пример3. Выполнить действия:

$$4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)*\frac{1}{10}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

Используя формулу (1), находим:

$$\frac{4}{10}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\frac{2}{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-\frac{2}{5}i$$

При возведении комплексного числа

z = r (Cosφ + iSinφ) в натуральную степень n

модуль данного числа возводится в эту степень,

а аргумент умножается на показатель степени:

формула Муавра

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(4)$$

Корень n-й степени из комплексного числа $z = r\,(\mathrm{Cos}\varphi + i\mathrm{Sin}\varphi)$ *имеет n различных значений, которые находятся по формуле :*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n}\right)(3)$$

Здесь к = 0, 1, 2, … *n-1*

Пример4. Решить уравнение $z^2 + 4 = 0$

Корнями данного уравнения являются все значения $\sqrt{-4}$

Для числа -4 имеем $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Согласно формуле(3),

находим: $$\sqrt{-4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi\kappa}{2} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\kappa}{2}\right)$$

Если к = 0, то $$\omega_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}i$$

Если к = 1, то $$\omega_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}i$$

Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера

Если комплексному числу $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

, модуль которого равен 1, поставить в соответствие показанное выражение $e^{i\varphi}$, то получим соотношение

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi},$$

то получим соотношение которое называется ***формулой Эйлера***.

Любое комплексное число z можно записать в виде

$$z = re^{i\varphi}$$

. Эта форма записи комплексного числа называется ***показательной формой***.

Пример: Записать число в показательной форме.

$$z = 3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

Решение: Здесь $r = 3,\ \varphi = \frac{3\pi}{2}$

тогда показательная форма числа имеет вид

.

$$z = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Пример: Записать число $z = -5i$ в показательной форме.

Решение. Что бы представить число z в виде $z = re^{i\varphi}$ нужно найти модуль и аргумент числа z

Здесь $a = 0,\ b = -5;$ тогда $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0 + (-5)^2} = 5,\ \ \varphi = \dfrac{3\pi}{2},$

так как точка z лежит на мнимой оси комплексной плоскости.

Зная r и φ, получим

$$z = 5e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

- **Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме**

Если комплексные числа записаны в показательной форме, то умножение, деление, возведение в степень производится по правилам действий со степенями.

Так, для произведения и частного комплексных чисел

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ справедливы формулы

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

а для n-й степени комплексного числа используется

- формула $z^n = r^n e^{i\varphi n}$

Для вычисления корня из комплексного числа

$$z = re^{i\varphi}$$

используется формула

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$$

где k принимает n значений: 0,1,2,…,n-1.

Понятие функции комплексного переменного и отличие от действительного анализа

Пусть *D* – некоторая область на комплексной плоскости

Определение. ***Функцией комплексного аргумента*** с областью определения D называется соответствие,которое любому комплексному числу $z \in D$ сопостовляет одно или несколько комплексных значений.
Таким образом, в отличие от действительного анализа, в комплексном анализе допускаются многозначные функции.
Например,

f(z)=az+b (*a*, *b* – фиксированные комплексные числа)- однозначная функция;

$f(z) = z^2$ - однозначная функция

$f(z)=\sqrt[n]{z}$ - n-значная функция;

$f(z)=Argz$ -бесконечнозначная функция.

Если функция однозначна,то она может быть задана в виде отображения $f:D\to C$ В таком случае функция называется однолистной .В дальнейшем, если не указано особо,будем рассматривать однолистные функции.

Пример: Для функции $f(z)=\frac{z^2+1}{2i}+1$ найти $f(i)$

Решение: Подставим в место z значение i в функцию

$$f(i)=\frac{i^2+1}{2i}+1=\frac{-1+1}{2i}+1=0+1=1$$

Ответ: f(i)=1

Компоненты функции

Пусть дана функция , $f(z)$ $z \in D$ Представим z в алгебраической форме $z = x + iy$ Значение f(x)-комплексное число,т.е. $f(z) \in C$,которое также можем представить в алгебраической форме $f(z) = u(z) + iv(z)$,где и $u(z)$ $v(z)$ -действительные функции комплексного аргумента, но задание я эквивалентно заданию пары(x,y). Окончательно,любую функцию комплексного аргумента можно представить в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$,где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ - действительные функции двух действительных переменных.Функции u и v называются компонентами функции f(z),u- действительная компонента,v-мнимая компонента.Пишут :

$$u = \operatorname{Re} f(z) \quad v = \operatorname{Im} f(z)$$

Пример: Для функции $f(z) = (x + iy)^2 + 4i$

Где $z = x + iy$ найти ее действительную и мнимую часть.

Решение:

$(x+iy)^2+4i=x^2+2ixy-y^2+4i=(x^2-y^2)+(2xyi+4i)=(x^2-y^2)+i(2xy+4)$.

Тогда действительная часть функции f(z) - x^2-y^2,а

мнимая - 2xy+4.

$$\mathrm{Re}(f(z)) = x^2 - y^2$$

$$\mathrm{Im}(f(z)) = 2xy + 4$$

Понятие непрерывности определяется аналогично действительному случаю.

F(z)-непрерывна в точке $z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$

$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ Так как это определение формально совпадает с обычным ,то все свойства непрерывной функции комплексного аргумента совпадают дословно со свойствами действительных функций.