3.4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n$

называется вектор $\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ***- любые действительные числа.***

Например, даны три вектора:

$$\vec{a}_1 = (1;2;0) \quad \vec{a}_2 = (2;1;1) \quad \vec{a}_3 = (-1;1;-2)$$

И числа $\alpha_1 = 2 \quad \alpha_2 = 3 \quad \alpha_3 = 4$

Линейной комбинацией этих векторов будет вектор:

$$\vec{b} = (4;11;-5)$$

Говорят, что вектор $\vec{b}$ разлагается по векторам $\vec{a}$.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n$

называются __линейно зависимыми__, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

не равные нулю одновременно, что

$$\boxed{\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = 0}$$

В противном случае вектора называются линейно независимыми.

Пусть система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n$

линейно зависима: $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$

Выберем в этой сумме член с номером *s* и выразим его через стальные слагаемые:

$$\alpha_s\vec{a}_s = -\alpha_1\vec{a}_1 - \alpha_2\vec{a}_2 - \dots - \alpha_k\vec{a}_k$$

$$\vec{a}_s = \boxed{-\frac{\alpha_1}{\alpha_s}}\vec{a}_1 \boxed{-\frac{\alpha_2}{\alpha_s}}\vec{a}_2 - \dots \boxed{-\frac{\alpha_k}{\alpha_s}}\vec{a}_k$$

Т. об., один из векторов линейно зависимой системы оказывается выраженным через другие вектора этой системы.

Свойства линейнозависимой системы векторов

1

Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима.

2

Система, содержащая нулевой вектор, всегда линейно зависима.

3

Система, содержащая более одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда среди ее векторов содержится хотя бы один вектор, который линейно выражается через остальные вектора системы.

Геометрический смысл линейной зависимости векторов:

Если два вектора линейно зависимы, то они коллинеарны: $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$

Если три вектора линейно зависимы, то они компланарны.