

# Логические основы вычислительной техники

## Формальная логика

Основные формы мышления:

- Понятие
- Высказывание (суждение)
- Умозаключение

## Алгебра логики

- Объекты алгебры логики
- Основные логические функции НЕ, И, ИЛИ
- Вычисление логических выражений
- Построение таблиц истинности по логическому выражению
- Равносильность логических выражений
- Импликация, эквиваленция
- Законы алгебры логики. Упрощение логических выражений

## Решение логических задач

## Логические основы устройства компьютера

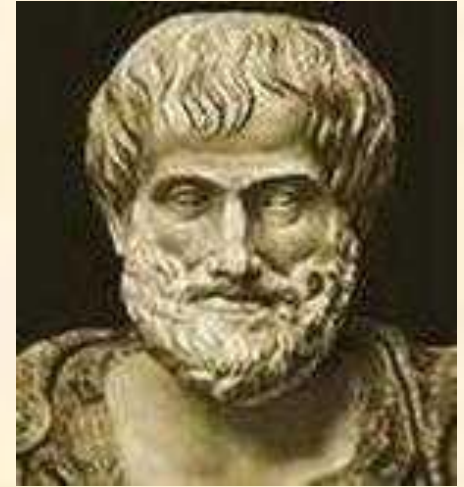
- Основные логические элементы (вентили)
- Основные узлы ЭВМ
- Построение логических функций и схем по таблице истинности
- Построение таблицы истинности и логической функции по заданной логической схеме
- Триггер
- Регистр
- Сумматор

# **Логика** - наука о формах и способах мышления.

Основы логики были заложены работами ученого и философа

**Аристотеля**

(384 -322гг. до н.э.).



Он пытался первым найти ответ на вопрос «Как мы рассуждаем?», изучал правила мышления. Аристотель впервые дал систематическое изложение логики.

Он подверг анализу человеческое мышление, его

**формы - понятие, суждение, умозаключение.**

Так возникла **формальная логика.**

# Основные формы мышления:

**Понятие** – форма мышления, фиксирующая основные существенные признаки объекта.

**Понятие имеет:**

**Содержание** – совокупность существенных признаков объекта.

**Объем** – совокупность предметов, на которые оно распространяется.

**Пример:**

**Содержание** понятия **«Персональный компьютер»**  
- *«Персональный компьютер – это универсальное электронное устройство для автоматической обработки информации, предназначенное для одного пользователя»*

**Объем** понятия **«Персональный компьютер»**  
выражает всю совокупность существующих сейчас в мире персональных компьютеров.

Объем понятия может быть представлено в форме **множества объектов, состоящего из элементов множества**. Алгебра множеств, одна из основополагающих современных математических теорий, позволяет исследовать отношения между множествами и, соответственно, объемами понятий.

**Между множествами (объемами понятий) могут быть различные виды отношений:**

- **равнозначность**, когда объемы понятий полностью совпадают;
- **пересечение**, когда объемы понятий частично совпадают;
- **подчинения**, когда объем одного понятия полностью входит в объем другого и т.д.

Для наглядной геометрической иллюстрации объемов понятий и соотношений между ними используются **диаграммы Эйлера-Венна**.

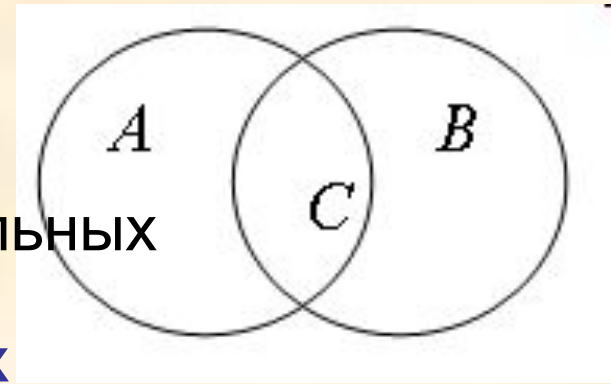
Если имеются какие-либо понятия **A, B, C** и т.д., то объем каждого понятия (множество) можно представить в виде круга, а отношения между этими объемами (множествами) в виде пересекающихся кругов.

**Пример 3.1.** Отобразить с помощью **диаграммы Эйлера-Венна** соотношение между объемами понятий **натуральные числа** и **четные числа**.

**A** = {**Натуральные числа** (целые положительные числа)}

**B** = {**Четные числа** (множество отрицательных и положительных четных чисел)}

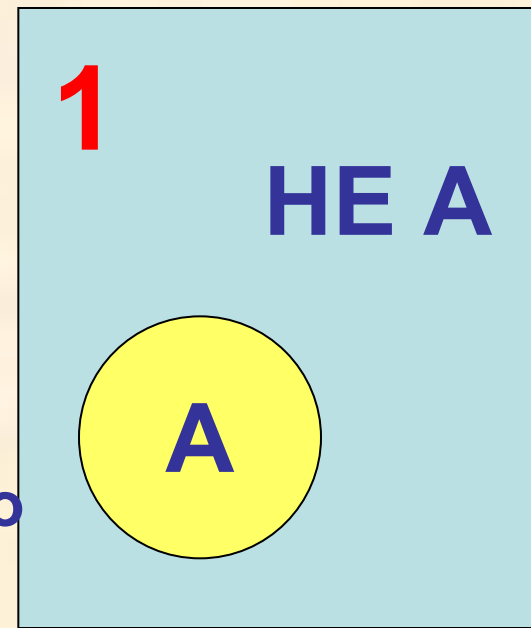
**C** = {**множество положительных четных чисел**}



**Совокупность всех существующих множеств образует всеобщее**

**универсальное множество 1**, которое позволяет отобразить множество логически противоположное к заданному. Так, если задано множество **A**, то существует множество **НЕ A**, которое объединяет все объекты, не входящие во множество **A**.

Множество **НЕ A** **дополняет множество A до универсального множества 1**.



**Пример 3.2.** Отобразить с помощью **диаграммы Эйлера-Венна** множество натуральных чисел **A** и множество **НЕ A**.



**A** = {множество натуральных чисел} – круг.

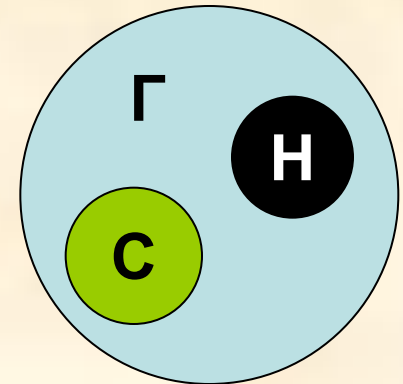
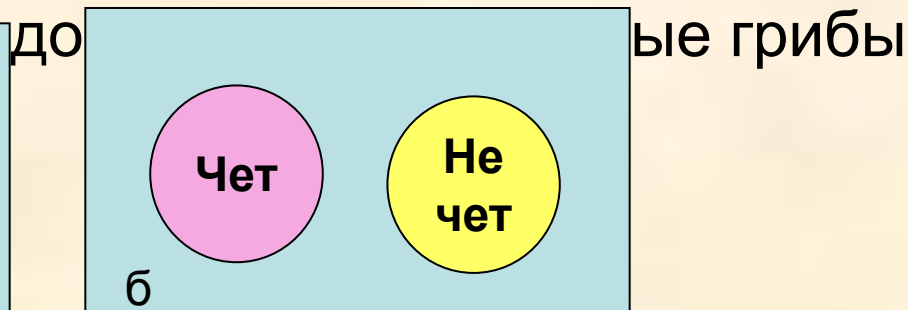
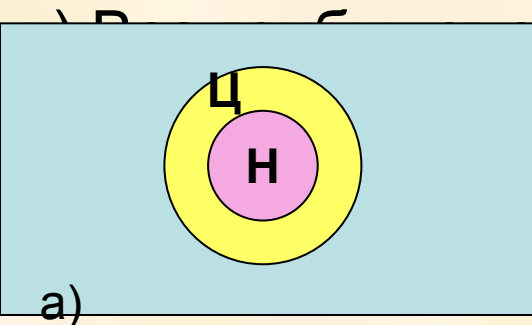
Универсальное множество **1** - прямоугольник,

Множество **НЕ A** - прямоугольник минус круг.

**3.3.** Отобразить с помощью диаграммы Эйлера-Венна соотношения между следующими объемами понятий:



- а) целые и натуральные числа;
- б) четные и нечетные числа.



**Высказывание** - это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о свойствах реальных предметов и отношениях между ними. Высказывание может быть **ИСТИННО** или **ЛОЖНО**.

Не являются высказываниями восклицательные и вопросительные предложения:

*Уходя, гасите свет*

*Принеси мне книгу*

*Ты идешь в кино?*

**Высказывания делятся на:**

**1. простые**       $2+8<5$       - ложно

*Земля – планета Солнечной системы*- истинно;

**2. составные** (истинность которых вычисляется с помощью алгебры высказываний)

**“Все мышки **и** кошки с хвостами”**

**“Все мышки с хвостами” **и** “Все кошки с хвостами”**



**Умозаключение** – форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений (посылок) может быть получено новое суждение (заключение)

**Пример:**

**«Все углы треугольника равны» (посылка),  
то «Этот треугольник равносторонний»  
(заключение)**

Посылками умозаключений по правилам формальной логики могут быть только истинные суждения, и тогда умозаключение будет истинным. В противном случае можно прийти к ложному умозаключению.



# Вопросы для размышления

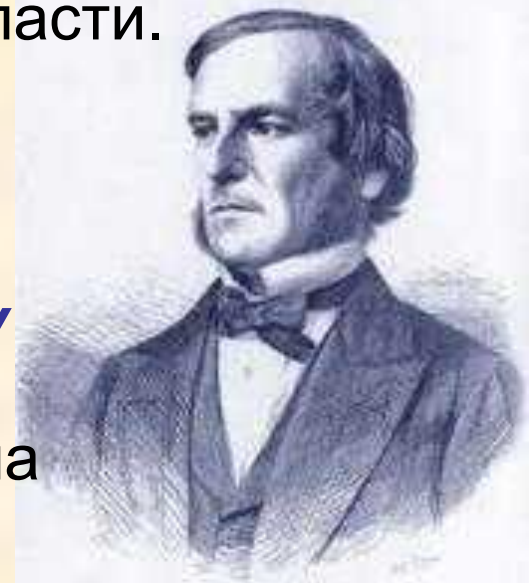
1. Какие существуют основные формы мышления?
2. В чем состоит разница между содержанием и объемом понятия?
3. Может ли быть высказывание выражено в форме вопросительного предложения?
4. Как вычисляется истинность или ложность простого высказывания? Составного высказывания?

## Математическая логика



Немецкий ученый **Готфрид Лейбниц** (1646-1716) заложил основы **математической логики**. Он пытался построить первые логические исчисления (свести логику к математике), предложил использовать символы вместо слов обычного языка, поставил много задач по созданию символической логики, его идеи оказали влияние на последующие работы ученых в этой области.

Англичанин **Джордж Буль** (1815-1864, математик-самоучка), на фундаменте, заложенном Лейбницем, создал новую область науки - **Математическую логику** (*Булеву алгебру* или *Алгебру высказываний*). В его работах логика обрела свой алфавит, свою орфографию и грамматику.



# Алгебра логики (высказываний)

работает с **высказываниями**.

Различают:

1. **Логические константы (логические утверждения)** – конкретные частные утверждения (**И/Л**)

{Аристотель - основоположник логики}

{На яблонях растут бананы}

2. **Логические переменные (предикаты)** – логические высказывания, значения которых меняются в зависимости от входящих в них переменных, обозначаются заглавными латинскими буквами **A, B, C, D, F, ...**

**A** = {Аристотель - основоположник логики}

**B** = {На яблонях растут бананы}.

Истинному высказыванию ставится в соответствие 1, ложному — 0. Таким образом, **A = 1, B = 0**.

**3. Логические функции ( логические формулы) –**  
**сложные логические выражения образованных**  
**из простых и связанных логическими**  
**операциями И, ИЛИ, НЕ и др.)**

Высказывание **“Все мышки и кошки с хвостами”**  
является сложным и состоит из двух простых высказываний.

**A=“Все мышки с хвостами” и B=“Все кошки с хвостами”**  
Его можно записать в виде логической функции, значение  
которой истинно:  **$F(A,B)=A$  и  $B$**

В математической логике не рассматривается конкретное  
содержание высказывания, важно только, истинно оно или  
ложно. Поэтому высказывание можно представить некоторой  
переменной величиной, значением которой может быть  
только **ложно (0)** или **истинно (1)**.

# Логические операции

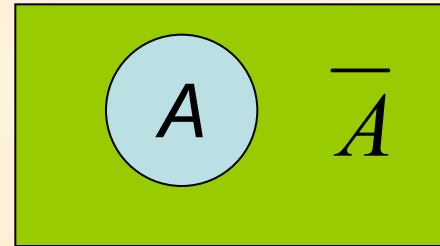
## 1. Отрицание (инверсия).

Обозначение: НЕ А,  $\neg A$ ,  $\overline{A}$

Таблица истинности:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Диаграмма Эйлера-Венна



$A = \{\text{Дети любят игрушки}\}$        $\overline{A} = \{\text{Дети НЕ любят игрушки}\}$

$A = \{\text{множество учеников 10 А класса}\}$

$\overline{A} = \{\text{множество учеников НЕ 10 А класса}\}$

## 2. Логическое умножение (Конъюнкция)

Обозначение: И,  $\wedge$ , &,  $\cdot$

$$F = A \wedge B$$

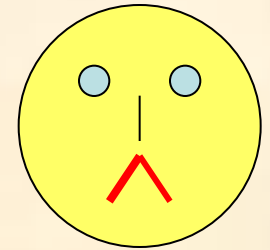
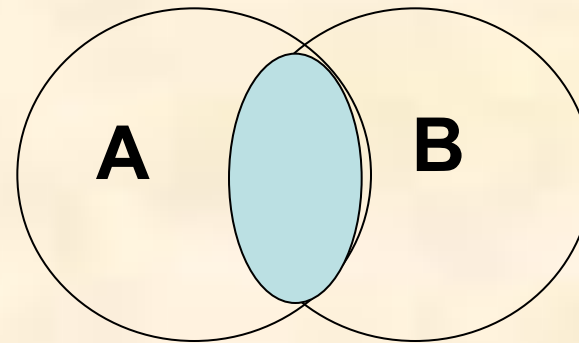


Таблица ИСТИННОСТИ:

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Диаграмма Эйлера-Венна

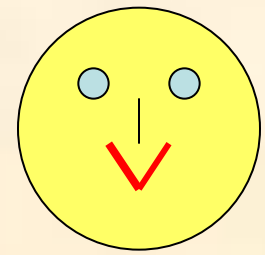


$A = \{\text{Множество обитателей моря}\}$

$B = \{\text{Множество млекопитающих}\}$

$F = A \wedge B = \{\text{кит, акула, дельфин}\}$

### 3. Логическое сложение (Дизъюнкция)



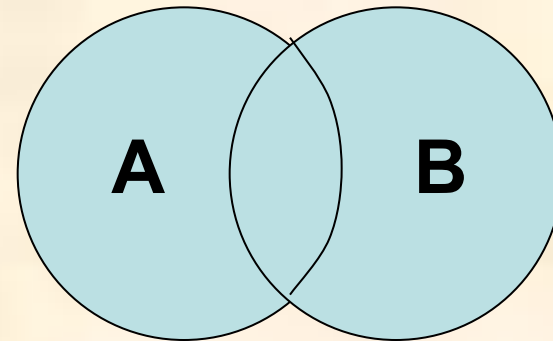
Обозначение: ИЛИ,  $\vee$ , +, |

$$F = A \vee B$$

Таблица истинности:

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Диаграмма Эйлера-Венна



$A = \{\text{Множество учеников 10 А класса}\}$

$B = \{\text{Множество учеников 10 Б класса}\}$

$F = A \vee B = \{\text{Множество учеников 10А или 10Б кл.}\}$

# 4. ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование)

Обозначение:  $A \rightarrow B$ ,  $A \Rightarrow B$

Таблица истинности:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация - логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся **ложным тогда и только тогда**, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно.

условие  $\Rightarrow$  следствие

**ЕСЛИ, ... ТО ...**

Если будет дождь, то мы не пойдём на улицу.

Если я поленюсь, то получу двойку.

Если на траве роса, то скоро настанет вечер.



## 5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (равнозначность) -

логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным **тогда и только тогда**, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

Обозначение:  $A \sim B$ ,  $A \leftrightarrow B$ ,  $A \equiv B$ ,  $A = B$

Таблица истинности:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Чайник греет воду тогда и только тогда, когда он включен.

Мы дышим свежим воздухом тогда и только тогда, когда гуляем в парке.

## Приоритет логических операций:

1.  $()$  Операции в скобках
2. НЕ Отрицание
3. И логическое умножение
4. ИЛИ Логическое сложение
5.  $\rightarrow$  Импликация
6.  $\leftrightarrow$  Эквивалентность

**РЕШИМ ЗАДАЧИ:**

Определите, в каком порядке необходимо вычислять значение логического выражения:

$$1) \overset{1}{\neg} A \overset{3}{\&} \overset{2}{\neg} B$$

$$2) A \overset{2}{\&} (B \overset{1}{\&} C)$$

$$3) (A \overset{1}{\&} B) \overset{4}{\vee} (C \overset{3}{\&} \overset{2}{\neg} D)$$

$$4) A \overset{2}{\vee} \overset{1}{\neg} D \overset{3}{\vee} B$$

$$5) A \overset{3}{\rightarrow} (B \overset{2}{\leftrightarrow} \overset{1}{\neg} A)$$



# Вычисление логических выражений

## Пример1.

Вычислить значение логического выражения  
« $(2 \cdot 2 = 5 \text{ или } 2 \cdot 2 = 4)$  и  $(2 \cdot 2 \neq 5 \text{ или } 2 \cdot 2 \neq 4)$ »

Обозначим

$A = \langle\langle 2 \cdot 2 = 5 \rangle\rangle$  – ложно (0)

$B = \langle\langle 2 \cdot 2 = 4 \rangle\rangle$  – истинно (1)

Тогда  $(A \text{ или } B)$  и  $(\bar{A} \text{ или } \bar{B})$

$$F = (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B}) = (0 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) = 1 \wedge 1 = 1$$

**Задание 2.** Определите истинность составного высказывания

$\overline{(A \& B)} \& (C \vee D)$  состоящего из простых высказываний:

A={Принтер – устройство вывода информации}

B={Процессор – устройство хранения информации}

C={Монитор – устройство вывода информации}

D={Клавиатура – устройство обработки информации}

**Установим истинность простых высказываний:**

A=1, B=0, C=1, D=0

**Определяем истинность составного высказывания:**

$$F = \overline{(A \& B)} \& (C \vee D) =$$

$$(1 \& 0) \& (1 \vee 0) = (0 \& 1) \& (1 \vee 0) = 0 \& 1 = 0$$

**Задание 3.** Найти значения логического выражения:

$$1) (1 \vee 1) \vee (1 \vee 0) = 1 \vee 1 = 1$$

$$2) (0 \& 1) \& 1 = 0 \& 1 = 0$$

$$3) ((1 \vee 0) \& (1 \& 1)) \& (0 \vee 1) = (1 \& 1) \& 1 = 1 \& 1 = 1$$

$$4) (0 \vee 1) \rightarrow (1 \& 1) = 1 \rightarrow 1 = 1$$

$$5) (1 \& 1 \vee 0) \leftrightarrow (\neg 1 \& 1) = 1 \leftrightarrow 0 = 0$$

$$6) \neg((1 \rightarrow 0) \leftrightarrow (1 \& 1) \vee 1) = \neg(0 \leftrightarrow 1) = \neg 0 = 1$$

# ПОСТРОЕНИЕ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ ПО ЛОГИЧЕСКОМУ ВЫРАЖЕНИЮ

*Таблицу, показывающую, какие значения принимает сложное высказывание при всех сочетаниях значений входящих в него простых высказываний (переменных), называют **таблицей истинности** сложного высказывания (логической формулы).*

По формуле логической функции легко рассчитать ее *таблицу истинности*, соблюдая *приоритет логических операций* и действия в скобках

**Пример.** Построим таблицу истинности следующей функции:

**Порядок действий:**  $F(A, B, C) = A \vee (\overline{C} \wedge B)$

- 1. Количество строк в таблице  $Q=2^n$** , где  $n$  - количество переменных (аргументов), здесь  $n = 3$  (A, B, C) и тогда  **$Q=2^3=8$**
- 2. Количество столбцов = число переменных + число операций** (здесь  $3+3=6$  столбцов)
- 3. Выписать наборы входных переменных.** Это удобнее сделать так:
  - разделить колонку значений первой переменной пополам и заполнить верхнюю половину 0, нижнюю половину 1.
  - разделить колонку значений второй переменной на 4 части и заполнить каждую четверть чередующимися группами 0 и 1, начиная опять с группы 0.
  - продолжить деление колонок значений последующих переменных на 8, 16 и т.д. частей и заполнение их группами из 0 или 1 до тех пор, пока группы 0 и 1 не будут состоять из одного символа. (Можно заполнять все колонки, начиная с группы единиц.)
- 4. Провести заполнение таблицы истинности** по столбикам, выполняя логические операции.

Построим таблицу истинности для следующей функции:  $F(A, B, C) = A \vee (\bar{C} \wedge B)$

$A$	$B$	$C$	$\bar{C}$	$\bar{C} \wedge B$	$A \vee (\bar{C} \wedge B)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1



Задание. Построить таблицу истинности для следующих функций:

1)  $F = \bar{A} \vee B$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

2)  $F = \bar{A} \wedge B$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \wedge B$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	0

3)  $F = \overline{(A \vee B)}$

A	B	$A \vee B$	$\overline{(A \vee B)}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

# Равносильные логические выражения

Логические выражения, у которых последние столбцы в таблице истинности совпадают, называются **равносильными**.

Знак «**=**» - равносильность.

**Пример 1.** Доказать равносильность логических выражений:

$$\text{и } \overline{A \wedge B} \quad \overline{A \vee B}$$

Таблица истинности  $\overline{A \wedge B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \wedge B$
0	0	1	1	<b>1</b>
0	1	1	0	<b>0</b>
1	0	0	1	<b>0</b>
1	1	0	0	<b>0</b>

Таблица истинности  $\overline{A \vee B}$

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$
0	0	0	<b>1</b>
0	1	1	<b>0</b>
1	0	1	<b>0</b>
1	1	1	<b>0</b>

Следовательно,  $\overline{A \wedge B} = \overline{A \vee B}$

**№ 3.2. (Д.р.)** Записать составное выражение «**(2·2=4 и 3·3=9)** или **(2·2≠4 и 3·3≠9)**» в форме логического выражения . Построить **ТИ.**

**A = «2·2=4» - 1 B = «3·3=9» - 1.** Тогда

$$F = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B}) = (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) = 1 \vee 0 = 1$$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \wedge B$	$\bar{A} \wedge \bar{B}$	F
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0

№ 3.3.(Д.р.) Доказать, используя ТИ, равносильность логических выражений:

$$\overline{\overline{A \vee B}} \text{ и } A \wedge B$$

Таблица истинности  $A \wedge \overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A \vee B}$	$\overline{\overline{A \vee B}}$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1

Таблица истинности  $A \wedge B$

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Следовательно,  $\overline{\overline{A \vee B}} = A \wedge B$

1. Что содержат таблицы истинности?
2. Какие логические выражения называются равносильными?

Логической (булевой) функцией называют функцию  $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , аргументы которой  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (независимые переменные) и сама функция (зависимая переменная) принимают значения 0 или 1.

Таблицу, показывающую, какие значения принимает логическая функция при всех сочетаниях значений ее аргументов, называют таблицей истинности логической функции. Таблица истинности логической функции  $n$  аргументов содержит  **$2^n$  строк**,  **$n$  столбцов значений аргументов** и **1 столбец значений функции**.

Логические функции могут быть заданы **табличным способом** или **аналитически** — в виде соответствующих формул.

Если логическая функция **представлена с помощью дизъюнкций, конъюнкций и инверсий**, то такая форма представления называется **нормальной**.

Каждая логическая функция двух переменных имеет 4 возможных набора значений, то существует 16 различных логических функций от двух переменных:  **$N=2^4=16$**

# Таблица. Логические функции двух переменных

Аргументы		Логические функции															
		·		+		$\bar{Y}$				$\bar{X}$							
X	Y	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$	$F_{13}$	$F_{14}$	$F_{15}$	$F_{16}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

**Пример 3.10.** По имеющимся таблицам истинности выразите через базовые логические функции (конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание) следующие функции:

а)  $F_9(X, Y)$

б)  $F_{15}(X, Y)$

Из таблицы истинности видно, что

$$F_9(X, Y) = \overline{F_8(X, Y)} \text{ (отрицание дизъюнкции).}$$

$$F_{15}(X, Y) = \overline{F_2(X, Y)} \text{ (отрицание конъюнкции).}$$

# Вопросы для размышления

1. Какое количество логических функций двух аргументов существует и почему?

**Ответ:**  $N = 2^4 = 16$ , т.к. каждая логическая функция двух аргументов имеет 4 возможных наборов значений.

2. Какие логические функции двух аргументов имеют свои названия?

**Ответ:** Инверсия, конъюнкция, дизъюнкция

3. Какое существует количество логических функций трех аргументов?

**Ответ:**  $N = 2^8 = 256$ , т.к. каждая логическая функция двух аргументов имеет 8 возможных наборов значений.

В алгебре высказываний все логические операции могут быть сведены к трем базовым: **логическому умножению, логическому сложению, логическому отрицанию.**

**Пример.** Доказать методом сравнения ТИ, что  $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$
0	0	1	<b>1</b>
0	1	1	<b>1</b>
1	0	0	<b>0</b>
1	1	0	<b>1</b>



**№ 3.4.** Доказать, пользуясь ТИ, что операция эквивалентности равносильна выражению

$$A \sim B = (A \vee \bar{B}) \& (\bar{A} \vee B)$$



A	B	$A \sim B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \vee \bar{B}$	$\bar{A} \vee B$	$(A \vee \bar{B}) \& (\bar{A} \vee B)$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1

**Задание.** Перевести высказывания на язык алгебры логики:

1. Зимой холодно и морозно, а также дует ветер

**A**=«Зимой холодно» **B**=«Зимой морозно» **C**=«Зимой дует ветер»

**Ответ:** **A&B&C**

2. Если идет дождь, а у меня нет зонта, то я промокну

**A**=«идет дождь» **B**=«у меня есть зонт» **C**=«я промокну»

**Ответ:** **(A&¬B)→C**

3. Неверно, что если погода пасмурная, то идет дождь тогда и только тогда, когда не дует ветер

**A**=«погода пасмурная» **B**=«идет дождь» **C**=«дует ветер»

**Ответ:** **¬(A → (B↔ ¬C))**

# Законы алгебры логики и свойства логических операций

используются для упрощения логических выражений  
(минимизации логических функций)

$$A \wedge \bar{A} = 0$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \wedge 1 = A$$

$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \vee \bar{A} = 1$$

$$A \vee A = A$$

$$A \vee 1 = 1$$

$$A \vee 0 = A$$

Формулы склеивания:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) = A$$

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) = A$$

Законы инверсии  
(де Моргана):

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

Формулы

поглощения:

$$A \vee (A \wedge B) = A$$

$$A \wedge (A \vee B) = A$$

$$A \vee (\bar{A} \wedge B) = A \vee B$$

$$A \wedge (\bar{A} \vee B) = A \wedge B$$

$$\bar{0} = 1$$

$$\bar{1} = 0$$

Закон двойного  
отрицания:

$$\overline{\bar{A}} = A$$

Переместительный закон:

$$A \vee B = B \vee A$$

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$\overline{(A \rightarrow B)} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$$

Сочетательный закон:

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$\bar{A} \wedge (A \vee B) = \bar{A} \wedge B$$

$$A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B}) \\ = (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$$

$$A \vee (\bar{A} \wedge B) = A \vee B$$

**№1.** Упростить логические выражения:

$$1. \quad F = (x \vee z) \wedge (x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{y} \vee z) = x \wedge (\bar{y} \vee z)$$

Здесь для первых двух скобок применена формула склеивания

$$2. \quad F(A, B, C) = (A \underline{\wedge} B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \bar{C}) = \\ (A \wedge B) \wedge (C \vee \bar{C}) = A \wedge B \wedge 1 = A \wedge B$$

**№ 3.6.** a)  $(A \vee \neg A) \& B = 1 \& B = B$

b)  $(A \& (A \vee B) \& (B \vee \neg B)) = A \& (A \vee B) \& 1 = A \& (A \& B)$

**№3.5.** Доказать справедливость законов де Моргана:

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B}$$

$$\overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\bar{A} \& \bar{B}$	$A \& B$	$\overline{A \& B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0

# Решение логических задач

## Способы решения:

1. Табличный
2. Графический (Графы)
3. Средствами алгебры логики

**№1.** Мастер спорта Седов, кандидат в мастера Чернов, перворазрядник Рыжов встретились в клубе перед началом турнира. «Обратите внимание» - заметил черноволосый – «один из нас седой, другой рыжий, а третий черноволосый. Но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии. Забавно, не правда ли? «Ты прав» - подтвердил мастер. Какого цвета волосы у кандидата и мастера?

## 1. Табличный

	С	Ч	Р
Седов (м)	-	-	+
Чернов (к.м.)	+	-	-
Рыжов (1 р.)	-	+	-

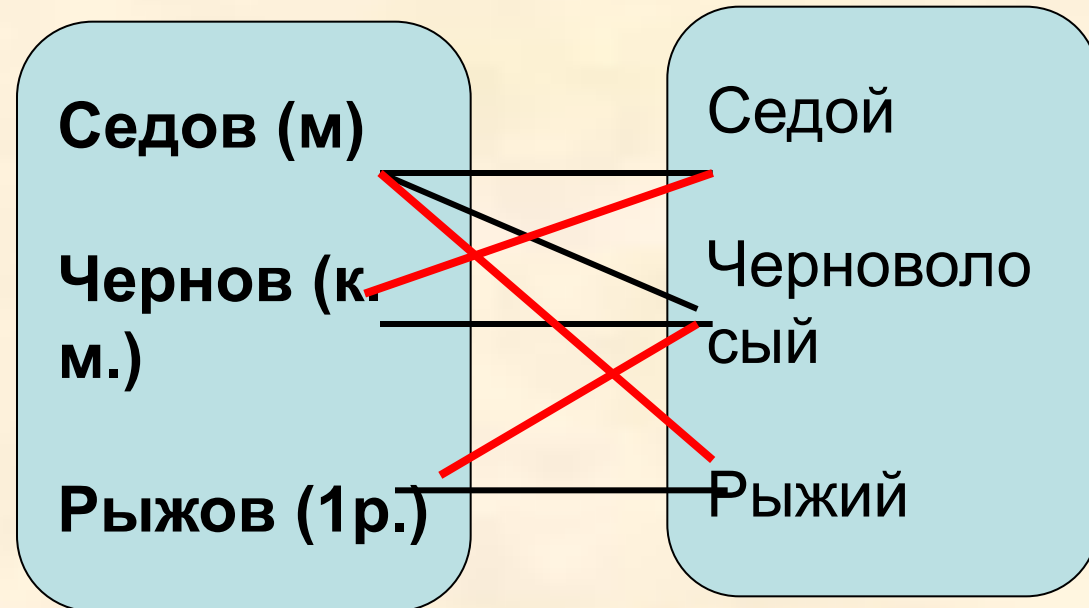
**Ответ:**

**Седов рыжий**

**Чернов седой**

**Рыжов черноволосый**

## 2. Графический



# Решение задач средствами алгебры логики

## Алгоритм:

1. Изучить условие задачи.
2. Выделить простые условия и обозначить их буквами.
3. Записать условия на языке алгебры логики.
4. Составить конечную формулу, для этого:
  - объединить логическим умножением формулы каждого утверждения,
  - приравнять произведение к 1.
5. Упростить формулу, проанализировать полученные результаты, **или** составить таблицу истинности, найти по ТИ значения переменных, для которых  $F=1$ , проанализировать результаты.

### 3. Средствами алгебры логики

Выделим простые условия: Составим логическое выражение:

$$A = \text{«Седов черноволосый»} \quad (A \vee B) \& (C \vee D) \& (E \vee F) \& \neg A = 1$$

$B = \text{«Седов рыжий»}$

Упростим:

$C = \text{«Чернов седой»}$

$$(A \vee B) \& (C \vee D) \& (E \vee F) \& \neg A =$$

$D = \text{«Чернов рыжий»}$

$$((A + B) \cdot (C + D)) \cdot (E + F) \cdot \neg A =$$

$E = \text{«Рыжов черноволосый»}$

$$(AC + AD + BC + \mathbf{BD}) \cdot (E + F) \cdot \neg A =$$

$F = \text{«Рыжов седой»}$

$$(\mathbf{ACE} + \mathbf{ADE} + \mathbf{BCE} + \mathbf{ACF} + \mathbf{ADF} + \mathbf{BCF}) \cdot \neg A$$

**Тогда:**

**Но,**

$$A \vee B = 1$$

$$AB = 0$$

$$C \vee D = 1$$

$$CD = 0$$

$$E \vee F = 1$$

$$EF = 0$$

$$\neg E \wedge A = 1$$

$$AE = 0$$

$$BD = 0$$

$$CF = 0$$

$$= (BCE + ADF) \cdot \neg A =$$

$$BCE \cdot \neg A + \mathbf{ADF} \cdot \neg A$$

**$BCE \cdot \neg A = 1$**  Следовательно,

**Ответ:**

**$B = 1$ , Седов рыжий**

**$C = 1$ , Чернов седой**

**$E = 1$ , Рыжов черноволосый**



**№2.** В каждой из двух аудиторий может находиться либо каб. Информатики, либо каб. Физики. Таблички: на первой - «По крайней мере в одной из аудиторий размещается кабинет информатики», на второй - «Кабинет физики находится в другой аудитории». Известно, что надписи либо обе Истинны, либо обе Ложны. Найдите кабинет информатики.

**Решение.**

A=«В 1-ой ауд. каб. Информатики»

B=«Во 2-ой ауд. каб. Информатики»

$\bar{A}$  = «В 1-ой ауд. каб. Физики»

$\bar{B}$  = «Во 2-ой ауд. каб. Физики»

$$1) X=(A \vee B)$$

$$2) Y=\text{He } A$$

$$(X \ \& \ Y) \vee (\bar{X} \ \& \ \bar{Y}) = 1$$

$$\begin{aligned} (X \ \& \ Y) \ \& \ \bar{Y} &= ((A \ \vee \ B) \ \& \ \bar{A}) \ \vee \ (\overline{(A \ \vee \ B)} \ \& \ \bar{A}) = \\ ((A + B) \cdot \bar{A}) + (\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot A) &= (A\bar{A} + B\bar{A}) + (0 \cdot \bar{B}) = B \ \& \ \bar{A} = 1 \end{aligned}$$

Сл-но, B=1 и  $\bar{A}=1$  **Ответ: «В 1-ой ауд. каб. Физики»**

**«Во 2-ой ауд. каб. Информатики»**

**№3.** В школьном первенстве по настольному теннису в четверку лучших вошли девушки: Наташа, Маша, Люда и Рита. Самые горячие болельщики высказали свои предположения о распределении мест в дальнейших состязаниях.

Один считает, что **первой будет Наташа, а Маша будет второй.**

Другой болельщик на **второе место прочит Люду, а Рита, по его мнению, займет четвертое место.**

Третий любитель тенниса с ними не согласился. Он считает, что **Рита займет третье место, а Наташа будет второй.**

Когда соревнования закончились, оказалось, что **каждый из болельщиков был прав только в одном из своих прогнозов.**

Какое место на чемпионате заняли Наташа, Маша, Люда, Рита?

(В ответе перечислите подряд без пробелов числа, соответствующие местам девочек в указанном порядке имен.)

**Решение:**

$$A \vee B = 1, C \vee D = 1, E \vee F = 1$$

$$(A \vee B) \& (C \vee D) \& (E \vee F) = 1$$

A = «Наташа 1 м.»

B = «Маша 2 м.»

C = «Люда 2 м.»

D = «Рита 4 м.»

E = «Рита 3 м.»

F = «Наташа 2 м.»

Но,

$$A \& F = 0$$

$$B \& C = 0$$

$$B \& F = 0$$

$$C \& F = 0$$

$$D \& E = 0$$

$$(A \vee B) \& (C \vee D) \& (E \vee F) =$$

$$((A + B)(C + D))(E + F) =$$

$$(AC + AD + BC + BD)(E + F) =$$

$$(AC + AD + BD)(E + F) =$$

$$ACE + ADE + BDE +$$

$$ACF + ADF + BDF = ACE = 1$$

$$A = 1, C = 1, E = 1$$

1 м – Наташа

2 м – Люда

3 м – Рита

4 м – Маша

**О: 1423**

**№4.** Три школьника, Миша (М), Коля (К) и Сергей (С), оставшиеся в классе на перемене, были вызваны к директору по поводу разбитого в это время окна в кабинете. На вопрос директора о том, кто это сделал, мальчики ответили следующее:

Миша: «Я не бил окно, и Коля тоже...»

Коля: «Миша не разбивал окно, это Сергей разбил футбольным мячом!»

Сергей: «Я не делал этого, стекло разбил Миша».

Стало известно, что один из ребят сказал чистую правду, второй в одной части заявления соврал, а другое его высказывание истинно, а третий оба факта исказил. Зная это, директор смог докопаться до истины.

Кто разбил стекло в классе? В ответе запишите только первую букву имени.

**Решение:**

A=«Миша разбил»

B=«Коля разбил»

C=«Сергей разбил»

$$(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 1$$

$$(\bar{A} \vee C) = 1 \dots (\bar{C} \vee A) = 0$$

$$(\bar{A} \vee \bar{B}) \& (\bar{A} \vee C) \& (\bar{C} \vee A) = 1$$

$$(\bar{A} + \bar{B})(\bar{A} + C)(\bar{C} + A) =$$

$$(\bar{A} \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot C + \bar{B} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot C)(\bar{C} + A) =$$

$$(\bar{A} + \bar{A} \cdot C + 1 + \bar{B} \cdot C)(\bar{C} + A) =$$

$$(\bar{A} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot C \cdot \bar{C} + 1 \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C \cdot \bar{C}) =$$

$$\bar{A} \cdot \bar{C} + \bar{C} = \bar{C}(\bar{A} + 1) = 1$$

$$\bar{C} = 1 \dots \bar{A} + 1 = 1 \dots \bar{A} = 0 \dots \bar{A} = 1$$

**Ответ: М - Миша разбил**

# Логические основы устройства компьютера

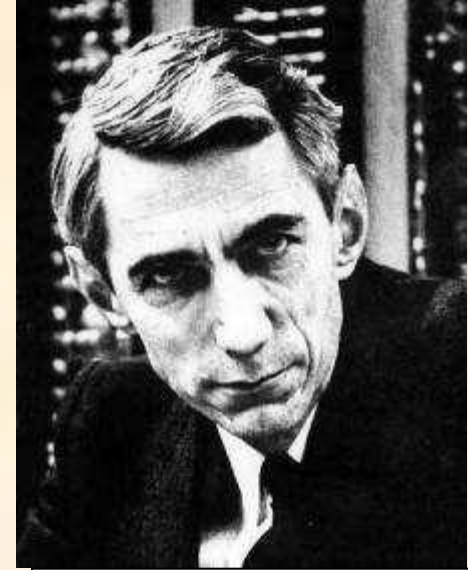
Двоичная система оказалась удобной в качестве языка логики. Это поняли спустя 100 лет после работ Буля.



(1839 - 1914)

С 1886 г. американский логик **Чарльз Сандерс Пирс** (в честь его названа логическая операция – «стрелка Пирса») работает над модификацией и расширением булевой алгебры. Пирс первый осознал, что бинарная логика имеет сходство с работой электрических переключательных схем. Электрический переключатель либо пропускает ток (истина), либо не пропускает (ложь). Пирс даже придумал простую электрическую логическую схему, но так и не собрал ее.

Американец **Клод Шеннон** – основоположник теории информации, разработчик теоретических основ вычислительной техники, математик и специалист по электронике *раскрыл связи между двоичным кодированием, алгеброй логики и электрическими схемами (релейными), т.е. наполнил логические выражения физическим смыслом, создал алгебру релейных схем, на которой основана теория бесконтактных логических элементов.*



1916 – 2001гг.

**Принципы работы вычислительных машин в своей основе просты.**

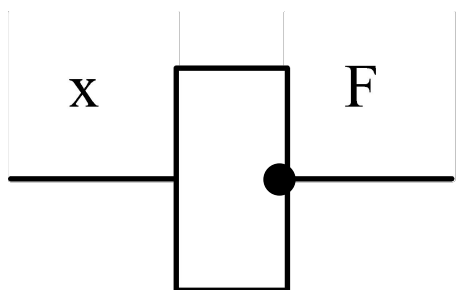
Работа ЭВМ состоит в операциях над числами и символами, закодированными двумя цифрами – 0 и 1, и пересылке этой информации по линиям связи. А работа всех устройств ЭВМ заключается в операциях над этими последовательностями из 0 и 1

Средством обработки двоичных сигналов в ЭВМ являются логические элементы.  
Для реализации любых логических операций над двоичными сигналами достаточно элементов **трех типов** – элементов, реализующих три основные логические операции: **И, ИЛИ, НЕ.**

**Логические элементы** - это электронные схемы с одним или несколькими входами и одним выходом, через которые проходят электрические сигналы, представляющие цифры 0 и 1.

# Основные логические элементы (вентили):

## 1. Элемент НЕ (инвертор) Функция: Таблица истинности:

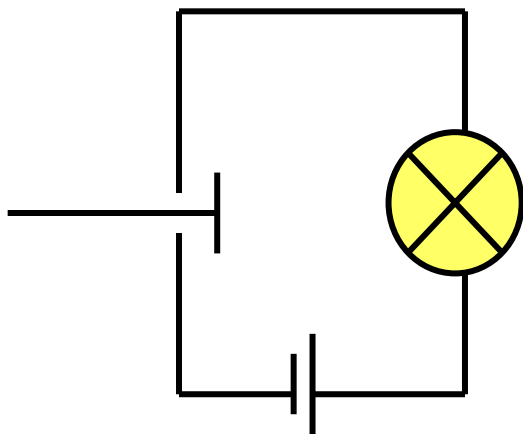


$$F = \text{не } X$$

$$F = \bar{x}$$

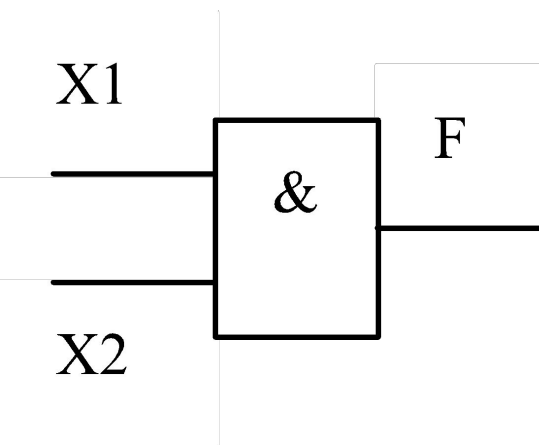
X	F
0	1
1	0

У инвертора один вход и один выход. Сигнал на выходе **F** появится тогда, когда на входе его нет, и наоборот.



Лампочка горит, если выключатель не включен

## 2. Элемент И Конъюнктор (логическое умножение)



**Функция:**

$$F = x1 \text{ и } x2$$

$$F = x1 \wedge x2$$

$$F = x1 \cdot x2$$

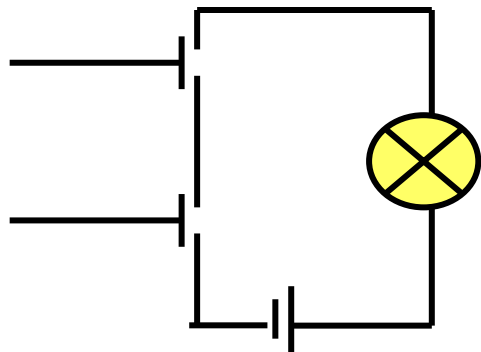
$$F = x1 \& x2$$

**Таблица ИСТИННОСТИ:**

x1	x2	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Элемент **И** имеет не менее двух входов и один выход. X1, X2 - входные сигналы, F – выходной сигнал.

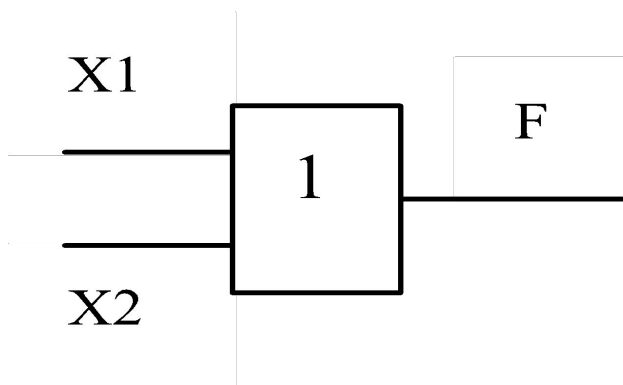
Логика элемента И заключается в том, что на его выходе F будет сформирован сигнал 1 тогда и только тогда, когда на каждом из его входов будет сигнал 1.



Лампочка горит тогда и только тогда, когда включены оба выключателя



### 3.Элемент **ИЛИ** (Дизъюнкция, логическое сложение)



Функция:

$$F = x1 \text{ или } x2$$

$$F = x1 \vee x2$$

$$F = x1 + x2$$

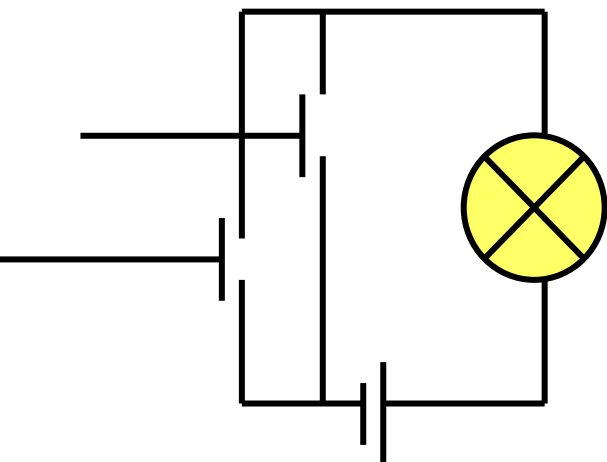
Таблица истинности:

x1	x2	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Имеет не менее двух входов и один выход.

Сигнал

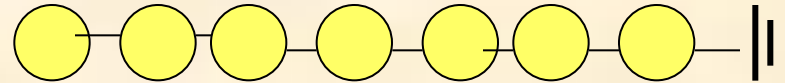
0 на выходе F элемента ИЛИ появится только в том случае, если сигнал 1 не поступил ни на один из входов.



Лампочка горит, если включен хотя бы один выключатель

## Примеры:

1. В старых елочных гирляндах лампочки включались последовательно. Гирлянда работала тогда и только тогда, когда все лампочки были исправны. На какую логическую операцию это похоже?



**Логическое умножение:  $F=A \& B \& C \& D$**

2. В современных гирляндах лампочки подключены параллельно. На какую логическую операцию это похоже?

**Логическое сложение:  $F=A \vee B \vee C \vee D$**

3. Выключатель. Если свет не горел, то его включают, если горел – выключают. **Инверсия**

В роли “элементарной частицы” в ЭВМ всегда выступает разновидность выключателя. И если правильно соединить очень много выключателей и поставить очень много людей, которые будут ими щелкать в нужный момент, то получится вычислительная машина.

С помощью логических элементов **НЕ, И, ИЛИ** можно реализовать (собрать как из конструктора) типовые функциональные узлы (блоки) ЭВМ:

- ❖ *триггеры*
- ❖ *сумматоры*
- ❖ *шифраторы*
- ❖ *регистры*
- ❖ *счетчики*
- ❖ *дешифраторы*

Чтобы понять, как работает интересующее нас устройство, необходимо понять логику его работы, т.е. найти соответствие между входными и выходными сигналами, **для этого:**

- ✓ **составить таблицу истинности**
- ✓ **по таблице записать логическую функцию**
- ✓ **построить логическую схему**

## ПОСТРОЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И СХЕМ ПО ЗАДАННОЙ ТАБЛИЦЕ :

- I. Выписывается таблица истинности функции.
- II. По данной таблице определяется логическая функция (формула) с помощью следующего метода, называемого **дизъюнктивная совершенная нормальная форма (ДСНФ)**:
  1. В заданной таблице выбираются наборы переменных, при которых значения функции равно 1.
  2. Для каждого такого набора записываются конъюнкции ( $\wedge$ ) всех входных переменных, имеющие значение 1. При этом те переменные, которые имеют значение 0, записываются с отрицанием.
  3. Все полученные конъюнкции объединяются знаками дизъюнкции ( $\vee$ ). Это и будет искомая логическая функция, которую можно будет упростить (минимизировать) по законам Булевой алгебры.
- III. По упрощенной логической функции строится логическая схема

**Пример.** По заданной таблице истинности записать логическую функцию, упростить ее и построить логическую схему.

x	y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\begin{aligned} &\bar{x} \wedge \bar{y} \\ &\bar{x} \wedge y \\ &x \wedge \bar{y} \end{aligned}$$

1. Запишем **конъюнкцию** для каждой строки, где значение функции = **1**. Переменные, значения которых равны **0**, запишем с **отрицанием**.

2. Объединив полученные конъюнкции дизъюнкцией, получим следующую логическую функцию.

$$F = (\bar{X} \wedge \bar{Y}) \vee (\bar{X} \wedge Y) \vee (X \wedge \bar{Y})$$

3. Упростим:  $F = (\bar{X} \wedge \bar{Y}) \vee (\bar{X} \wedge Y) \vee (X \wedge \bar{Y}) = \bar{X} \vee (X \wedge \bar{Y})$

4. По полученной функции построим логическую схему:

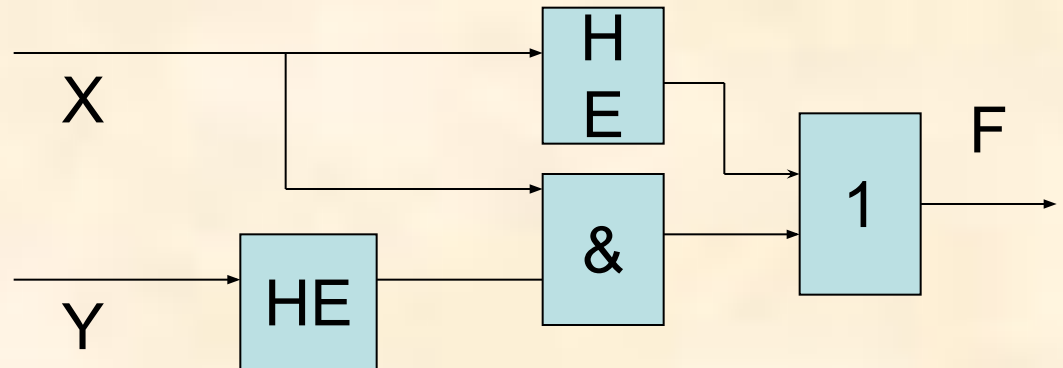
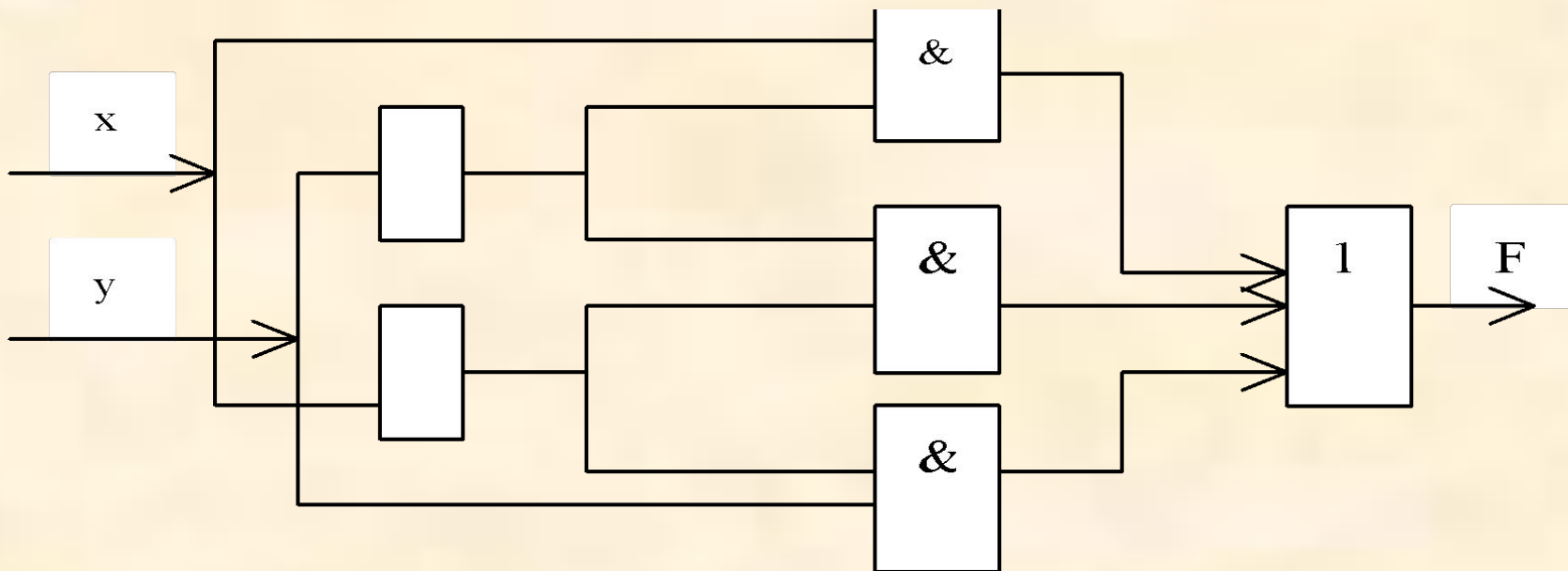


Схема по не упрощенной логической функции

$$F = (\bar{X} \wedge \bar{Y}) \vee (\bar{X} \wedge Y) \vee (X \wedge \bar{Y})$$



### 3. Составить схему, работа которой задана таблицей истинности:

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

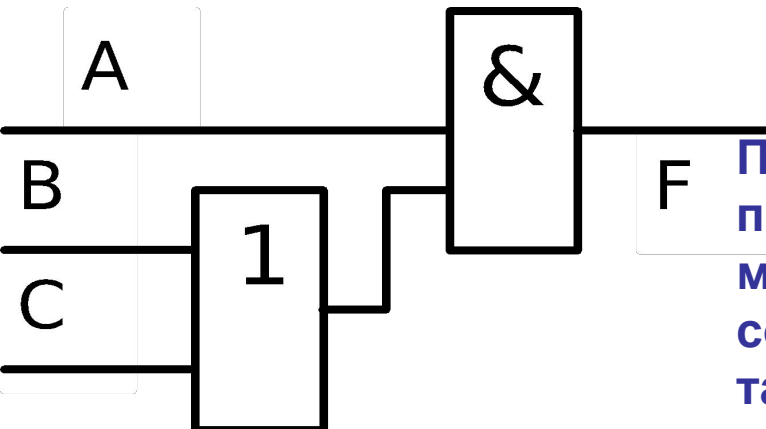
а) Составим логическую формулу схемы:

$$F = (A \wedge \bar{B} \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

б) Упростим полученную формулу:

$$\begin{aligned} F &= (A \wedge \bar{B} \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge B \wedge C) = \\ &= (A \wedge \bar{B} \wedge C) \vee (A \wedge B) \vee (C \wedge \bar{C}) = (A \wedge \bar{B} \wedge C) \vee (A \wedge B) = \\ &= A \wedge (B \vee (\bar{B} \wedge C)) = A \wedge (B \vee C) \end{aligned}$$

в) по упрощенной (минимизированной) функции составим логическую схему:



Правильность полученной формулы можно проверить сопоставлением таблиц истинности по последним столбцам.

A	B	C	$A \wedge (B \vee C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

# ПОСТРОЕНИЕ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ И ЛОГИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННОЙ ЛОГИЧЕСКОЙ СХЕМЕ

**Задание.** Запишите логическую функцию, описывающую состояние схемы, составьте таблицу истинности:

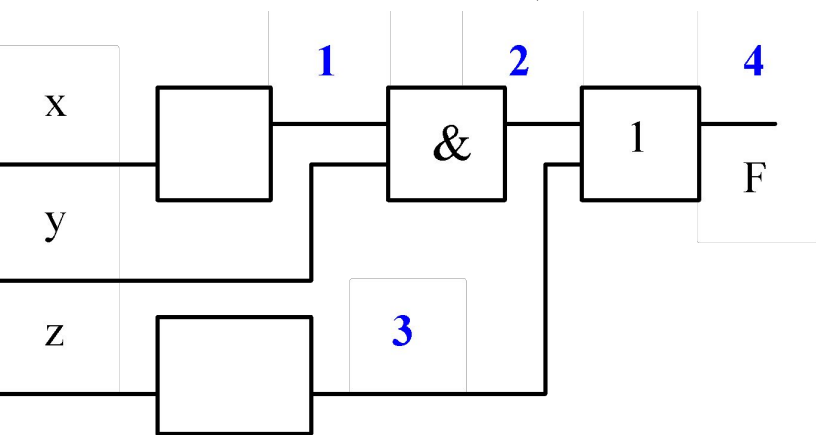


Таблица истинности:

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{x} \wedge y$	$\bar{z}$	$(\bar{x} \wedge y) \vee \bar{z}$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Для записи функции необходимо записать значения на выходе каждого элемента схемы:

1.  $\bar{x}$
2.  $\bar{x} \wedge y$
3.  $\bar{z}$
4.  $(\bar{x} \wedge y) \vee \bar{z}$

Следовательно получится функция:  $F = (\bar{x} \wedge y) \vee \bar{z}$



# ЗАДАНИЕ

I. По заданным таблицам истинности запишите логические функции, составьте логические схемы.

1.

A	B	F(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$F = (\bar{A} \& B) \vee (A \& \bar{B})$$

$$\bar{A} \& B$$

$$A \& \bar{B}$$

2.

A	B	F(A,B)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

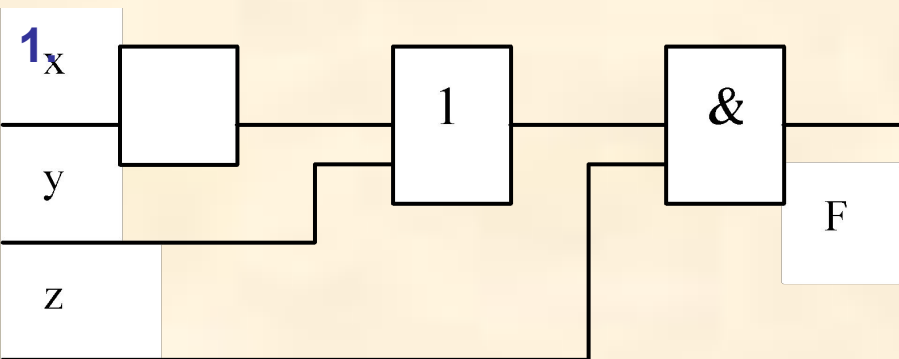
$$\bar{A} \& \bar{B}$$

$$\bar{A} \& B$$

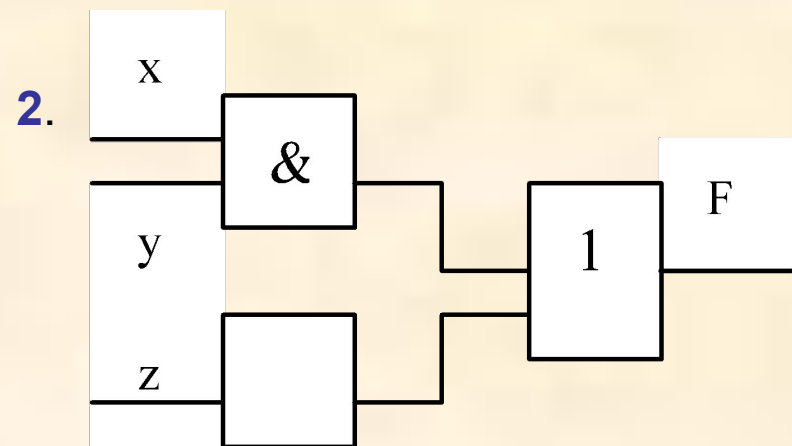
$$A \& B$$

$$F = (\bar{A} \& \bar{B}) \vee (\bar{A} \& B) \vee (A \& B)$$

II. Запишите логическую функцию, описывающую состояние схемы, постройте таблицу истинности:



$$F = (\bar{X} \vee Y) \& Z$$



$$F = (X \& Y) \vee \bar{Z}$$

III. Упростите:

1.  $(A \wedge B \wedge C) \vee (\bar{A} \wedge B \wedge C)$   
 $= B \wedge C$

2.  $(A \vee \bar{B} \vee C) \wedge \overline{(A \vee B \vee C)}$

**Триггер** (*trigger* - защелка, спусковой крючок) – запоминающее устройство (хранит 1 бит информации)

**Триггер** имеет

**два входа:**

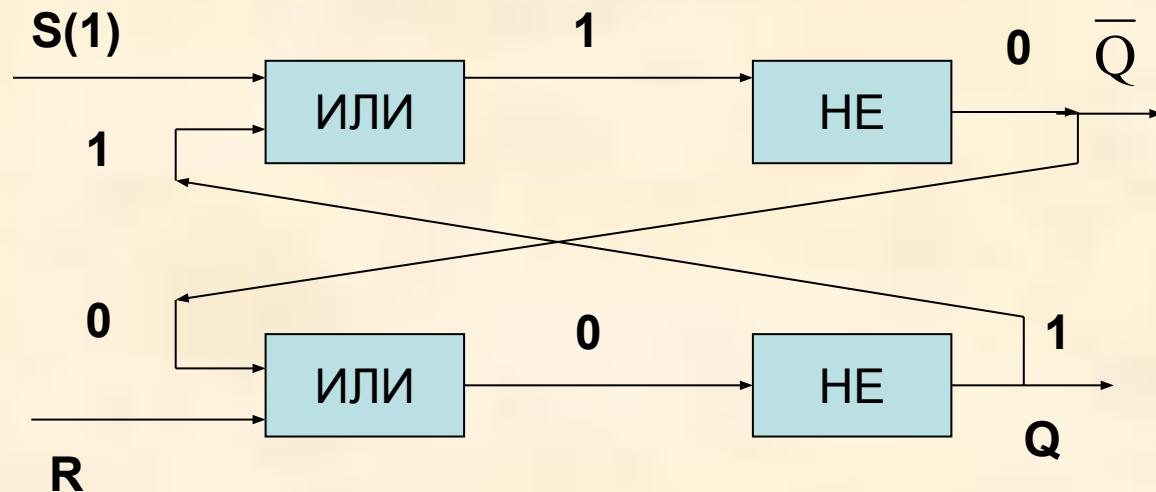
**S** (set – установка) и

**R** (reset – сброс) и

**два выхода**

**Q** (прямой) и

**НЕQ** (инверсный)

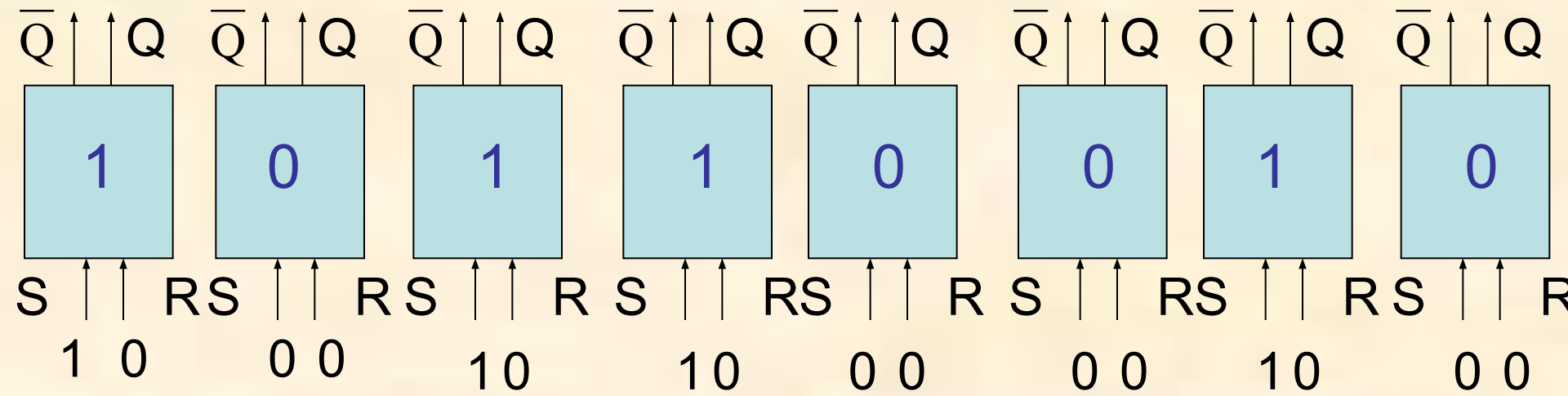


Входы		Состояние Q
S	R	
0	0	Q
1	0	1
0	1	0
1	1	<b>Недопустимо</b>

В обычном состоянии на входы триггера подан сигнал «0» и триггер хранит «0». Для записи «1» на вход S (set – установочный) подается сигнал «1». При последовательном рассмотрении прохождения сигнала по схеме видно, что триггер переходит в это состояние и будет устойчиво находиться в нем и после того, как сигнал на входе S исчезнет. Триггер запомнил «1», т.е. с выхода триггера Q можно считывать «1».

Чтобы сбросить информацию и подготовиться к приему новой, на вход R (сброс) подается сигнал «1», после чего триггер возвратится к исходному «нулевому» состоянию.

**Регистр** – устройство, состоящее из последовательности триггеров. Предназначен для хранения многоразрядного двоичного числового кода, которым может быть представлять и адрес, и команду, и данные



**Число триггеров в регистре называется разрядностью компьютера**, которая может быть равна 8, 16, **32**, **64**.

# Задачи.

1. Сколько триггеров необходимо для хранения информации объемом:

1 байт - **8**

1 Кбайт - **8192**

1 Мбайт - **8388608**

**Сумматор** – устройство для сложения двоичных чисел. Сумматор – основа микропроцессора, т.к все операции в микропроцессоре сводятся к сложению.

**Полусумматор** – реализует суммирование одноразрядных двоичных чисел **без учета переноса из младшего разряда.**

Слагаемые		Перенос	Сумма
A	B	P	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

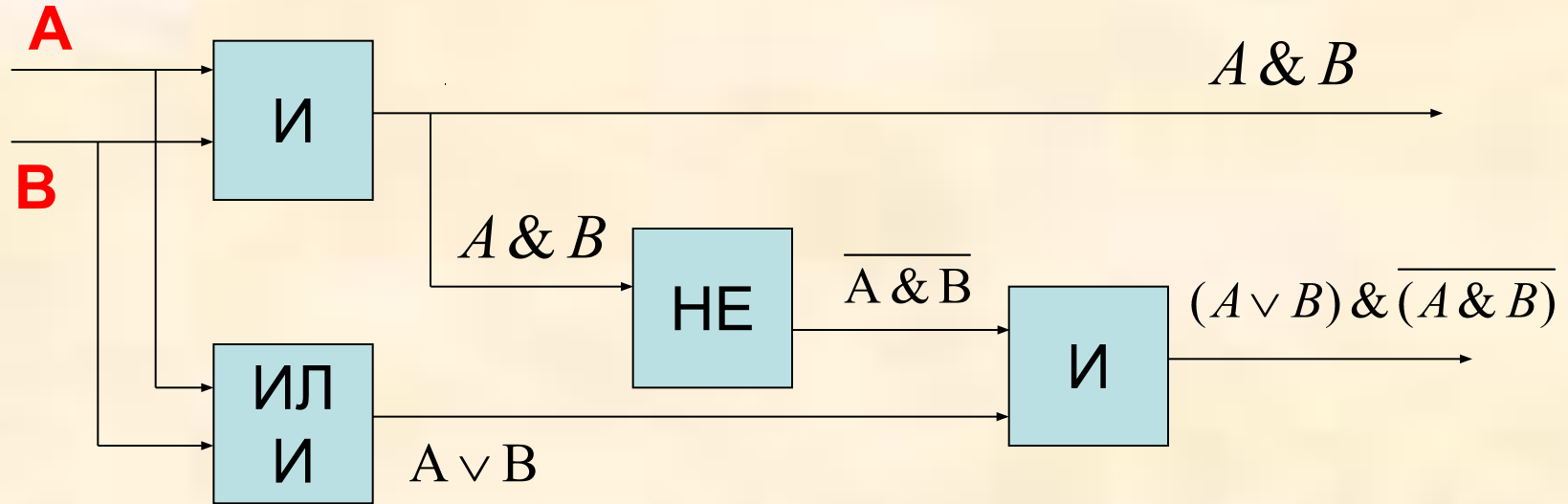
$P = A \& B$   
 Значения S будут соответствовать сумме, если результат логического сложения умножить на инверсный перенос.  
 Тогда

$$S = (A \vee B) \& \overline{(A \& B)}$$

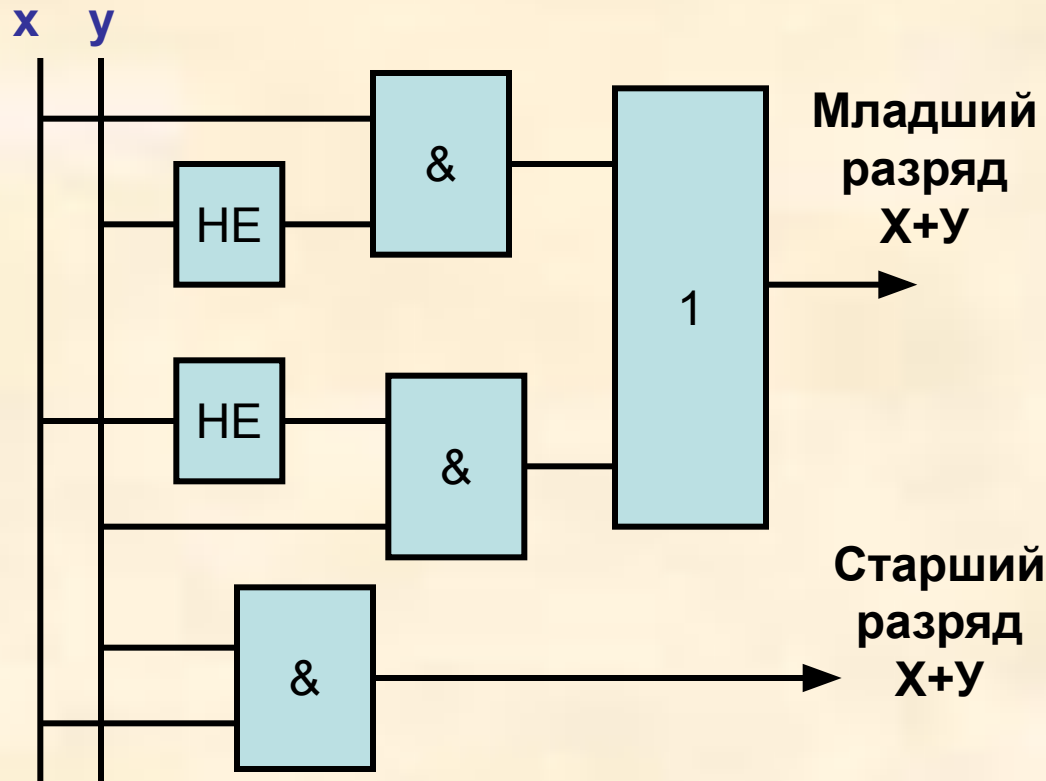
A	B	$A \vee B$	$A \& B$	$\overline{A \& B}$	$(A \vee B) \& \overline{(A \& B)}$
0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0

# Схема полусумматора двоичных чисел:

$$S = (A \vee B) \& \overline{(A \& B)}$$



# Сумматор для двух одноразрядных чисел



Подавая на входы  $x$  и  $y$  сигналы 0 и 1, на выходах получим два сигнала, которые поразрядно кодируют сумму двух однозначных чисел.

А т.к. действия над числами, записанными в позиционной системе счисления, выполняются поразрядно, то ясно, что аналогичным образом можно построить электронные схемы для сложения многозначных чисел, представленных в двоичной системе счисления

$x$	$y$	Старший разряд	Младший разряд
0	0		
1	0		
0	1		
1	1		