Методы решения тригонометрических уравнений.

Учитель математики Жихарева Е. Н.
МКОУ «Гоношихинская СОШ»

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком тригонометрической функции, называется *тригонометрическим*.

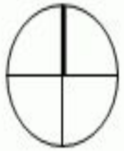
- Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: *преобразование уравнения* для получения его простейшего вида и *решение* полученного простейшего тригонометрического уравнения.
- <u>Методы решения тригонометрических уравнений:</u>
- *1 Алгебраический метод* (метод замены переменной и подстановки).
- *2. Разложение на множители.*
- *3. Приведение к однородному уравнению.*
- *4. Переход к половинному углу.*
- *5. Введение вспомогательного угла.*
- *6. Преобразование произведения в сумму.*
- *7. Универсальная подстановка.*

Простейшие тригонометрические уравнения.

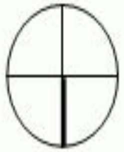
$\sin x = a$.

1). $\sin x = 0$, $x = \pi k$, k – любое целое число;

2). $\sin x = 1$, $x = \pi / 2 + 2\pi k$, k – любое целое число;



3). $\sin x = -1$, $x = -\pi / 2 + 2\pi k$, k – любое целое число;

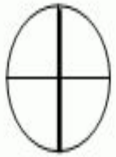


4). $\sin x = a$, $|a| > 1$, здесь нет решений;

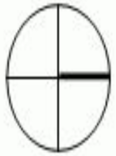
5). $\sin x = a$, $|a| \le 1$, $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k$, k – любое целое число.

$\cos x = a$.

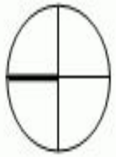
1). $\cos x = 0$, $x = \pi / 2 + \pi k$, k – любое целое число;



2). $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, k – любое целое число;



3). $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi k$, k – любое целое число;



4). $\cos x = a$, $|a| > 1$, здесь нет решений;

5). $\cos x = a$, $|a| \le 1$, $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, k – любое целое число.

Простейшие тригонометрические уравнения.

$$\tan x = a\,.$$

1). $\tan x = 0\,,\quad x = \pi k,\quad k$ – любое целое число;

2). $\tan x = a\,,\quad x = \arctan a + \pi k,\quad k$ – любое целое число.

$$\cot x = a\,.$$

1). $\cot x = 0\,,\quad x = \pi / 2 + \pi k,\quad k$ – любое целое число;

2). $\cot x = a\,,\quad x = \operatorname{arccot} a + \pi k,\quad k$ – любое целое число.

1. *Алгебраический метод* (метод замены переменной и подстановки).

Пример. Решить уравнение: $2\cos^2(x+\pi/6)-3\sin(\pi/3-x)+1=0$.

Решение. Используя формулы приведения, имеем:

$$2\cos^2(x+\pi/6)-3\cos(x+\pi/6)+1=0,$$

делаем замену: $\cos(x+\pi/6)=y$, тогда $2y^2-3y+1=0$,

находим корни: $y_1=1$, $y_2=1/2$, откуда следуют два случая:

1). $\cos(x+\pi/6)=1$, 2). $\cos(x+\pi/6)=1/2$,

$x+\pi/6=2\pi k$, $x+\pi/6=\pm\arccos(1/2)+2\pi n$,

$x_1=-\pi/6+2\pi k$; $x_2=\pm\pi/3-\pi/6+2\pi n$.

2. Разложение на множители.

- П р и м е р 1. Решить уравнение: sin *x* + cos *x* = 1 .
- Р е ш е н и е . Перенесём все члены уравнения влево:
  sin *x* + cos *x* – 1 = 0 , преобразуем и разложим на множители выражение в левой части уравнения:

$$\sin x - 2\sin^2(x/2) = 0,$$

$$2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2) - 2\sin^2(x/2) = 0,$$

$$2\sin(x/2)\cdot[\cos(x/2) - \sin(x/2)] = 0,$$

1). $\sin(x/2) = 0,$

$x/2 = \pi k,$

$x_1 = 2\pi k;$

2). $\cos(x/2) - \sin(x/2) = 0,$

$\tan(x/2) = 1,$

$x/2 = \arctan 1 + \pi n,$

$x/2 = \pi/4 + \pi n,$

$x_2 = \pi/2 + 2\pi n.$

П р и м е р 2.
Решить уравнение: $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 1$.

- Р е ш е н и е. $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$,
- $\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0$,
- $\sin x \cdot (\cos x - \sin x) = 0$,

1). $\sin x = 0$,

$x_1 = \pi k$;

2). $\cos x - \sin x = 0$,

$\tan x = 1$,

$x_2 = \pi / 4 + \pi n$,

3. Приведение к однородному уравнению.

- **Уравнение называется *однородным относительно* <u>sin</u> *и* <u>cos</u>, *если все его члены одной и той же степени относительно* <u>sin</u> *и* <u>cos</u> *одного и того же угла*.**
- <u>Чтобы решить однородное уравнение, надо:</u>
- *а*) перенести все его члены в левую часть;
- *б*) вынести все общие множители за скобки;
- *в*) приравнять все множители и скобки нулю;
- *г*) скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на
- <u>cos</u> (или <u>sin</u>) в старшей степени;
- *д*) решить полученное алгебраическое уравнение относительно <u>tan</u> .

Решить уравнение:
$3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2.$

- Р е ш е н и е . $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,
- $\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$,
- $\tan^2 x + 4\tan x + 3 = 0$, отсюда $y^2 + 4y + 3 = 0$,
- корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, отсюда
- 1) $\tan x = -1$, 2) $\tan x = -3$,

$$x_1 = -\pi/4 + \pi k; \qquad x_2 = -\arctan 3 + \pi n.$$

4. Переход к половинному углу.

- Решить уравнение: $3 \sin x - 5 \cos x = 7$.
- $6 \sin(x/2) \cdot \cos(x/2) - 5 \cos^2(x/2) + 5 \sin^2(x/2) = 7 \sin^2(x/2) + 7 \cos^2(x/2)$,
- $2 \sin^2(x/2) - 6 \sin(x/2) \cdot \cos(x/2) + 12 \cos^2(x/2) = 0$,
- $\tan^2(x/2) - 3 \tan(x/2) + 6 = 0$,
- . . . .

5. Введение вспомогательного угла.

- Рассмотрим уравнение вида: $a \sin x + b \cos x = c$,
- где a, b, c – коэффициенты; x – неизвестное.

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$ (корректно ли это?):

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\varphi}\sin x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\varphi}\cos x = \underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{C},$$

$$\cos\varphi \cdot \sin x + \sin\varphi \cdot \cos x = C,$$

или $$\sin(x+\varphi) = C,$$

и его решение: $x = (-1)^k \cdot \arcsin C - \varphi + \pi k$,

где $\varphi = \arccos \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Заметим, что введённые обозначения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ взаимно заменяемы.

П р и м е р. Решить уравнение: $\sqrt{3}\,\sin 3x - \cos 3x = 1$.

Р е ш е н и е. Здесь $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, поэтому делим обе части на $\sqrt{3+1} = 2$:

$$(\sqrt{3}/2)\cdot\sin 3x - (1/2)\cdot\cos 3x = 1/2,$$

$$\cos(\pi/6)\cdot\sin 3x - \sin(\pi/6)\cdot\cos 3x = 1/2,$$

$$\sin(3x - \pi/6) = 1/2,$$

отсюда, $x = (-1)^k\cdot\pi/18 + \pi/18 + \pi k/3$.

6. Преобразование произведения в сумму.

- П р и м е р . Решить уравнение: $2 \sin x \cdot \sin 3x = \cos 4x$.
- Р е ш е н и е . Преобразуем левую часть в сумму:

$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 4x ,$$

$$\cos 8x = 0 ,$$

$$8x = p / 2 + pk ,$$

$$x = p / 16 + pk / 8 .$$

7. Универсальная подстановка.

- П р и м е р . Решить уравнение: $3 \sin x - 4 \cos x = 3$.

Р е ш е н и е . Здесь возможны два случая:

1). $x \neq (2m+1)\pi$, тогда

$$3\,\frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} - 4\,\frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = 3,$$

$$6\tan(x/2) - 4 + 4\tan^2(x/2) = 3 + 3\tan^2(x/2),$$

$$\tan^2(x/2) + 6\tan(x/2) - 7 = 0,$$

делаем замену: $\tan(x/2) = u$, тогда $u^2 + 6u - 7 = 0$,

корни этого уравнения: $u_1 = -7$, $u_2 = 1$.

1а). $\tan(x/2) = -7$,

$x_1 = -2\arctan 7 + 2\pi k$;

1б). $\tan(x/2) = 1$,

$x_2 = \pi/2 + 2\pi n$.

2). $x = (2m+1)\pi$, тогда

$$3\sin[(2m+1)\pi] - 4\cos[(2m+1)\pi] = 4 \neq 3.$$

Таким образом, решение даёт только первый случай.

Проверка

Алгебраический метод (метод замены переменной и подстановки).	2
Разложение на множители.	4
Приведение к однородному уравнению.	1
Переход к половинному углу.	
Преобразование произведения в сумму.	5
Универсальная подстановка.	6
Введение вспомогательного угла.	3

Спасибо, за внимание!!!