Теорема Виета

Секция «Созидательная сила великих открытий в математике»

Автор:

Плющев Иван Олегович

9 а класс

МБОУ СОШ №12

Руководитель:

Прокофьева Тамара Александровна

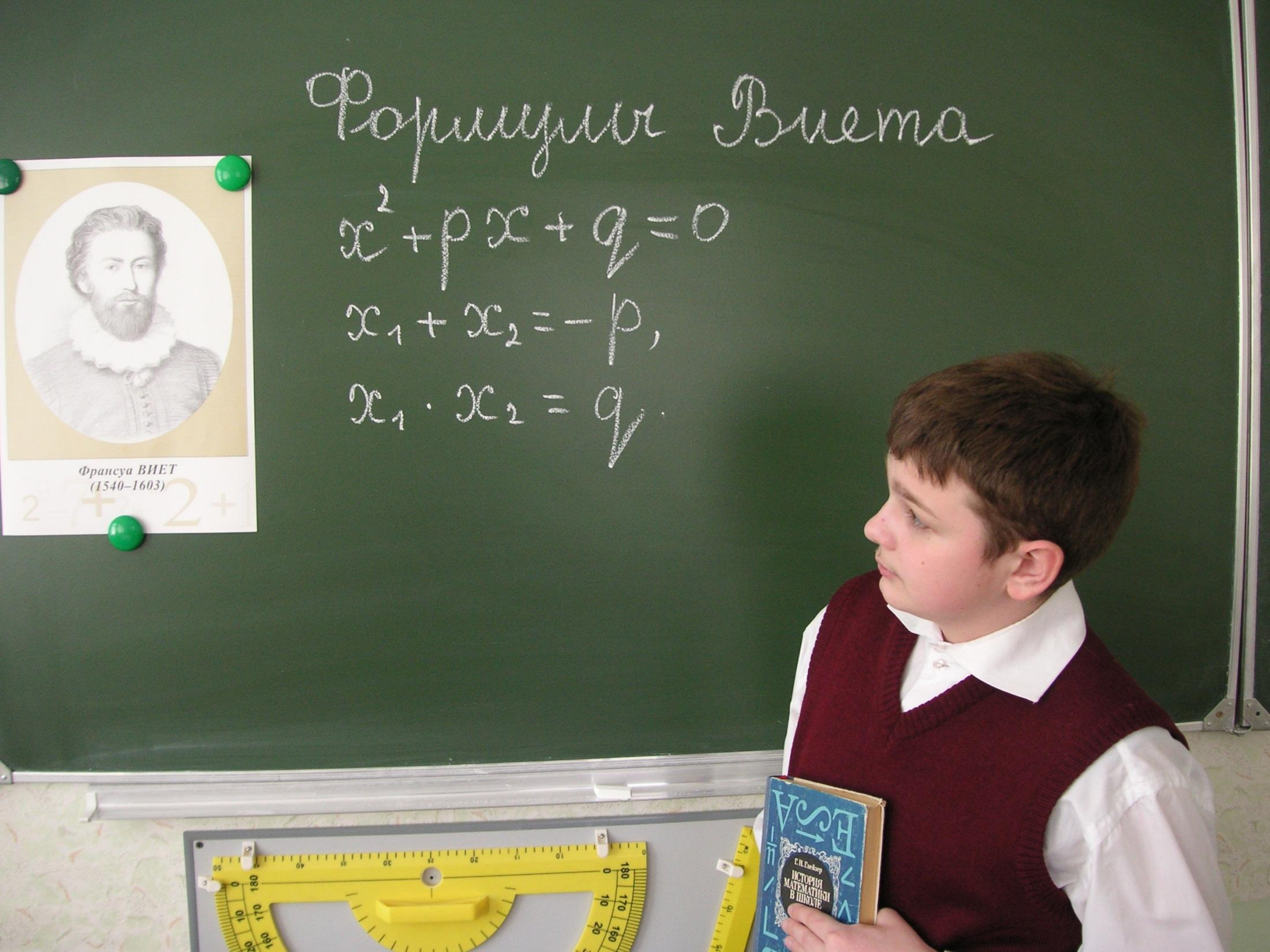
учитель математики

1 квалификационной категории

МБОУ СОШ №12

ВОПРОСЫ В РАБОТЕ

- изучить биографию Франсуа Виета;
- изучить подробности его великого открытия в области математики;
- разобраться с формулировками теоремы Виета;
- сделать подборку задач, в которых используется теорема Виета;
- найти задачи с параметрами, в которых удобно использовать теорему Виета;
- посмотреть задачи ЕГЭ, в которых может быть использована теорема;
- попробовать весь найденный материал привести в определенную систему.


Формулы Виета
$x^2 + px + q = 0$
$x_1 + x_2 = -p,$
$x_1 \cdot x_2 = q.$
Франсуа ВИЕТ
(1540–1603)
ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ

Теорема Виета

Знаменитая теорема, устанавливающая связь коэффициентов многочлена с его корнями, была обнародована в 1591 году. Теперь она носит имя Виета. Сам автор формулировал её так: «Если B+D, умноженное на A, минус A в квадрате равно BD, то A равно B и рано D».

Теорема Виета.

Если числа x_1 и x_2

- есть корни квадратного уравнения

$$ax^2 + вx + c = 0,$$

то для них выполнены равенства

$$x_1 + x_2 = -\frac{в}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Доказательство. Пусть

$$x_1 \text{ и } x_2$$

являются корнями квадратного уравнения, т. е.

$$x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{D}}{2a},$$

тогда вычислим сумму и произведение корней:

$$x_1 + x_2 = \frac{-в + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-в - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-в + \sqrt{D} - в - \sqrt{D}}{2a} = -\frac{в}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-в + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-в - \sqrt{D}}{2a} = \frac{в^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2} = \frac{в^2 - D}{4a^2} = \frac{в^2 - \left(в^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Теорема доказана.

Обобщенная теорема Виета.

Для того чтобы x_1 и x_2

были корнями уравнения

$$ax^2 + вx + c = 0$$

необходимо и достаточно выполнения равенств

$$x_1 + x_2 = -\frac{в}{a}$$

и

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

.

Из теоремы Виета при $a = 1$

следует утверждение для корней приведенного квадратного уравнения.

В этом случае обратная теорема часто используется для устного подбора корней уравнения.

Теорема Виета для кубического уравнения

Пусть x_1, x_2, x_3

корни уравнения

$$ax^3 + вx^2 + cx + d = 0$$

$$a \neq 0$$,

тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{в}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

Теорема Виета для уравнения четвертой степени.

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 - корни уравнения

$$ax^4 + вx^3 + cx^2 + dx + m = 0,$$

$a \neq 0$, тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{в}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a}, \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{m}{a}. \end{cases}$$

Теорема Виета для алгебраического уравнения n степени.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - корни уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

$a_n \neq 0$, тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Зависимость между коэффициентами и корнями уравнения

$$a + в + c = 0$$, тогда

$$x_1 = 1$$ и $$x_2 = \frac{c}{a}$$

Решить уравнение $$132x^2 - 247x + 115 = 0$$

$$132 - 247 + 115 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{115}{132}$$

$$a - в + c = 0$$, тогда

$$x_1 = -1$$ и $$x_2 = \frac{-c}{a}$$

Решить уравнение

$$345x^2 + 137x - 208 = 0$$

$$345 - 137 - 208 = 0,$$

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{208}{345}$$

Задача

Дано квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$

Составить квадратное уравнение, корни которого втрое больше корней данного уравнения.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни данного уравнения.

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

.

По условию корни искомого уравнения равны

$$y_1 = 3x_1$$

и

$$y_2 = 3x_2$$

Отсюда

$$y_1 + y_2 = 3(x_1 + x_2) = -3p$$

и

$$y_1 \cdot y_2 = 9x_1x_2 = 9q$$

По теореме, обратной теореме Виета получаем

$$x^2 + 3px + 9q = 0$$

Ответ. $x^2 + 3px + 9q = 0$

Задача с параметром

При каком значении параметра m три действительных корня уравнения $x^3 - 9x^2 + 25x - m = 0$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию?

Решение. Пусть *a* – первый член арифметической прогрессии, *c* – разность арифметической прогрессии,

$c > 0$

По формулам Виета

$$\begin{cases} a + (a+c) + (a+2c) = 9, \\ a(a+c) + (a+c)(a+2c) + a(a+2c) = 25, \\ a(a+c)(a+2c) = m; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + c = 3, \\ 3a^2 + 6ac + 2c^2 = 25; \end{cases} \qquad \begin{cases} a + c = 3, \\ 3(a+c)^2 - c^2 = 25; \end{cases}$$

отсюда $c^2 = 2.$

По условию $c > 0$, тогда

$c = \sqrt{2}$, $a = 3 - \sqrt{2}$.

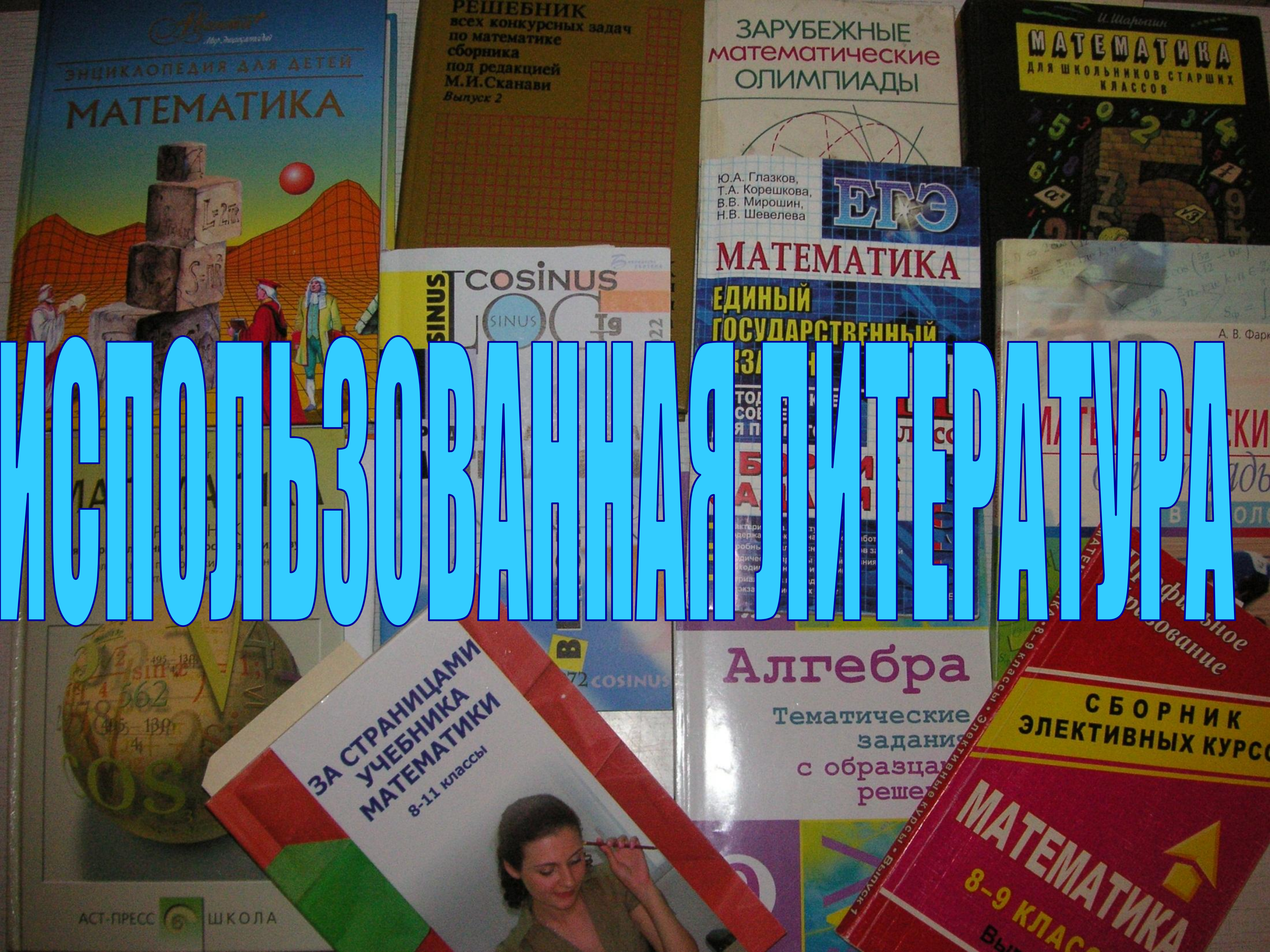
$$m = a(a+c)(a+2c) = 21.$$

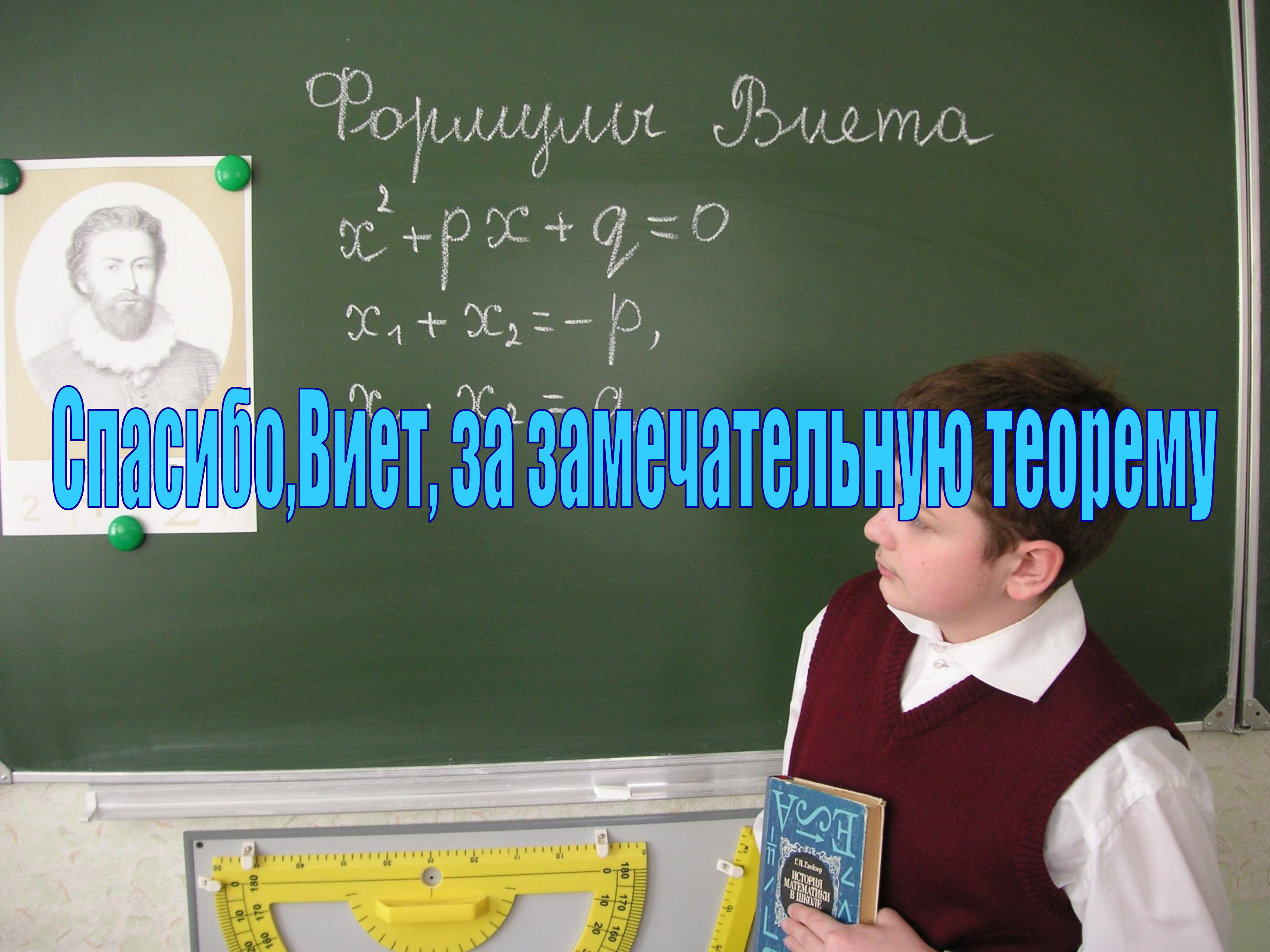
Ответ. 21.

- С помощью теоремы Виета можно решать задачи следующего содержания:

- подбирать устно целые корни приведенного квадратного уравнения;
- проверять с помощью обобщенной теоремы Виета полученные корни квадратных уравнений при , не подставляя их в исходное уравнение;
- используя зависимости между коэффициентами, подбирать устно корни уравнений с большими коэффициентами, дающими громоздкие вычисления с помощью дискриминанта;
- различные задачи на зависимость между коэффициентами и корнями уравнений;
- исследовательские задачи с параметрами;
- задания из разных разделов алгебры и геометрии, первоначально не связанных с решением уравнений;
- задания из математических олимпиад по теме «Многочлены» и «Алгебраические уравнения»;

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА




Спасибо,Виет, за замечательную теорему
Формулы Виета
$x^2+px+q=0$
$x_1+x_2=-p,$
Г.И. Глейзер
ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ