

Операции алгебры логики

Высказывание в логике является аналогом выражения в арифметике:

- В **алгебре чисел** из **чисел** при помощи операций **+**, **-**, *****, **/** и **(,)** можно составлять арифметические выражения.
- В **логике** из **простых высказываний** (истина, ложь) можно составлять логические выражения (**составные высказывания**) с использованием логических операций.

Обозначения логических значений

НАПРИМЕР:

A, B – логические переменные, которые могут иметь значение ИСТИНА (**И**), ЛОЖЬ (**Л**).

$A = 2 + 2 = 4;$

$B = \text{рыбы живут на суше};$

Таблица истинности

- таблица,
устанавливающая
соответствие между
возможными
значениями наборов
логических
переменных и
значениями
функции.

A	B	$f(A,B)$ <i>(например)</i>
л	л	л
л	И	И
И	л	И
И	И	И

Введем обозначения: **0** – ЛОЖЬ, **1** - ИСТИНА

Основные логические операции

И – логическое умножение,

ИЛИ – логическое сложение,

НЕ – логическое отрицание.

Простые высказывания могут быть связаны между собой словами **И**, **ИЛИ**, **НЕ**. Получившееся высказывание – **сложное высказывание**.

Логическое умножение (конъюнкция)

- Соединение двух простых высказываний в одно составное с помощью операции **И**.

Полученное сложное высказывание – логическое произведение (конъюнкция).

Обозначение: $\&$, \wedge , \cdot , \times – математическим знаком умножения или опуская его.

Произведение двух высказываний A , B истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.

Таблица истинности:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Например:

«Солнце светит и нет дождя»

Обозначим:

$A = \text{«Солнце светит»},$

$B = \text{«нет дождя»}.$

$C = A \wedge B$

$C = \text{«Солнце светит и нет дождя»}.$

Логическое сложение (дизъюнкция)

Разъяснение:

Союз ИЛИ в обиходе применим в двух различных значениях:

в исключаяющем и неисключаяющем смысле.

Например:

- «*Обычно в 8 вечера я смотрю телевизор или пью чай*» - союз «или» взят в **неисключаяющем** (объединительном) смысле, так как мы можем и смотреть телевизор и одновременно пить чай.
- «*Данный глагол I или II спряжения*» - союз «или» используется в **исключаяющем** (разделительном) смысле.

Примеры строгих и нестрогих дизъюнкций:

Высказывание	Вид дизъюнкции
Петя сидит на западной или восточной трибуне стадиона	Строгая
Студент едет в электричке или читает книгу	Нестрогая
Ты выйдешь замуж или за Петю, или за Сашу	Строгая
Завтра дождь будет или не будет (третьего не дано)	Строгая
Давайте бороться за чистоту. Чистота достигается так: или не сорить, или часто убирать.	Нестрогая

Логическое сложение (дизъюнкция)

- Соединение двух простых высказываний в одно составное с помощью операции **ИЛИ**, употребляемой в неисключающем смысле.

Полученное сложное высказывание – логическая сумма (дизъюнкция).

Обозначается \vee , $+$.

Таблица истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1 ₁₀

Сумма двух высказываний A, B истинна тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно высказывание.

Например:

«Студент едет в электричке или читает книгу»

Обозначим:

A = «Студент едет в электричке»,

B = «Студент читает книгу».

C = A \vee B

C = «Студент едет в электричке или читает книгу».

Логическое отрицание (инверсия)

Присоединение частицы **НЕ** к сказуемому данного высказывания **A**, или словосочетания «**неверно, что**» ко всему высказыванию

Полученное новое высказывание называется отрицанием высказывания **A** или логическое отрицание.

Обозначение: $\neg A$, \bar{A} .

Если **A** – истинное высказывание, то $\neg A$ – ложное высказывание, и наоборот.

Таблица истинности:

Отрицание истинного высказывания есть ложь.

A	$\neg A$
0	1
1	0

Например:

«Число 5 является делителем числа 30»

Обозначим:

A = «Число 5 является делителем числа 30»,

\bar{A} = «Число 5 **НЕ** является делителем числа 30».

K = «Некоторые цыплята - кошки»,

$\neg K$ = «**Неверно, что** некоторые цыплята - кошки».

D = «Идет дождь»,

$\neg D$ = «**Неверно, что** идет дождь».

При образовании сложных высказываний из простых можно использовать несколько логических операций.

Приоритет выполнения операций
(если нет скобок):

I – НЕ,

II – И,

III – ИЛИ.

Операции инверсия, конъюнкция и дизъюнкция являются **основными операциями** алгебры логики и называются **булевыми** операциями.

Существуют другие логические операции. Но они могут быть выражены через основные, поэтому их можно назвать **функциями**.

Эквивалентность

Обозначение: \sim

Логическая связка «ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА»

Сложное высказывание $A \sim B$ (A эквивалентно B) истинно тогда и только тогда, когда и A и B истинны, или когда и A и B – ложны.

Определение через основные функции:

$$A \sim B = \square A \wedge \square B \vee A \wedge B$$

A	B	$A \sim B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1 ⁶

Например:

A = Площадь квадрата больше единицы,

B = Сторона квадрата больше единицы.

Их соединение эквивалентностью:

***A ~ B = Площадь квадрата больше единицы
тогда и только тогда, когда сторона
квадрата больше единицы.***

Исключающее ИЛИ (строгая дизъюнкция)

Обозначение: $A \oplus B$ Логическая связка «ЛИБО..., ЛИБО»

Высказывание, соответствующее **исключающему или**, похоже на дизъюнкцию, но исключает одновременную истинность обоих высказываний

Строгая дизъюнкция истинна только тогда, когда одно высказывание истинно, а другое ложно.

Определение через основные функции:

$$A \oplus B = A \wedge \neg B \vee \neg A \wedge B$$

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Импликация

Обозначение: $A \rightarrow B$ Логическая связка
«ЕСЛИ..., ТО» (логическое следование одного
высказывания из другого)

Импликация $A \rightarrow B$ истинна всегда, за исключением
случая, когда A истинно, а B ложно.

Определение через основные
функции:

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1 ¹⁹

Например:

***A** = На улице дождь.*

***B** = Асфальт мокрый.*

$A \rightarrow B$ = «Если на улице дождь, то асфальт мокрый».

Тогда,

- если идет дождь (**A = 1**) и асфальт мокрый (**B = 1**), то это правильно.
- Но если вам скажут, что на улице идет дождь (**A = 1**), а асфальт остается сухим (**B = 0**), то вы посчитаете это ложью.
- А вот когда дождя на улице нет (**A = 0**), то асфальт может быть и сухим, и мокрым (например, только что проехала поливальная машина).

A – идет дождь;

B – асфальт мокрый;

$\neg A$ – дождя нет;

$\neg B$ – асфальт сухой.

A	B	A \rightarrow B	Пояснение:
0	0	1	Если дождя нет, то асфальт сухой. Истина
<i>Дождя нет</i>	<i>Асфальт сухой</i>	<i>Истина</i>	
0	1	1	Если дождя нет, то асфальт мокрый. Истина
<i>Дождя нет</i>	<i>Асфальт мокрый</i>	<i>Истина</i>	
1	0	0	Если дождь идет, то асфальт сухой. Ложь
<i>Дождь идет</i>	<i>Асфальт сухой</i>	<i>Ложь</i>	
1	1	1	Если дождь идет, то асфальт мокрый. Истина
<i>Дождь идет</i>	<i>Асфальт мокрый</i>	<i>Истина</i>	

Сводная таблица логических операций

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \rightarrow B$	$A \sim B$
Высказывание	Высказывание	Отрицание A	Конъюнкция	Дизъюнкция	Дизъюнкция (строгая)	Импликация	Эквивалентность
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

Приоритет выполнения логических операций (если нет скобок)

Приоритет	Операция		Обозначение
I (Высший)	НЕ	NOT	$\neg, \bar{\quad}$
II (Высокий)	И	AND	\wedge, \cdot
III (Средний)	ИЛИ, Искл. ИЛИ	OR, XOR	$\vee, +$ \oplus
IV (Низкий)	ЕСЛИ ТО	IMP	\rightarrow
V (Низший)	Эквивалент ность	EQU	\sim

Например:

$$\neg A \vee B \wedge C \rightarrow C \wedge A \sim B \oplus C \oplus A$$

$$(((\neg A) \vee (B \wedge C)) \rightarrow (C \wedge A)) \sim ((B \oplus C) \oplus A)$$

1 3 2 5 4 8 6 7

$$\neg A \vee B \wedge C \rightarrow C \wedge A \sim B \oplus C \oplus A$$

Перевод логических операций на естественный язык:

Операция	Обозначение	Перевод на естественный язык
Инверсия (отрицание)	$\bar{A}, \neg A$	не А; неверно, что А
Конъюнкция (логическое произведение)	$AB, A \wedge B, A \text{ и } B, A \text{ and } B, A \times B, A \& B, A \cdot B$	и А и В; как А, так и В ; А вместе с В; А несмотря на В; А, в то время как В
Дизъюнкция простая (логическая сумма, неисключающее ИЛИ)	$A+B, A \vee B,$ А или В, А or В	А или В
Дизъюнкция строгая (исключающее ИЛИ)	$A \oplus B$	или А или В; либо А либо В
Импликация	$A \rightarrow B$	если А, то В; В если А; В необходимо для А; А достаточно для В; А только тогда, когда В; В тогда, когда А; все А есть В
Эквивалентность	$A \sim B$	А равно В; А эквивалентно В; А необходимо и достаточно для В; А тогда и только тогда, когда В

Пример:

Изобразить в виде формулы суждение:

**«Я обязательно поеду на
футбольный матч, если достану
билет или меня пригласит
товарищ и если не будет дождя».**

Поездка на стадион зависит от условий:

- **я достану билет – я не достану билет;**
- **меня пригласит товарищ – меня не пригласит товарищ;**
- **будет дождь – не будет дождя.**

Введем обозначения:

Б – я достану билет;

Б – я не достану билет;

П – меня пригласит товарищ;

П – меня не пригласит товарищ;

Д – будет дождь;

Д – не будет дождя.

Сложное высказывание: «***Я достану билет или меня пригласит товарищ и не будет дождя***»

$B \wedge \neg D \vee P \wedge \neg D$

или, то же самое –

$B \cdot \overline{D} + P \cdot \overline{D}$

Данное высказывание равносильно поездке на матч – М

$$M = B \cdot \neg D + P \cdot \neg D$$

Составление таблицы истинности для сложного высказывания. (Например: $\neg A \cdot (B + C)$.)

Правило:

1. Число исходных столбцов равно числу переменных (простых высказываний) – n . (в примере $n = 3$);
2. Число строк равно 2^n . (у нас: $2^n = 2^3 = 8$).
3. Порядок заполнения строк для исходных столбцов:
1-й столбец. Число строк ($2^3 = 8$) делится пополам. Верхняя половина заполняется нулями, нижняя – единицами.
2-й столбец. Число строк делится на 4 части. Первая четверть заполняется **0**, вторая – **1**, третья – снова **0**, четвертая **1**.
4. В первых строках таблицы выписаны возможные наборы комбинаций значений истинности простых высказываний (A, B, C). В следующих столбцах – значения истинности последовательно выполняемых операций и окончательного результата.

$$\neg A \cdot (B + C)$$

A	B	C	$\neg A$	$B + C$	$\neg A \cdot (B + C)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

Самостоятельная работа

1. Составить таблицу истинности:

$$M = B \cdot \neg D + P \cdot \neg D$$

2. Изобразить в виде формулы:

«Если сегодня будет хорошая погода, я пойду на прогулку, или буду делать уроки, если погода будет плохая.»

Доказать справедливость тождества

$$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$$

A	B	C	$B \cdot C$	$A + B \cdot C$	$A + B$	$A + C$	$(A + B) \cdot (A + C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Столбцы равны. Тождество доказано.

Доказать справедливость тождества

$$\neg A + \neg B = \neg(A \& B)$$