

**Квадратный трехчлен.**

**Квадратичная функция.**

*Разработано учителем математики*

**МОУ «СОШ» п. Аджером  
Корткеросского района Республики Коми**

*Мишариной Альбиной Геннадьевной*

**Разложение квадратного  
трехчлена на множители.**

(8 класс)



*Разработано учителем математики*

*МОУ «СОШ» п. Аджером*

*Корткеросского района Республики Коми*

*Мишариной Альбиной Геннадьевной*

***А. Нивен***

**Математику нельзя изучать,  
наблюдая  
как это делает сосед.**

***А. Нивен***



# Содержание

- Квадратный трехчлен
- Квадратичная функция
- Квадратные уравнения
- Разложение квадратного трёхчлена на множители



# ***КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН***



# Определение

Многочлен  $ax^2+bx+c$ , где  $a, b, c$  – числа (коэффициенты), причем  $a \neq 0$  называется **квадратным трехчленом**

**Причем:**  $a$  – старший коэффициент,  
 $b$  – второй коэффициент  
 $c$  – свободный член



# Назовите коэффициенты

1)  $2x^2 - 6x + 1$

2)  $-2x^2 + 8x - 5$

3)  $3x^2 + 2x$

4)  $x^2 - 4x + 7$

5)  $-x^2 - 8$

6)  $6x^2 - x - 2$

1)  $a = 2; b = -6; c = 1$

2)  $a = -2; b = 8; c = -5$

3)  $a = 3; b = 2; c = 0$

4)  $a = 1; b = -4; c = 7$

5)  $a = -1; b = 0; c = -8$

6)  $a = 6; b = -1; c = -2$



# ***КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ***



# Запомним

- Функция  $y = ax^2 + bx + c$ , где  $a, b, c$  – произвольные числа, причем  $a \neq 0$  называется **квадратичной**.
- Графиком квадратичной функции является **парабола**



# Запомним

## Запомним

- Ветви параболы  $y = ax^2 + bx + c$  направлены **вверх, если  $a > 0$** , и **вниз если  $a < 0$**
- Как найти координаты вершины параболы?
  - абсцисса  $x_0$  вершины параболы вычисляется по формуле  $x_0 = -b/2a$
  - ордината  $y_0$  вершины параболы вычисляется подстановкой найденной  $x_0$  в заданную функцию
- Осью симметрии параболы является прямая  $x = -b/2a$



# Найти координаты вершины параболы, её ось симметрии и построить её

1)  $y = 2x^2 - 8x + 1$

2)  $y = -2x^2 + 16x - 5$

1) Т.к.  $a = 2$ ;  $b = -8$ ;  $c = 1$

то  $x_0 = 8 : (2 \cdot 2) = 2$

$$y_0 = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 1 = -7$$

Значит: (2; -7) координаты  
вершины, а ось симметрии  
параболы:  $x = 2$

2) Т.к.  $a = -2$ ;  $b = 16$ ;  $c = -5$

то  $x_0 = -16 : (2 \cdot (-2)) = 4$

$$y_0 = -2 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 - 5 = 27$$

Значит: (4; 27) координаты  
вершины; ось симметрии:  
 $x = 4$



# Самостоятельно: вычислить координаты

## вершины параболы

1)  $y = x^2 + 4x + 5$

2)  $y = 2x^2 + 4x$

3)  $y = -3x^2 + 6x + 1$

4)  $y = 3x^2 - 12x$

5)  $y = x^2 + 6x - 2$

6)  $y = -2x^2 + 8x - 5$

7)  $y = -4x^2 - 8x$

Проверим:

1)  $(-2; 1)$

2)  $(-1; -2)$

3)  $(1; 4)$

4)  $(2; -12)$

5)  $(-3; -11)$

6)  $(2; 3)$

7)  $(-1; 4)$



# Рефлексия

- 1) Сегодня на уроке я запомнил...
- 2) Сегодня на уроке я научился...
- 3) Сегодня на уроке я узнал ...
- 4) Сегодня на уроке я выучил...
- 5) Сегодня на уроке было интересно ...
- 6) Сегодня на уроке мне понравилось ...



# ***Квадратные уравнения***



# Содержание

- Определение квадратного уравнения
- Классификация квадратных уравнений
- Способы решения квадратного уравнения



# Определение

Квадратным уравнением

называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0,$$

где  $x$  - переменная,

$a, b, c$  – любые действительные числа, причем  $a \neq 0$ . (Почему?)

**Причем:**  $a$  – старший коэффициент

$b$  - второй коэффициент

$c$  – свободный член



# Классификация

Квадратные уравнения.

неполное

$$b = 0; \quad x^2 + c = 0$$

$$c = 0; \quad ax^2 + bx = 0$$

$$b = 0; \quad c = 0; \quad ax^2 = 0$$

полное

$$ax^2 + b x + c = 0, \quad a \neq 0$$

приведённое

$$x^2 + p x + q = 0, \quad a=1$$



# Запомним

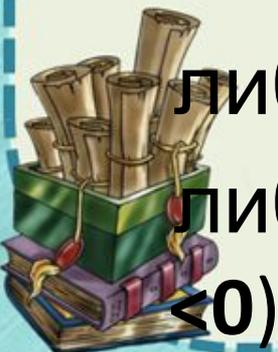
***Решить квадратное***

***уравнение*** – это значит найти все его корни или установить, что их нет.

Причем: квадратное уравнение может иметь либо 2 корня (если  $D > 0$ ),

либо 1 корень (если  $D = 0$ ),

либо вообще не иметь корней (если  $D < 0$ )



# Способы решения полного квадратного уравнения

- Разложением на множители
- Выделением полного квадрата
- По формуле корней (универсальный способ)
- По теореме Виета
- По коэффициентам
- Графический
- Введение новой переменной



# Разложение левой части на множители

$$8x^2 + 10x + 3 = 0,$$

$$8x^2 + 4x + 6x + 3 = 0,$$

$$4x(2x + 1) + 3(2x + 1) = 0,$$

$$(2x + 1)(4x + 3) = 0,$$

$$2x + 1 = 0; 4x + 3 = 0,$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = -\frac{3}{4}.$$



# Выделение полного квадрата

Вспомним:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Например:  $x^2 + 6x - 7 = 0$ .

Решение:  $x^2 + 6x - 7 = 0$ .

$$x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 9 - 9 - 7 = 0$$

$$(x^2 + 6x + 9) - 9 - 7 = 0$$

$$(x + 3)^2 - 16 = 0.$$

$$(x + 3)^2 = 16.$$

Значит:  $x + 3 = 4$  и  $x + 3 = -4$ .

$$x = 1 \quad x = -7.$$

Ответ: 1; -7.



# Алгоритм решения квадратного уравнения ПО ФОРМУЛЕ КОРНЕЙ

1) Найти число, называемое **дискриминантом** квадратного уравнения

и равное  $D = b^2 - 4ac$ .

2) **Дискриминант** показывает сколько корней имеет уравнение

если  $D < 0$ , то данное квадратное уравнение **не имеет корней**;



# Запомним

- если  $D=0$ , то данное квадратное уравнение имеет единственный корень, который равен

$$x = -\frac{b}{2a}$$

- если  $D>0$ , то данное квадратное уравнение имеет два корня, которые равны

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$



# Решить уравнение $2x^2 - 5x + 2 = 0$

Здесь  $a = 2$ ,  $b = -5$ ,  $c = 2$ .

Имеем  $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$ .

Так как  $D=9 > 0$ , то уравнение имеет два корня.

Найдем их по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

$$x_1 = \frac{5+3}{2 \cdot 2} = 2 \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{5-3}{2 \cdot 2} = 0,5,$$

то есть  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 0,5$  - корни заданного уравнения.



# Решить самостоятельно

✓  $x^2 - 2x + 1 = 0.$

✓  $2x^2 - 3x + 5 = 0.$

Проверим

1 уравнение:

получили один корень  
 $x = 1$ , т.к.  $D = 0$

Проверим

2 уравнение:

уравнение

не имеет  
действительных  
корней, т.к.  $D < 0$



# Работаем в парах

1) Выберите квадратные уравнения и определите значения их коэффициентов:

А)  $2x^2 - 8 = 0$ ;

Б)  $-x^2 + 4x + 1 = 0$ ;

В)  $3x^3 + 2x - 9 = 0$ ;

Г)  $5x - 3x^2 + 2 = 0$ ;

Д)  $x - 3 = 0$ ;

Е)  $3 - 5x^2 - x = 0$ ;

Ж)  $x^2 - x = 0$ .

И)  $x^2 + 5 - 2x = 0$

2) По коэффициентам указать приведенные уравнения.

3) Из квадратных уравнений выбрать неполные и решить их.



# Проверим

## 1) Квадратные уравнения:

А)  $2x^2 - 8 = 0$ , где  $a=2$ ;  $b=0$ ;  $c=-8$

Б)  $-x^2 + 4x + 1 = 0$ , где  $a=-1$ ;  $b=4$ ;  $c=1$

Г)  $5x - 3x^2 + 2 = 0$ , где  $a=-3$ ;  $b=5$ ;  $c=2$

Е)  $3 - 5x^2 - x = 0$ , где  $a=-5$ ;  $b=-1$ ;  $c=3$

Ж)  $x^2 - x = 0$ , где  $a=1$ ;  $b=-1$ ;  $c=0$

И)  $x^2 + 5 - 2x = 0$ , где  $a=1$ ;  $b=-2$ ;  $c=5$



# Проверим

2) Приведенные квадратные уравнения:

$$\text{И) } x^2 + 5 - 2x = 0$$

3) Неполные квадратные уравнения:

$$\text{А) } 2x^2 - 8 = 0 \quad \text{и} \quad \text{Ж) } x^2 - x = 0$$

Решения:  $2x^2 - 8 = 0$  и  $x^2 - x = 0$

$$2(x^2 - 4) = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$2 \neq 0; x^2 - 4 = 0$$

$$x = 0; x - 1 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 0; x = 1$$

$$x = \pm 2$$



# Рефлексия

- 1) Сегодня на уроке я запомнил...
- 2) Сегодня на уроке я научился...
- 3) Сегодня на уроке я узнал ...
- 4) Сегодня на уроке я выучил...
- 5) Сегодня на уроке было интересно ...
- 6) Сегодня на уроке мне понравилось ...



# Пример решения квадратного уравнения

Дано уравнение:  $3x^2 + 9 = 12x - x^2$

Решение:  $3x^2 + 9 - 12x + x^2 = 0$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{-12}{8} = \frac{3}{2}$$

Ответ:  $x = \frac{3}{2}$



# Самостоятельная работа

(по вариантам)

$$(a + 3)(a - 2) = -6;$$

$$(y + 8)(y - 1) = 7y + 1.$$

$$(x - 8)(x + 5) = -40;$$

$$(x - 8)(x + 2) = -6x.$$



# Проверь решение

$$(y + 8)(y - 1) = 7y + 1;$$

$$y^2 + 8y - y - 8 = 7y + 1;$$

$$y^2 = 9;$$

$$y = -3 \text{ или } y = 3;$$

*Ответ: -3; 3.*

$$(x - 8)(x + 2) = -6x;$$

$$x^2 - 8x + 2x - 16 = -6x;$$

$$x^2 = 16;$$

$$x = -4 \text{ или } x = 4;$$

*Ответ: -4; 4.*



# Проверь решение

$$(a + 3)(a - 2) = -6;$$

$$a^2 + 3a - 2a - 6 = -6;$$

$$a^2 + a = 0;$$

$$a(a + 1) = 0;$$

$$a = 0 \text{ или } a = -1;$$

*Ответ : -1; 0.*

$$(x - 8)(x + 5) = -40;$$

$$x^2 - 8x + 5x - 40 = -40;$$

$$x^2 - 3x = 0;$$

$$x(x - 3) = 0;$$

$$x = 0 \text{ или } x = 3;$$

*Ответ : 0; 3.*



# Рефлексия

- 1) Сегодня на уроке я запомнил...
- 2) Сегодня на уроке я научился...
- 3) Сегодня на уроке я узнал ...
- 4) Сегодня на уроке я выучил...
- 5) Сегодня на уроке было интересно ...
- 6) Сегодня на уроке мне понравилось ...



**Запомни:** по теореме Виета решаются только приведенные квадратные уравнения

**Теорема Виета:** Если корни  $x_1$  и  $x_2$  приведённого квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$ , то  $x_1 + x_2 = -p$ , а  $x_1 \cdot x_2 = q$ .

**Обратное утверждение:** Если числа  $m$  и  $n$  таковы, что  $m + n = -p$ ,  $m \cdot n = q$ , то эти числа являются корнями уравнения  $x^2 + px + q = 0$ .

**Обобщённая теорема:** Числа  $x_1$  и  $x_2$  являются корнями приведённого квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$  тогда и только тогда, когда  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 \cdot x_2 = q$ .



# НАПРИМЕР

Дано приведённое квадратное уравнение

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Решение: методом подбора проверим числа 2 и 5. Их произведение равно **10** (т.е. свободному члену уравнения), а их сумма равна **7**, (т.е. второму коэффициенту уравнения, но с противоположным знаком)

Значит эти числа и являются корнями данного уравнения.

Ответ: **2 и 5**



# Решить

Решаем вместе:

1)  $x^2 - 15x + 14 = 0$

2)  $x^2 + 3x - 4 = 0$

3)  $x^2 - 10x - 11 = 0$

4)  $x^2 + 8x - 9 = 0$

Решить

самостоятельно

в парах:

1)  $x^2 + 8x + 7 = 0$

2)  $x^2 - 19x + 18 = 0$

3)  $x^2 - 9x - 10 = 0$

4)  $x^2 + 9x + 20 = 0$



# Проверим ответы

1)  $x_1 = -1$       $x_2 = -7$

2)  $x_1 = 1$       $x_2 = 18$

3)  $x_1 = -1$       $x_2 = 10$

4)  $x_1 = -4$       $x_2 = -5$



# *Рефлексия*

- 1) Сегодня на уроке я запомнил...
- 2) Сегодня на уроке я научился...
- 3) Сегодня на уроке я узнал ...
- 4) Сегодня на уроке я выучил...
- 5) Сегодня на уроке было интересно ...
- 6) Сегодня на уроке мне понравилось ...



# Решение квадратных уравнений по коэффициентам

1) Если сумма коэффициентов  
равна 0, т.е.  $a + b + c = 0$ , то  $x_1 = 1$   
 $x_2 = c/a$ .

2) Если  $a - b + c = 0$ , то  $x_1 = -1$   $x_2 = -$   
 $c/a$ .

3) Если  $a = c$ ,  $b = (a^2 + 1)$ , то  
 $x_1 = -a = -c$   $x_2 = -1/a = -1/c$ .

4) Если  $a = c$ ,  $b = -(a^2 + 1)$ , то  
 $x_1 = a = c$   $x_2 = 1/a = 1/c$



# Решаем вместе

1)  $2x^2 - 5x + 3 = 0$

Т.к.  $a+b+c =$   
 $= 2 - 5 + 3 = 0,$

то  $x_1 = 1,$

$x_2 = 3:2 = 3/2 = 1,5$

Ответ: 1; 1,5

2)  $3x^2 + 8x + 5 = 0$

Т.к.  $a-b+c =$   
 $= 3 - 8 + 5 = 0,$

то  $x_1 = -1,$

$x_2 = -5:3 = -5/3$

Ответ: -1; -5/3



# Решаем вместе

3)  $-4x^2 + 17x - 4 = 0$

Т.к.  $a = c$  и  $b =$   
 $(a^2+1)$ ,

то  $x_1 = -a = 4$ ,

$x_2 = -1/a = -1/4$

4)  $8x^2 - 67x + 8 = 0$

Т.к.  $a = c$  и  $b =$   
 $-(a^2+1)$ ,

то  $x_1 = a = 8$ ,

$x_2 = 1/a = 1/8$

Ответ: 4; -0,25

Ответ: 8; 1/8



# Решить самостоятельно по группам

1)  $3x^2 + 4x + 1 = 0,$

2)  $5x^2 - 4x - 9 = 0,$

3)  $6x^2 + 37x + 6 = 0,$

4)  $7x^2 + 2x - 5 = 0,$

5)  $13x^2 - 18x + 5 = 0,$

6)  $5x^2 + x - 6 = 0,$

7)  $7x^2 - 50x + 7 = 0,$

8)  $6x^2 - 37x + 6 = 0,$

9)  $7x^2 + 50x + 7 = 0.$



# Проверим

$$\text{№1} \quad x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3};$$

$$\text{№2} \quad x_1 = -1, x_2 = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5};$$

$$\text{№3} \quad x_1 = -6, x_2 = -\frac{1}{6};$$



# Проверим

$$\text{№4 } x_1 = -1, x_2 = \frac{5}{7};$$

$$\text{№5 } x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{13};$$

$$\text{№6 } x_1 = 1, x_2 = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5};$$



# Проверим

$$\text{№7 } x_1 = -7, x_2 = -\frac{1}{7};$$

$$\text{№8 } x_1 = -6, x_2 = -\frac{1}{6};$$

$$\text{№9 } x_1 = -7, x_2 = -\frac{1}{7}.$$



# Рефлексия

- 1) Сегодня на уроке я запомнил...
- 2) Сегодня на уроке я научился...
- 3) Сегодня на уроке я узнал ...
- 4) Сегодня на уроке я выучил...
- 5) Сегодня на уроке было интересно ...
- 6) Сегодня на уроке мне понравилось ...



# Решим графически уравнение

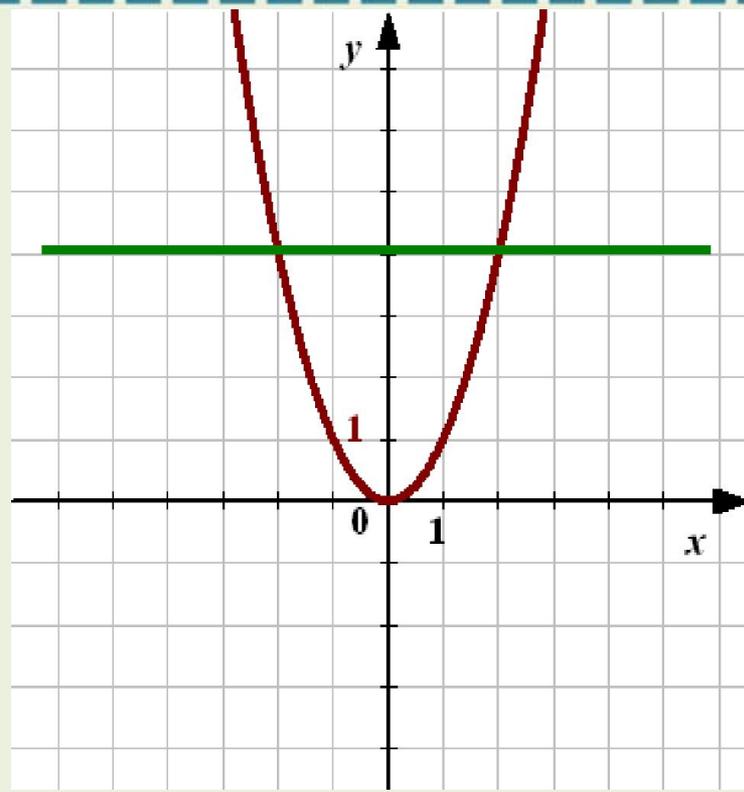
$$x^2 - 4 = 0$$

Решение:  $x^2 - 4 = 0$   
преобразуем

$$x^2 = 4$$

Пусть  $y_1 = x^2$  и  $y_2 = 4$

Построим эти графики  
в одной  
координатной  
плоскости



Ответ:  $x = -2; x = 2$



# Решить графически уравнения по вариантам

## 1 вариант

1)  $x^2 + 2x - 3 = 0$

2)  $-x^2 + 6x - 5 = 0$

3)  $2x^2 - 3x + 1 = 0$

## 2 вариант

1)  $x^2 - 4x + 3 = 0$

2)  $-x^2 - 3x + 4 = 0$

3)  $2x^2 - 5x + 2 = 0$



# Рефлексия

- 1) Сегодня на уроке я запомнил...
- 2) Сегодня на уроке я научился...
- 3) Сегодня на уроке я узнал ...
- 4) Сегодня на уроке я выучил...
- 5) Сегодня на уроке было интересно ...
- 6) Сегодня на уроке мне понравилось ...



# Введение новой переменной

**Умение удачно ввести новую переменную – облегчает решение**

**Например:** надо решить уравнение  $(2x+3)^2 = 3(2x+3) - 2$ .

Решение: пусть:  $a = 2x + 3$ .

Произведем замену переменной:  $a^2 = 3a - 2$ .

Тогда получим уравнение  $a^2 - 3a + 2 = 0$  и у него  $D > 0$ .

Решим квадратное уравнение и получим:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ .

Произведем обратную замену и вернемся к переменной

**x:**

1). если  $a_1 = 1$ , то  $2x + 3 = 1$  и тогда  $x_1 = -1$ ;

2). если  $a_2 = 2$ , то  $2x + 3 = 2$  и тогда  $x_2 = -0,5$

**Ответ:**  $-1; -0,5$ .



# Решить самостоятельно в парах

а)  $(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = 0;$

б)  $(2x - 1)^4 - (2x - 1)^2 - 12 = 0$

Проверим ответы:

а)

б)



# Рефлексия

- 1) Сегодня на уроке я запомнил...
- 2) Сегодня на уроке я научился...
- 3) Сегодня на уроке я узнал ...
- 4) Сегодня на уроке я выучил...
- 5) Сегодня на уроке было интересно ...
- 6) Сегодня на уроке мне понравилось ...



**Разложение  
квадратного  
трехчлена  
на множители**



# Запомнить

Если квадратное уравнение  $ax^2+bx+c=0$  имеет корни  $x_1$  и  $x_2$ , то квадратный трехчлен  $ax^2+bx+c$ , раскладывается на множители следующим образом:

$$ax^2+bx+c = a \cdot (x - x_1)(x - x_2).$$



# Разложите квадратный трехчлен на множители

## 1 вариант

1)  $x^2 - 11x + 24$

2)  $x^2 + 7x + 12$

3)  $-x^2 - 8x + 9$

4)  $3x^2 + 5x - 2$

5)  $-5x^2 + 6x - 1$

## 2 вариант

1)  $x^2 - 2x - 15$

2)  $x^2 + 3x - 10$

3)  $-x^2 + 5x - 6$

4)  $5x^2 + 2x - 3$

5)  $-2x^2 + 9x - 4$



# Проверим

## 1 вариант

1)  $(x-8)(x-3)$

2)  $(x+3)(x+4)$

3)  $-(x-1)(x+9)$

4)  $3 \cdot (x-1/6)(x+13/6)$

5)  $-5 \cdot (x-1)(x-0,2)$

## 2 вариант

1)  $(x-5)(x+3)$

2)  $(x-2)(x+5)$

3)  $-(x-2)(x-3)$

4)  $5 \cdot (x+1)(x-0,6)$

5)  $-2 \cdot (x-1/2)(x-4)$



# *Рефлексия*

- Сегодня на уроке я запомнил...
- Сегодня на уроке я научился...
- Сегодня на уроке я узнал ...
- Сегодня на уроке я выучил...
- Сегодня на уроке было интересно ...
- Сегодня на уроке мне понравилось ...



# Источники

- А.Г. Мордкович, Алгебра 8 класс, М., Мнемозина, 2007
- А.Н. Рурукин и др., Поурочные разработки по алгебре 8 класс, М., Вако, 2011



<http://www.avazun.ru/photoframes/&sort=&p=10>

<http://s59.radikal.ru/i163/0811/73/ad11fb505124.png>

