

*И
О
П
МИФИ*

***Дискретная математика.
Математическая логика***

Лекция 2. Бинарные отношения и свойства

2008 г.

*Проф., д.т.н. Гусева А.И. ,
доцент Порешин П.П.,
аспирант Цыплаков А.С.*

Бинарное отношение

Бинарным отношением $T(M)$ на множестве M называется подмножество $M^2 = M \times M$, $T(M) \subseteq M^2$

Инфиксная форма записи бинарного отношения

$$a T b = \{(a, b) / (a, b) \in T \subseteq M \times M\}$$

Виды бинарных отношений

Обратное отношение

$$R^{-1} = \{(x, y) / (y, x) \in R\}$$

Дополнительное отношение

$$\bar{R} = \{(x, y) / (x, y) \notin R\}$$

Тождественное отношение

$$U = \{(x, x) / x \in M\}$$

Универсальное отношение

$$I = \{(x, M) / x \in M \quad _ \quad _ \quad \in \quad \}$$

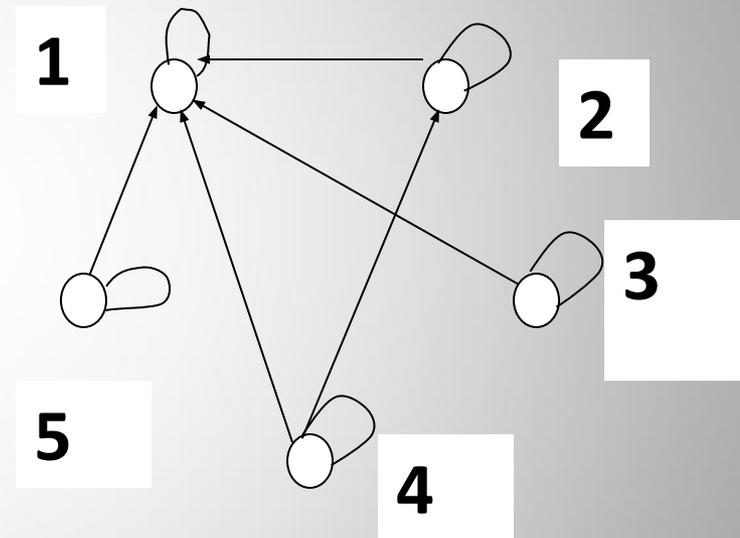
Способы задания бинарных отношений

- Перечислением, как множество пар
- Графически, когда каждый элемент x множества M представляется вершиной, а пара представляется дугой из x в y
- Матричным способом, с помощью матрицы смежности или матрицы инцидентий
- Фактор-множеством

Пример

Матрица смежности

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	0	1	0	0
4	1	1	0	1	0
5	1	0	0	0	1



Графическое задание

Фактор-множество

Фактор-множество R/M множества M по отношению к R называется множеством окрестностей единичного радиуса для всех элементов M при заданном R

$$R/M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \{1\} & \{1, 2\} & \{1, 3\} & \{1, 2, 4\} & \{1, 5\} \end{bmatrix}$$

Функция

$F = X \times Y$ называется **функцией**, если для каждого элемента x найдется не более одного элемента y такого, что $(x, y) \in F$, т.е. выполняется свойство однозначности полученного результата

Множество X - область определения функции, и множество Y - область значений функции

X и Y могут не иметь общих элементов

Инъекция

Функция $F: X \rightarrow Y$ называется **инъективной, или инъекцией, или вложением**, если она переводит разные элементы X в разные Y , то есть

$$\forall x \in X, \forall z \in X, x \neq z \rightarrow F(x) \neq F(z) \quad ()$$

Сюръекция

Функция $F: X \rightarrow Y$ называется *сюръективной, или сюръекцией, или наложением*, если множество ее значений есть все Y , т.е.

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X, \quad y = F(x)$$

Биекция

Функция $F: X \rightarrow Y$ называется **биекцией** или **взаимно однозначным соответствием**, если она одновременно является инъекцией и сюръекцией (вложением и наложением)

Операция

Частным случаем функции является *операция* O

В этом случае область значения X и область определения Y совпадают, т.е

$$O \subseteq M^2, \forall x \in M \exists! y, (x, y) \in O$$

Рефлексивность

Бинарное отношение $T(M)$ называется **рефлексивным** тогда и только тогда, когда для каждого элемента пара (x, x) принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall x \in M _ \exists (x, x) \in T(M)$$

Бинарное отношение $T(M)$ называется **иррефлексивным** тогда и только тогда, когда для каждого элемента пара (x, x) не принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall x \in M _ (x, x) \notin T(M)$$

Рефлексивность

Если бинарное отношение $T(M)$ не обладает ни свойством рефлексивности, ни свойством иррефлексивности, то оно является *нерефлексивным*

Симметричность

Бинарное отношение $T(M)$ называется **симметричным** тогда и только тогда, когда для каждой пары (x, y) из T , обратная пара (y, x) также принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall (x, y) \in T(M) _ \exists (y, x) \in T(M)$$

Бинарное отношение $T(M)$ называется **антисимметричным** тогда и только тогда, когда для каждой пары различных элементов (x, y) из T пара (y, x) не принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall (x, y) \in T(M) _ (y, x) \notin T(M)$$

Симметричность

Если бинарное отношение $T(M)$ не обладает ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности, то оно является ***несимметричным***

Транзитивность

Бинарное отношение $T(M)$ называется **транзитивным** тогда и только тогда, когда для **каждых** двух пар элементов (x, y) и (y, z) , принадлежащих бинарному отношению, пара (x, z) также принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall (x, y), (y, z) \in T(M) _ \exists (x, z) \in T(M)$$

Транзитивность

Бинарное отношение $T(M)$ называется
интранзитивным

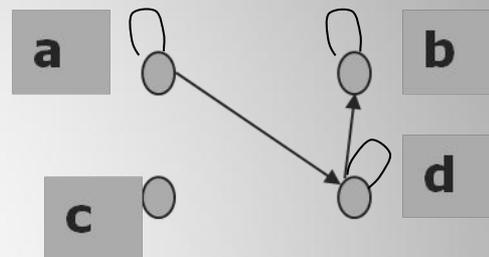
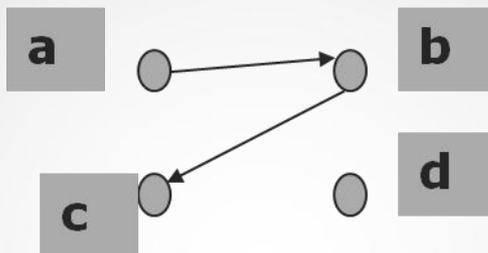
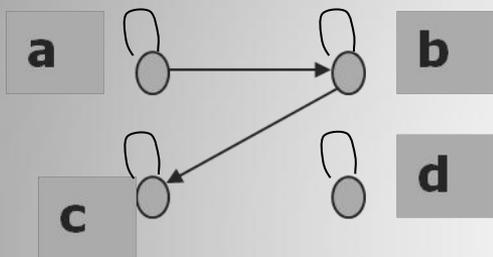
тогда и только тогда, когда для каждой двух пар элементов (x, y) и (y, z) , принадлежащих бинарному отношению, пара (x, z) не принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall (x, y), (y, z) \in T(M) _ \exists (x, z) \notin T(M)$$

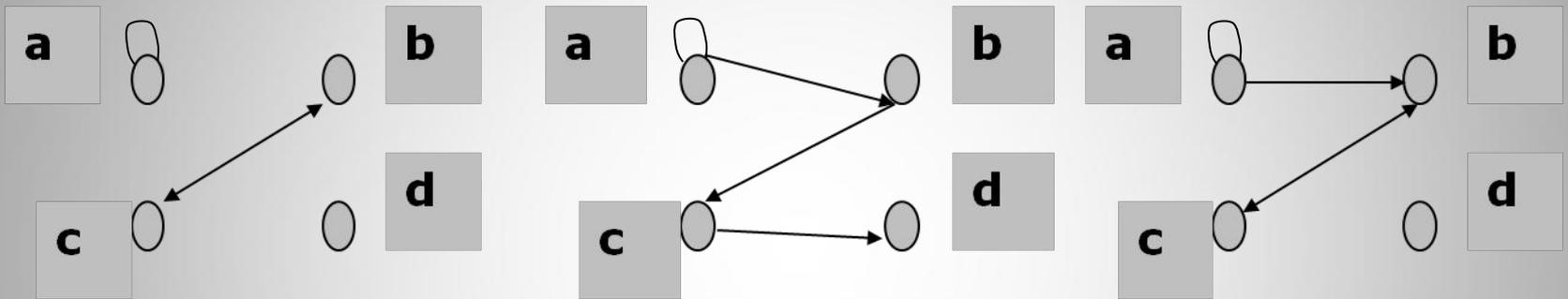
Транзитивность

Если бинарное отношение $T(M)$ не обладает ни свойством транзитивности, ни свойством интранзитивности, то оно является ***нетранзитивным***

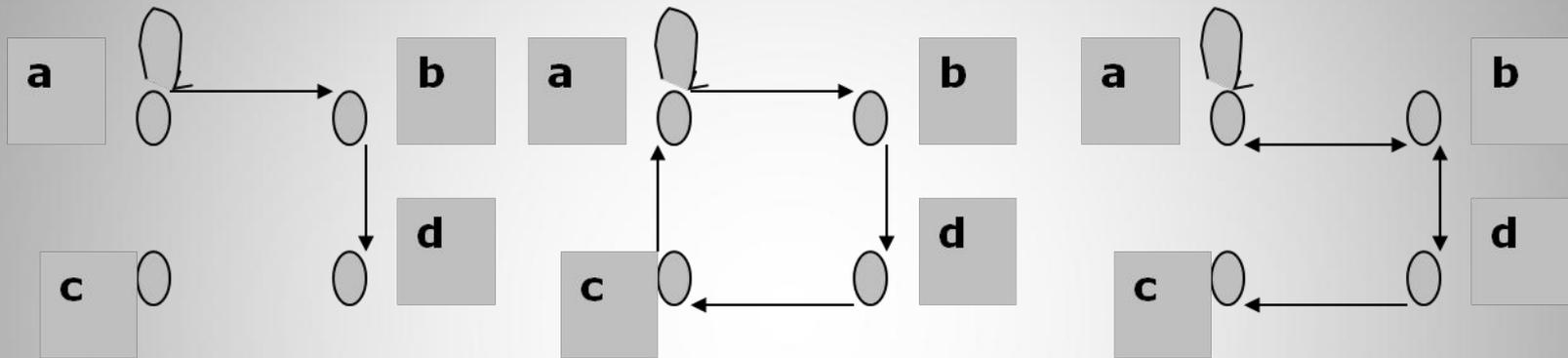
Примеры рефлексивности



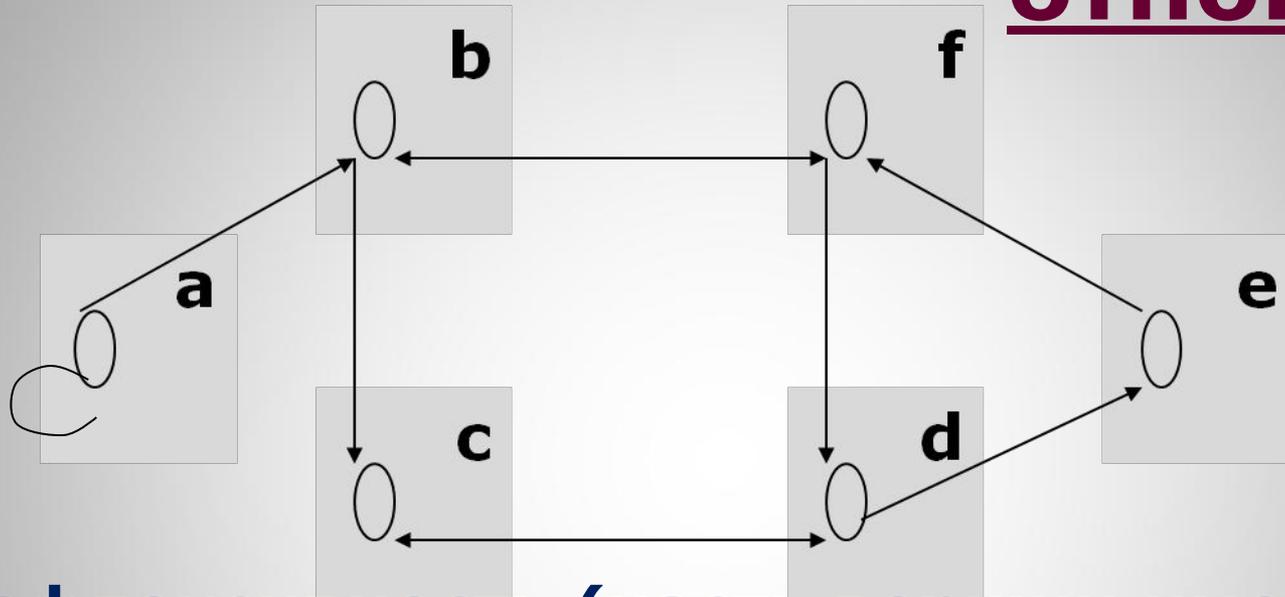
Примеры симметричности



Примеры транзитивности



Пример свойств бинарных отношений



- **нерефлексивность** (часть вершин имеет петли, часть –нет)
- **несимметричность** (есть симметричные и антисимметричные дуги)
- **интранзитивность** (бинарное отношение обладает несколькими путями длины два, но ни на один из них нет транзитивного замыкания)