ВВЕДЕНИЕ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНУЮ МАТЕМАТИКУ

Лекция 3

22 сентября 2009

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

2. Вычислительная линейная алгебра

Основные результаты

Методы решения СЛАУ

Прямые

Итерационные

2. Вычислительная линейная алгебра

Теорема Пусть наряду с СЛАУ **Au = f** рассматриваетмся возмущенная система

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) = \mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}.$$

Если возмущения коэффициентов и число обусловленности матрицы СЛАУ таковы, что , то

$$\mu \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

2. Вычислительная линейная алгебра

То относительная погрешность решения, полученного прямым методом, удовлетворяет оценке

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \le \frac{\mu}{1-\mu \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}} \left(\frac{\|\Delta \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|} + \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right).$$

2. Вычислительная линейная алгебра

При вычислениях на идеальном компьютере

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \mu \frac{\|\Delta \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|}.$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Важный частный случай – СЛАУ с трехдиагональной матрицей

$$-b_0 u_0 + c_0 u_1 = d_0,$$

$$a_n u_{n-1} - b_n u_n + c_n u_{n+1} = d_n,$$

$$n = 1, \ldots, N-1,$$

$$a_N u_{N-1} - b_N u_N = d_N,$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Система с трехдиагональной матрицей

$$\mathbf{A}'\mathbf{u} = \mathbf{d},$$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} -b_0 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & -b_1 & c_1 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_N \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_N)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots, d_N)$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Модификация алгоритма Гаусса – метод ПРОГОНКИ

(Thomas algorithm)

2. Вычислительная линейная алгебра

Прогоночное соотношение

$$u_{n-1} = p_n u_n + q_n, \ n = 1, \ldots, N,$$

Из первого уравнения

$$-b_0 u_0 + c_0 u_1 = d_0, \qquad u_0 = \frac{c_0}{d_0} u_1 - \frac{d_0}{b_0},$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки

$$p_1 = c_0 / b_0, \quad q_1 = -d_0 / b_0$$

Рекуррентная формула

Подставим $u_{n-1} = p_n u_n + q_n$

в уравнение $a_n u_{n-1} - b_n u_n + c_n u_{n+1} = d_n,$

$$a_n (p_n u_n + q_n) - b_n u_n + c_n u_{n+1} = d_n,$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки

$$u_n = \frac{c_n}{b_n - a_n p_n} u_{n+1} + \frac{a_n q_n - d_n}{b_n - a_n p_n}.$$

$$u_n = p_{n+1} u_{n+1} + q_{n+1}$$

$$p_{n+1} = \frac{c_n}{b_n - a_n p_n}, \quad q_{n+1} = \frac{a_n q_n - d_n}{b_n - a_n p_n}.$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки

Обратный ход

$$u_N = q_N$$

$$u_{k-1} = p_k u_k + q_k$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки

Устойчивость

Диагональное преобладание ($i = 1,\ldots,n$).

$$\left|a_{ii}\right| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} \left|a_{ij}\right|, \qquad \left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} \left|a_{ij}\right|,$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки – устойчивость

Теорема. Если выполнены условия диагонального преобладания

$$|b_n| \geq |a_n| + |c_n|$$

и хотя бы для одной строки матрицы системы имеет место строгое диагональное преобладание. Пусть, кроме того, $0 < p1 \leq 1$. Тогда алгоритм прогонки устойчив.

2. Вычислительная линейная алгебра

Доказательство теоремы

$$|p_{n+1}| = \left|\frac{c_n}{b_n - a_n p_n}\right| \le \frac{|c_n|}{|b_n - a_n p_n|} \le \frac{|c_n|}{\left||b_n| - |a_n|\right|} \le 1$$

$$P_n^M = p_n + \delta_n$$

$$P_{n+1}^M = p_{n+1} + \delta_{n+1} = \frac{c_n}{b_n - a_n(p_n + \delta_n)} + \varepsilon_n$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки. Устойчивость

Доказательство теоремы (продолжение)

$$p_{n+1} + \delta_{n+1} = \frac{c_n}{b_n - a_n p_n} + \frac{c_n}{(b_n - a_n p_n)^2}\delta_n + \varepsilon_n$$

$$\delta_{n+1} = \frac{a_n}{c_n} p_{n+1}^2 \delta_n + \varepsilon_n$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки

$$q_{n+1} = \frac{a_n q_n - d_n}{b_n - a_n p_n}.$$

$$Q_n^M = q_n + \delta q_n$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки

$$Q_{n+1}^{M} = q_{n+1} + \delta q_{n+1} = \frac{a_n(q_n + \delta q_n) - d_n}{b_n - a_n(p_n + \delta_n)} + \varepsilon q_n$$

$$\delta q_{n+1} = \frac{a_n}{b_n - a_n p_n}\delta q_n + \frac{q_n p_n}{c_n}\delta_n + \varepsilon q_n$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод прогонки

(обратный ход)

$$u_{k-1} = p_k u_k + q_k$$

$$\delta u_{k-1} = u_k \delta_k + p_k \delta u_k + \delta q_k + u_{k-1} \varepsilon_{k-1}$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод простой итерации

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

$$\tau A u = \tau f,$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{u} + \tau \mathbf{A}\mathbf{u} = \tau \mathbf{f},$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод простой итерации

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} - \tau \mathbf{A}\mathbf{u} + \tau \mathbf{f},$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = (\mathbf{E} - \tau \mathbf{A})\mathbf{u}^{k} + \tau \mathbf{f},$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод простой итерации – каноническая форма записи

$$\frac{\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^{k}}{\tau_{k+1}}+\mathbf{A}\mathbf{u}^{k}=\mathbf{f}.$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Неявные
итерационные
методы

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{f},$$

$$\mathbf{B}\frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^{k}}{\tau_{k+1}} + \mathbf{A}\mathbf{u}^{k} = \mathbf{f}.$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Невязка

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}^k$$

2. Вычислительная линейная алгебра

Метод простых итераций

$$\mathbf{u}^{k+1} = (\mathbf{E} - \tau \mathbf{A})\mathbf{u}^{k} + \tau \mathbf{f},$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^{k} + \tau \mathbf{r}^{k},$$

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^{k} - \tau \mathbf{A}\mathbf{r}^{k} = (\mathbf{E} - \tau \mathbf{A}) r^{k},$$

2. Вычислительная линейная алгебра

- Метод простой итерации

$$\mathbf{r}^{k+1} = (\mathbf{E} - \tau\,\mathbf{A})\mathbf{r}^{k} = \mathbf{B}\mathbf{r}^{k},$$

$$\left\|\mathbf{r}^{k+1}\right\| = \left\|\mathbf{B}\mathbf{r}^{k}\right\| \le \left\|\mathbf{B}\right\| \cdot \left\|\mathbf{r}^{k}\right\|,$$

2. Вычислительная линейная алгебра

- Метод простой итерации
- Теорема (достаточное условие сходимости метода простой итерации).
- Итерационный процесс сходится к решению **u** СЛАУ $\mathbf{Au} = \mathbf{F}$
- со скоростью геометрической прогрессии при выполнении условия

$$\|\mathbf{B}\| \leq q < 1.$$

2. Вычислительная линейная алгебра

- Теорема (критерий сходимости метода простой итерации) (без доказательства).
- Пусть СЛАУ имеет единственное решение. Тогда для сходимости метода простых итераций необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы **B** по абсолютной величине были меньше единицы.

2. Вычислительная линейная алгебра

- Спасибо за внимание!

2. Вычислительная линейная алгебра

- Вопросы?