И
О
П
МИФИ

Дискретная математика. Математическая логика

Лекция 2. Бинарные отношения и свойства

2008 г.

Проф., д.т.н. Гусева А.И. ,
доцент Порешин П.П.,
аспирант Цыплаков А.С.

Бинарное отношение

Бинарным отношением* T(M)** на множестве ***M называется подмножество $M^2 = M \times M$, $T(M) \subseteq M^2$

Инфиксная форма записи бинарного отношения

a T b $= \{(a,b) / (a,b) \in T \subseteq M \times M\}$

Виды бинарных отношений

Обратное отношение

$$R^{-1} = \{(x, y) / (y, x) \in R\}$$

Дополнительное отношение

$$\overline{R} = \{(x, y) / (x, y) \notin R\}$$

Тождественное отношение

$$U = \{(x, x) / x \in M\}$$

Универсальное отношение

$$I = \{(x, y) / x \in M \; \_ \quad \_ \quad \in \quad \}$$

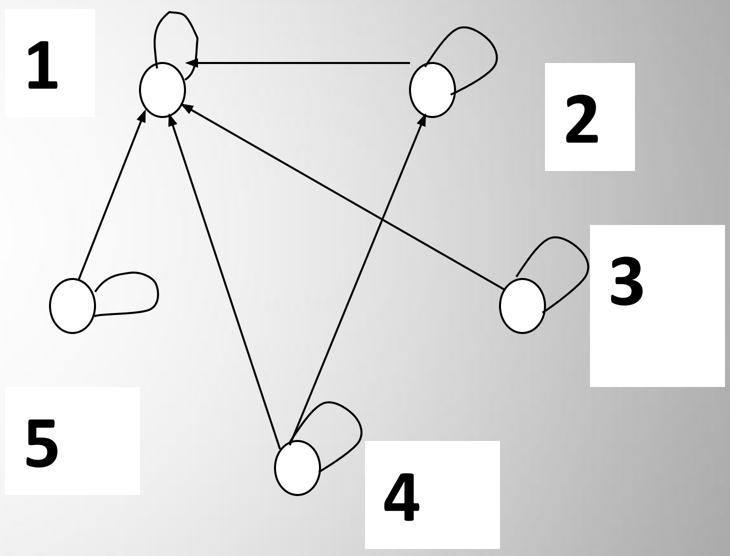
Способы задания бинарных отношений

- **Перечислением**, как множество пар
- **Графически**, когда каждый элемент *x* множества *M* представляется вершиной, а пара представляется дугой из *x* в *y*
- **Матричным способом**, с помощью матрицы смежности или матрицы инцинденций
- **Фактор-множеством**

Пример

Матрица смежности

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	0	1	0	0
4	1	1	0	1	0
5	1	0	0	0	1



Графическое задание

Фактор-множество

Фактор-множество ***R/M*** **множества** ***M*** **по отношению к** ***R*** **называется множество окрестностей единичного радиуса для всех элементов** ***M*** **при заданном** ***R***

R/M =	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
	{1}	**{1, 2}**	**{1, 3}**	**{1, 2, 4}**	**{1, 5}**

Функция

$F = X \times Y$ называется *функцией*, если для каждого элемента ***x*** найдется не более одного элемента ***y*** такого, что $(x, y) \in F$, т.е. выполняется свойство однозначности полученного результата

Множество *X* - область определения функции, и множество *Y* - область значений функции

X и *У* могут не иметь общих элементов

<u>Инъекция</u>

Функция *F: X →Y* называется *инъективной, или инъекцией, или вложением*, если она переводит разные элементы *X* в разные *У*, то есть

$$\forall x \in X, \forall z \in X,\ x \neq z \rightarrow F(x) \neq F(z)$$

Сюръекция

Функция *F: X → Y* называется *сюръективной, или сюръекцией, или наложением*, если множество ее значений есть все *Y*, т.е.

$$\forall y \in Y \ \_ \ \exists x \in X, \ \_ \ y = F(x)$$

Биекция

Функция *F: X →Y* называется ***биекцией или взаимно однозначным соответствием,*** если она одновременно является инъекцией и сюръекцией (вложением и наложением)

Операция

Частным случаем функции является ***операция О***

В этом случае область значения *Х* и область определения *У* совпадают, т.е

$$O \subseteq M^2, \forall x \in M \exists!\, y, (x, y) \in O$$

Рефлексивность

Бинарное отношение *T(M)* называется *рефлексивным* тогда и только тогда, когда для каждого элемента пара *(x, x)* принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall x \in M \ \_ \ \exists (x, x) \in T(M)$$

Бинарное отношение *T(M)* называется *иррефлексивным* тогда и только тогда, когда для каждого элемента пара *(x, x)* не принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall x \in M \ \_ (x, x) \notin T(M)$$

Рефлексивность

Если бинарное отношение *T(M)* не обладает ни свойством рефлексивности, ни свойством иррефлексивности, то оно является *нерефлексивным*

Симметричность

Бинарное отношение *Т(М)* называется ***симметричным*** тогда и только тогда, когда для каждой пары ***(х, у)*** из ***Т***, обратная пара

(у, х) также принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall(x, y) \in T(M)\ \_\ \exists(y, x) \in T(M)$$

Бинарное отношение Т(М) называется ***антисимметричным*** тогда и только тогда, когда для каждой пары различных элементов ***(х, у)*** из ***Т*** пара ***(у, х)*** не принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall(x, y) \in T(M)\ \_(y, x) \notin T(M)$$

Симметричность

Если бинарное отношение *T(M)* не обладает ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности, то оно является ***несимметричным***

Транзитивность

Бинарное отношение *T(M)* называется *транзитивным* тогда и только тогда, когда для каждых двух пар элементов *(x, y)* и *(y, z)*, принадлежащих бинарному отношению, пара *(x, z)* также принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall(x,y),(y,z)\in T(M)\ \_\ \exists(x,z)\in T(M)$$

Транзитивность

Бинарное отношение *T(M)* называется ***интранзитивным***

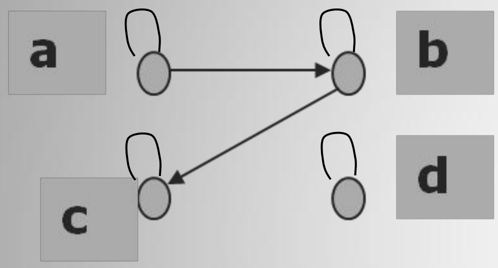
тогда и только тогда, когда для каждых двух пар элементов *(x, y)* и *(y ,z)*, принадлежащих бинарному отношению , пара *(x, z)* не принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

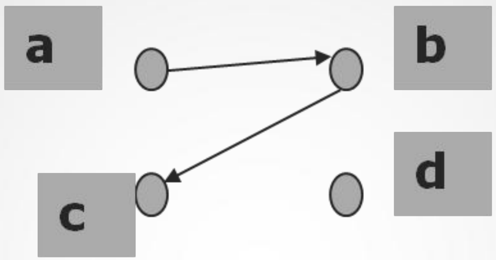
$$\forall (x, y),(y, z) \in T(M) \_ \exists (x, z) \notin T(M)$$

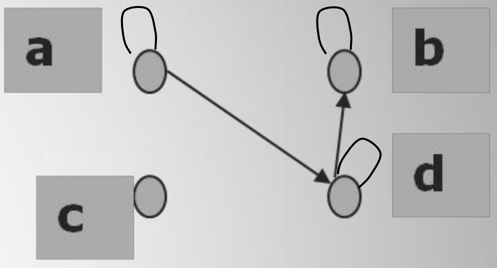
Транзитивность

Если бинарное отношение ***Т(М)*** не обладает ни свойством транзитивности, ни свойством интранзитивности, то оно является ***нетранзитивным***

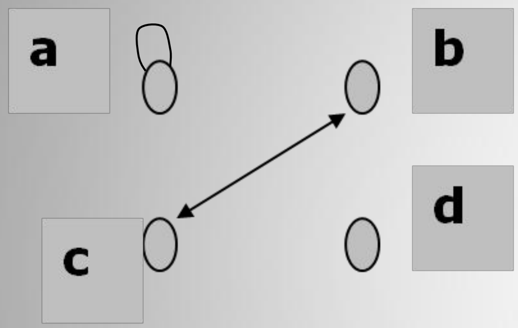
Примеры рефлексивности

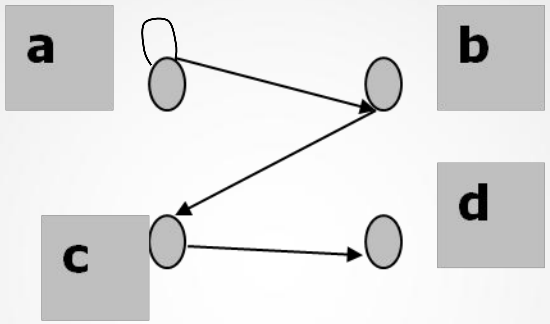


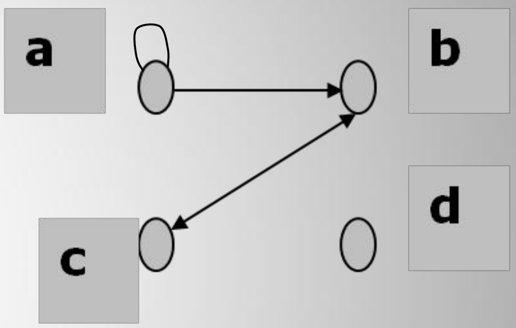




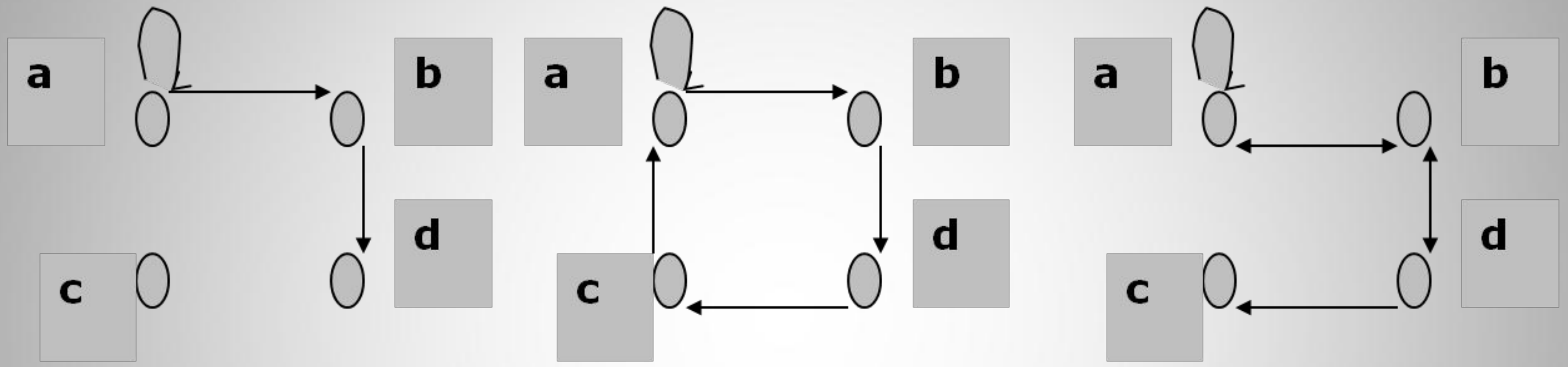
Примеры симметричности



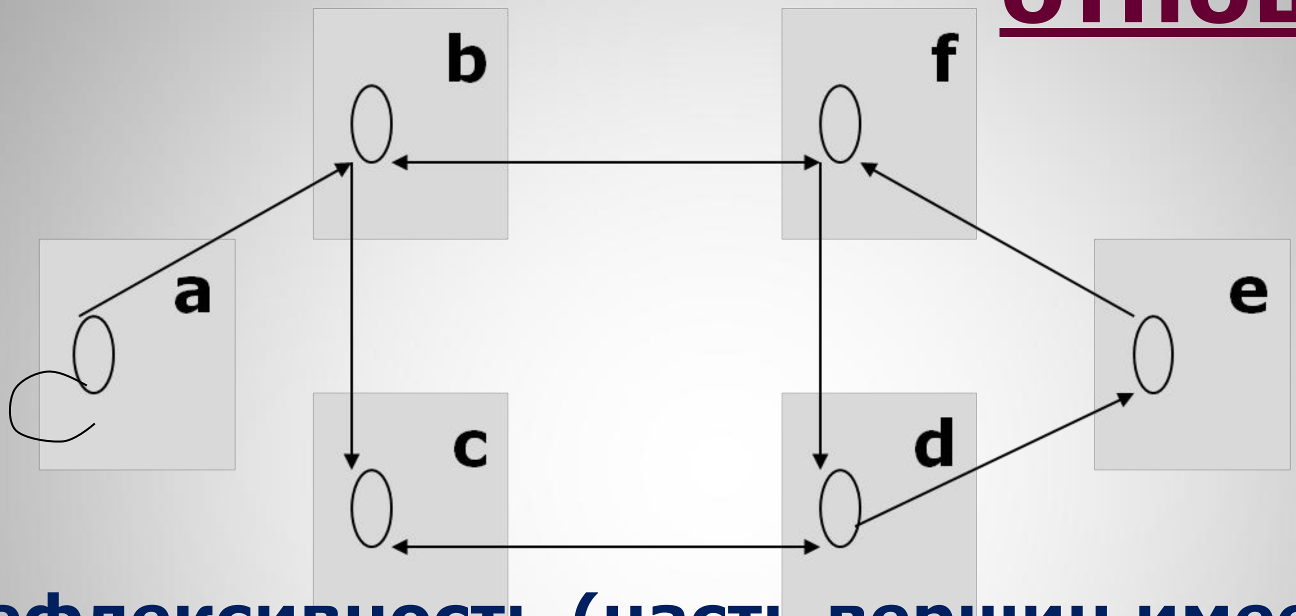




Примеры транзитивности



Пример свойств бинарных отношений



- нерефлексивность (часть вершин имеет петли, часть –нет)
- несимметричность (есть симметричные и антисимметричные дуги)
- интранзитивность (бинарное отношение обладает несколькими путями длины два, но ни на один из них нет транзитивного замыкания)