Комплексные числа

ОБЯЗАТЕЛЬНЫЙ МИНИМУМ СОДЕРЖАНИЯ ОСНОВНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ

ЧИСЛОВЫЕ И БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Комплексные числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Действительная и мнимая часть, модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел. Арифметические действия над комплексными числами в разных формах записи. Комплексно сопряженные числа. *Возведение в натуральную степень (формула Муавра). Основная теорема алгебры.*

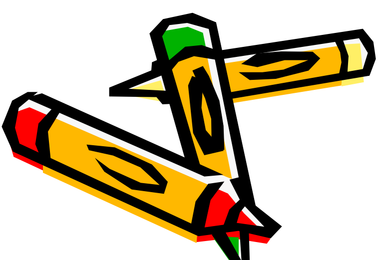
Понятие комплексного числа

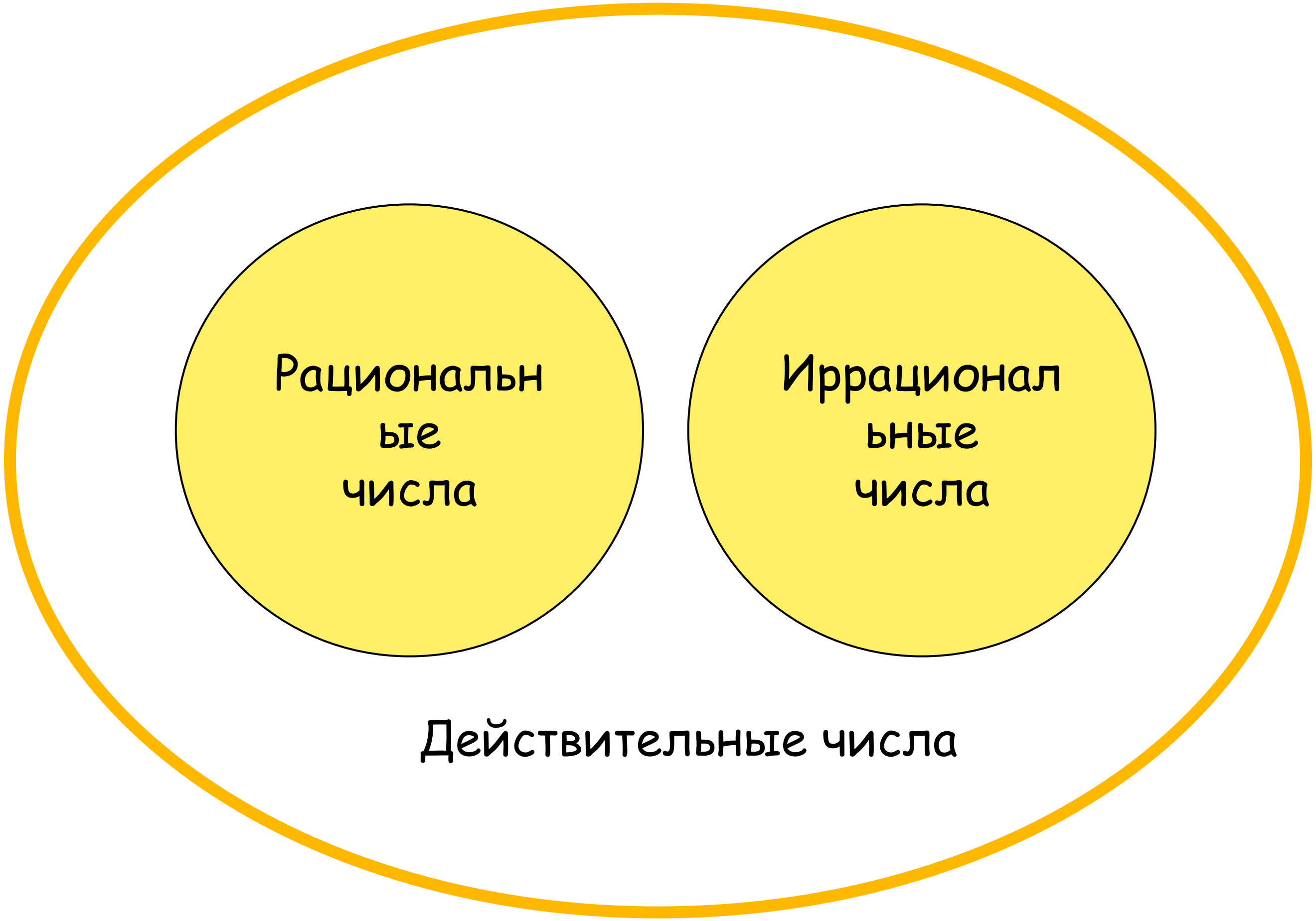
$X+A=B$ - недостаточно положительных чисел

$X+5=2$

$A \cdot X + B=0$ $(A \neq 0)$ – разрешимы на множестве рац.чисел

$X^2=2$ или $X^3=5$ - корни - иррациональные числа

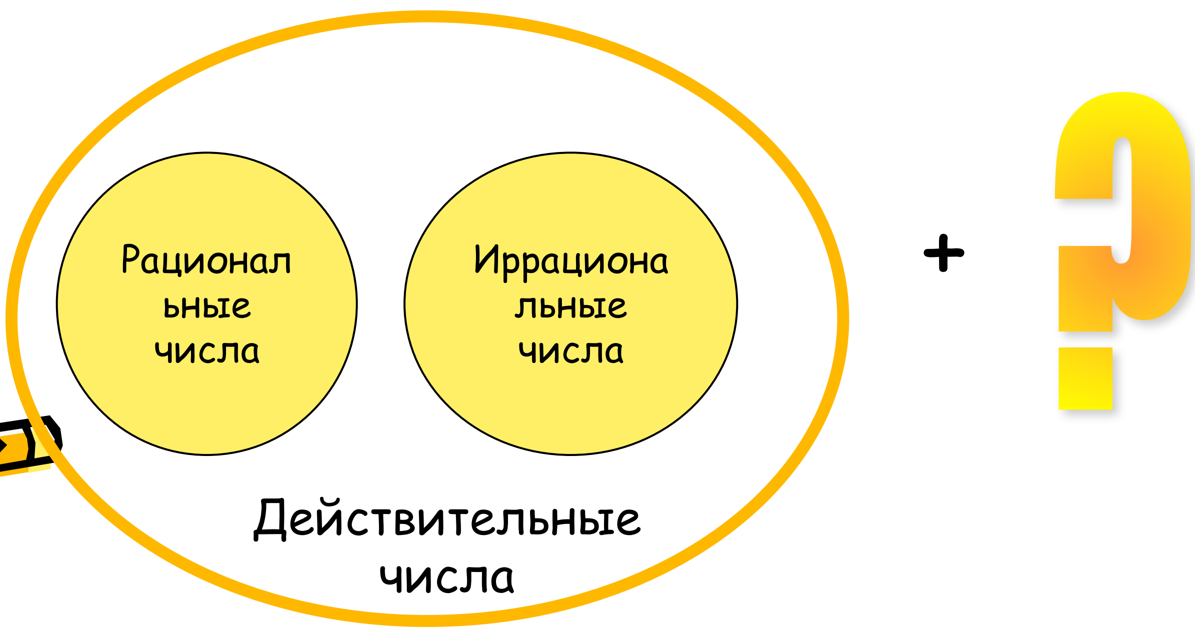


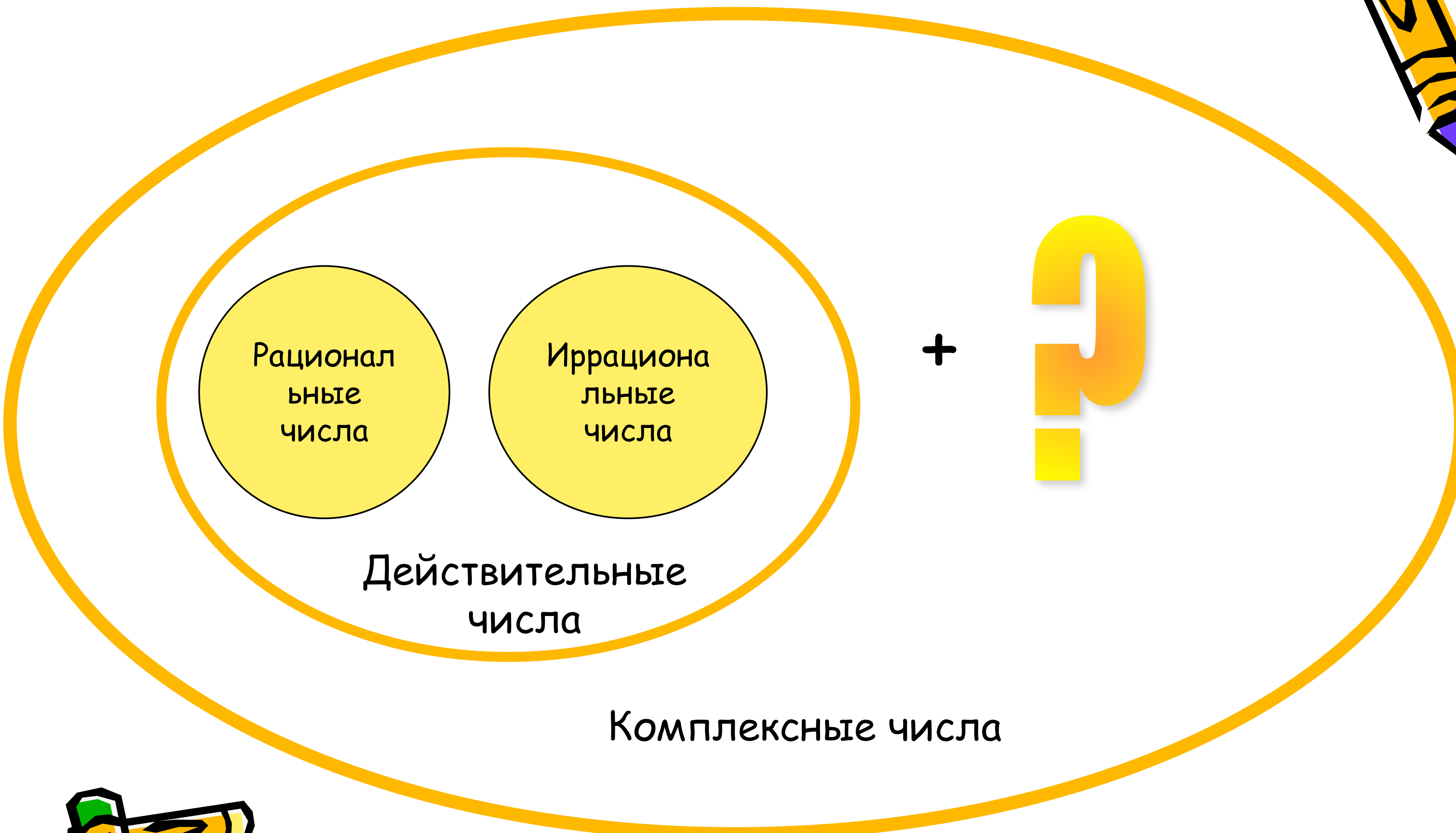

Рациональные числа
Иррациональные числа
Действительные числа

Решение квадратных уравнений

$A \cdot X^2 + B \cdot X + C = 0$

При D<0 действительных корней нет




Рациональные числа
Иррациональные числа
Действительные числа
+ ?
Комплексные числа

Вид комплексного числа

$X^2=-1$

$X=i$ *-корень уравнения*

i- комплексное число, такое , что

$$i^2=-1$$

$$\boxed{A + B\cdot i}$$

ЗАПИСЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА В ОБЩЕМ ВИДЕ

$A + B \cdot i$

A и B – действительные числа

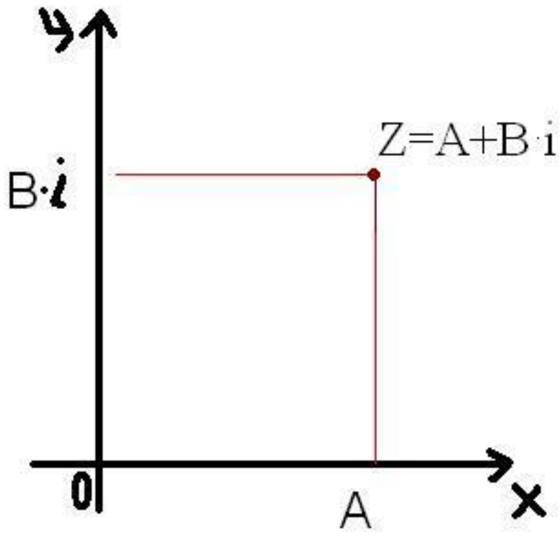
i- некоторый символ , такой, что $i^2 = -1$

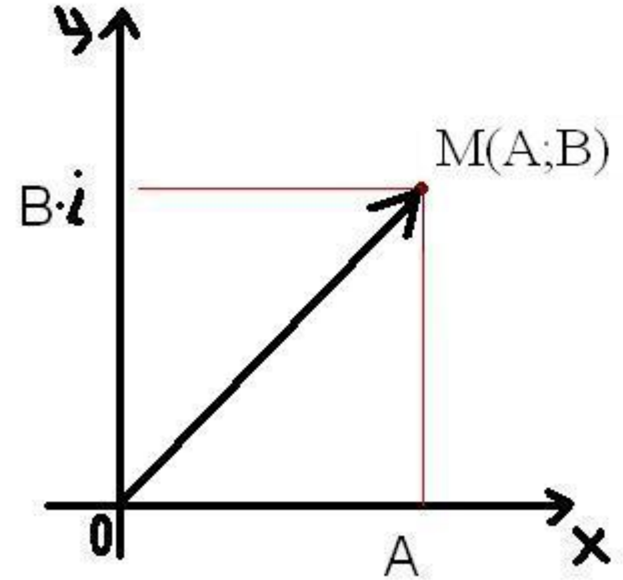
A – действительная часть

B – мнимая часть

i – мнимая единица

Геометрическая интерпретация комплексного числа





Комплексно сопряженные числа.

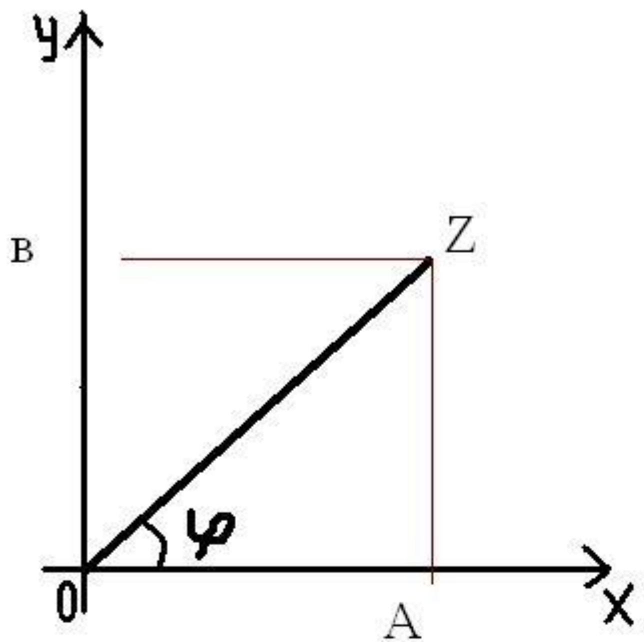
$\overline{Z = A - B \cdot i}$ сопряженное $Z = A + B \cdot i$

$$\overline{\overline{(Z)}} = Z$$

Модуль комплексного числа

$$|Z| = |A + B\,i| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа



$|Z|=r$

φ- аргумент аргумент комплексного числа

$Z=r\cos\varphi + i\,Z\sin\varphi =$

$= r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Для Z=0 аргумент не определяется

Т.к $|Z| = r = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$Z = A + B \cdot i = \sqrt{A^2 + B^2}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$tg\varphi = \frac{B}{A}$$

Сложение и умножение комплексных чисел

Алгебраическая форма

Сумма

$(A+iB) + (C+iD)=$

$(A+C)+(B+D)I$

Произведение

$(A+iB) \cdot (C+iD)=$

$(AC-BD)+(AD+BC)i$

Геометрическая форма

Произведение

$Z_1= r_1(\cos \varphi_1+ i \sin \varphi_1)$

$Z_2= r_2(\cos \varphi_2+ i \sin \varphi_2)$

$Z_1 \cdot Z_2= r_1r_2[\cos(\varphi_1+ \varphi_2)+i\sin (\varphi_1+ \varphi_2)]$

Если $Z_1 = Z_2$, то получим

$Z^2 = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 =$

$r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

$Z^3 = Z^2 \cdot Z = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 \cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$

Формула Муавра

$$Z^n = [r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)]^n =$$

$$r^n \cdot (\cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi)$$

Для любого $Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ и любого натурального числа n

Число Z называется корнем степени n из числа ω (обозначается $\sqrt[n]{\omega}$), если $Z^n = \omega (*)$

Из данного определения вытекает, что каждое решение уравнения $Z^n = \omega$ является корнем степени n из числа ω.

Z= r (cos φ+ *i* sin φ) ω= ρ(cos ψ+ *i* sin ψ)

$$r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi) = \rho(\cos\psi + i \cdot \sin\psi)$$

$$r^n = \rho \quad и \quad n\varphi = \psi + 2\pi k, \quad где \quad k \in Z$$

$$или \qquad r = \sqrt[n]{\rho} \quad , \varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \quad k \in Z$$

$$\boxed{Z_k = \sqrt[n]{\rho}[\cos(\frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}k) + i \cdot \sin(\frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}k)], \quad k \in Z}$$

Вторая формула Муавра

Вторая формула Муавра определяет все корни двучленного уравнения степени n

$$a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \ldots + a_1 Z^1 + a_0 = 0$$

$$\textit{где} \quad a_{n,\ldots,}\ a_0 - \textit{заданные копмплексные числа.}$$

Теорема Гаусса: каждое алгебраическое уравнение имеет в множестве комплексных чисел по крайне мере один корень

Каждое алгебраическое уравнение степени n имеет в множестве комплексных чисел ровно n-корней.

Пример:
Решить уравнение:

$$x^3 = -8$$

$$-8 = 8 \cdot (\cos(\pi + 2\pi k) + i \cdot \sin(\pi + 2\pi k)), \qquad k \in Z$$

$$x = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$$r^3 \cdot (\cos 3\varphi + i \cdot \sin 3\varphi) = 8 \cdot (\cos(\pi + 2\pi k) + i \cdot \sin(\pi + 2\pi k)), \qquad k \in Z$$

$$\textit{тогда} \qquad 3\varphi = \pi + 2\pi k$$

$$\varphi = \frac{\pi + 2\pi k}{3}, \qquad k \in Z$$

$$r^3 = 8$$

$$r = 2$$

$$x = 2 \cdot (\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}), \qquad k \in Z$$

$$k = 0,1,2\ldots$$

$$x_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3} \cdot i$$

$$x_2 = 2(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})) = -2$$

$$x_3 = 2(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3})) = 1 - \sqrt{3} \cdot i$$

Свойства сложения и умножения

Переместительное свойство:

$z_1 + z_2 = z_1 + z_2$ $\qquad$ $z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2$

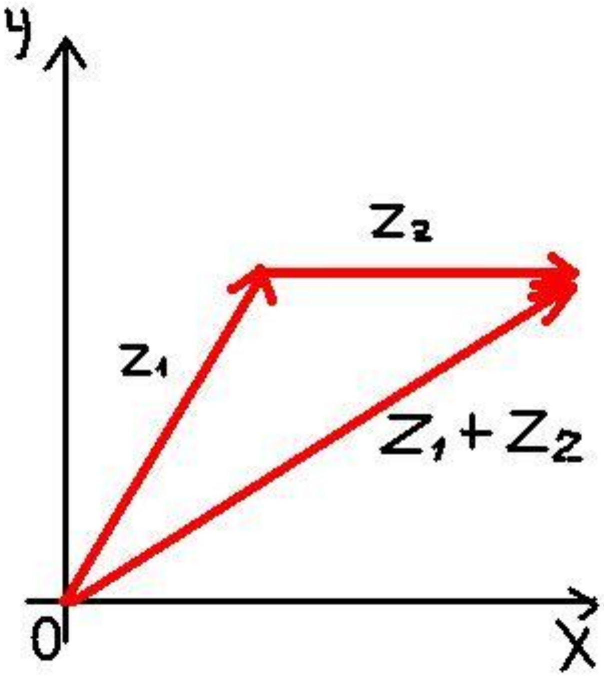
Сочетательное свойство:

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ $\qquad$ $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

Распределительные свойство:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Геометрическое изображение суммы комплексных чисел



Вычитание и деление комплексных чисел

Вычитание – операция, обратная сложению:

$Z + Z_2 = Z_1$

$Z + Z_2 + (-Z_2) = Z_1 + (-Z_2)$

$Z = Z_1 - Z_2$ –**разность**

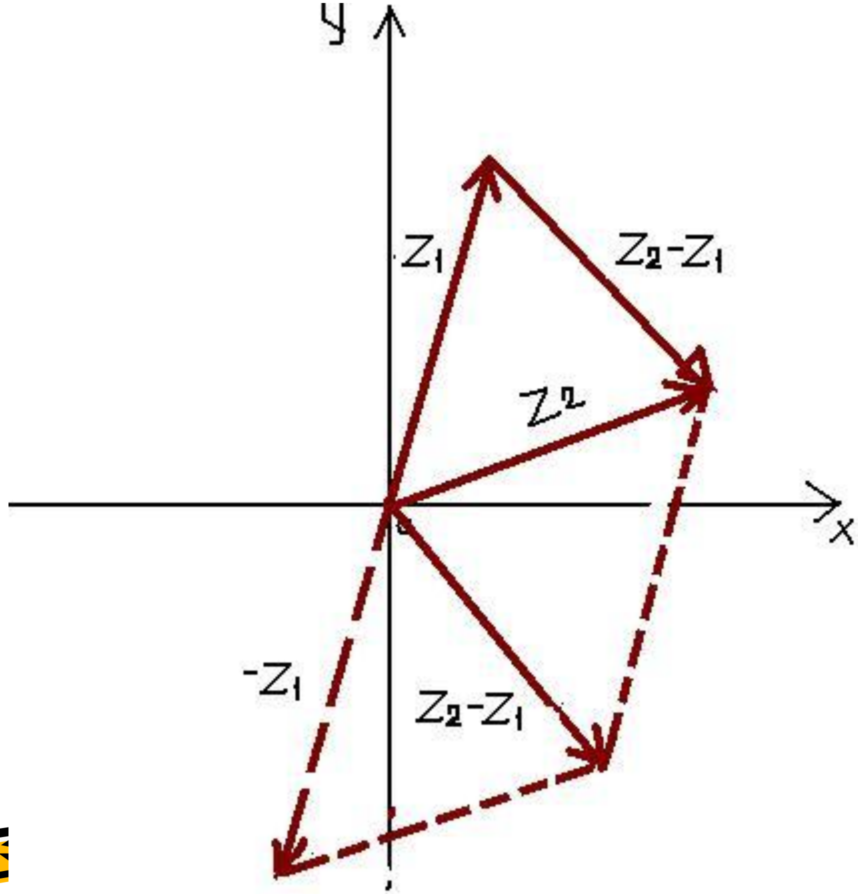
Деление – операция, обратная умножению:

$Z \cdot Z_2 = Z_1$

Разделив обе части на Z_2 получим:

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} \quad Z_2 \neq 0$$

Геометрическое изображение разности комплексных чисел



Примеры:

Найти разность и частное комплексных чисел $Z_1 = 4 + 5i \quad и \quad Z_2 = 3 + 4i$

Решение:

$$Z_2 - Z_1 = (3 + 4i) - (4 + 5i) = -1 - i$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{16 + 25} + i\frac{4 \cdot 4 - 3 \cdot 5}{16 + 25} = \frac{32}{41} + \frac{1}{41}i$$

Литература

- Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др/ Алгебра и начала анализа 10-11кл, Просвещение 2005г,
- Колмагоров А.Н., Абрамов, Дудицин/ Алгебра и начала анализа 10-11кл, Просвещение 2005г
- НикольскийС.М., Потапов Н.К, и др. Алгебра и начала анализа 10-11кл, Просвещение 2005г