



Кратные интегралы

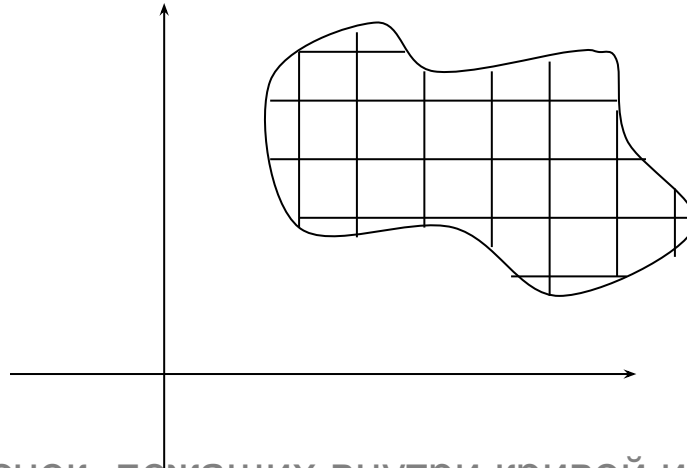
Как известно, интегрирование является процессом суммирования. Однако суммирование может производиться неоднократно, что приводит нас к понятию кратных интегралов.

Рассмотрение этого вопроса начнем с рассмотрения **двойных интегралов**.



Двойные интегралы.

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой $f(x, y) = 0$.



Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ . Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называться незамкнутой областью Δ .

С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.



Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i , а по оси y – на Δy_i . Вообще говоря, такой порядок разбиения необязателен, возможно разбиение области на частичные участки произвольной формы и размера.

Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. В каждой частичной области возьмем произвольную точку и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек области Δ . $P(x_i, y_i)$

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i , тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.



Определение

Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции $f(x, y)$ по области Δ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \iint f(x, y) dx dy$$

учетом того, что $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \Delta y_i \Delta x_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ , т.к. суммирование производится по двум переменным x и y .

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i , то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dy dx = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum_{\Delta} f(x, y) \Delta y \Delta x$$



Условия существования двойного интеграла

Сформулируем достаточные условия существования двойного интеграла

*Теорема. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области Δ , то двойной интеграл **существует**.*



Теорема

*Если функция $f(x, y)$ ограничена в замкнутой области Δ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно – гладких линий, то двойной интеграл **существует**.*



Свойства двойного интеграла.

$$1) \iint_{\Delta} [f_1(x, y) + f_2(x, y) - f_3(x, y)] dy dx = \iint_{\Delta} f_1(x, y) dy dx + \iint_{\Delta} f_2(x, y) dy dx - \iint_{\Delta} f_3(x, y) dy dx$$

$$2) \iint_{\Delta} k f(x, y) dy dx = k \iint_{\Delta} f(x, y) dy dx$$

$$3) \text{ Если } \Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \text{ то } \iint_{\Delta} f(x, y) dy dx = \iint_{\Delta_1} f(x, y) dy dx + \iint_{\Delta_2} f(x, y) dy dx$$

4) **Теорема о среднем.** Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования.

$$5) \text{ Если } f(x, y) \geq 0 \text{ в области } \Delta, \text{ то } \iint_{\Delta} f(x, y) dy dx = f(x_0, y_0) \cdot S$$

$$6) \text{ Если } f_1(x, y) \leq f_2(x, y), \text{ то } \iint_{\Delta} f_1(x, y) dy dx \leq \iint_{\Delta} f_2(x, y) dy dx$$

$$7) \left| \iint_{\Delta} f(x, y) dy dx \right| \leq \iint_{\Delta} |f(x, y)| dy dx \quad \iint_{\Delta} f_1(x, y) dy dx \leq \iint_{\Delta} f_2(x, y) dy dx$$



Вычисление двойного интеграла

Теорема

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области Δ , ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, ($a < b$), $y = \phi(x)$, $y = \psi(x)$, где ϕ и ψ - непрерывные функции и $\phi \leq \psi$, тогда

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$



Теорема.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области Δ , ограниченной линиями $y = c$, $y = d$ ($c < d$), $x = \Phi(y)$, $x = \Psi(y)$ ($\Phi(y) \leq \Psi(y)$), то

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x, y) dx$$



Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим двойной интеграл вида $\iint_{\Delta} F(x, y) dy dx$, где переменная x изменяется в пределах от a до b , а переменная y от $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$

Положим $x = f(u, v)$ $y = \varphi(u, v)$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv ; dy = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv$$
$$\iint_{\Delta} F(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x, y) dy$$



т.к. при первом интегрировании
переменная x принимается за

постоянную, то $dx = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = 0 \quad du = -\frac{\partial f / \partial v}{\partial f / \partial u} \cdot dv$$

подставляя это выражение в записанное
выше соотношение для dy , получаем:

$$dy = -\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial f / \partial v}{\partial f / \partial u} dv + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u}} \cdot dv$$



Выражение называется **определителем Якоби** или **Якобианом** функций $f(u, v)$ $\varphi(u, v)$
(Якоби Карл Густав Якоб – (1804-1851) – немецкий математик)

Тогда

$$\iint_{\Delta} F(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} F(f(x, y), \varphi(x, y)) \cdot \frac{|j|}{\partial f / \partial u} dv$$

Т.к. при первом интегрировании приведенное выше выражение для dx принимает вид (при первом интегрировании полагаем $v = const, dv = 0$), то при изменении порядка интегрирования, получаем соотношение:

$$\iint_{\Delta} F(x, y) dy dx = \int_{V_1}^{V_2} dv \int_{\Theta_1(v)}^{\Theta_2(v)} F(f(u, v), \varphi(u, v)) \cdot |j| \cdot du$$



Двойной интеграл в полярных координатах.

Воспользуемся формулой замены переменных:

$$\iint_{\Delta} F(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} F(f(u, v), \varphi(u, v)) |i| du dv$$

При этом известно, что
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

В этом случае Якобиан имеет вид:

$$|i| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho$$

Тогда

$$\iint_{\Delta} F(x, y) dx dy = \iint_{\tau} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \iint_{\tau} f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta$$

Здесь τ - новая область значений,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$$