

# Матрицы

Метод Гаусса  
Формулы Крамера

Подготовили:  
Климов Дмитрий  
Радзевич Павел  
Руководитель:  
Петрова Л.Д.  
учитель  
математики

# Содержание

- Что такое матрица?
- Карл Фридрих Гаусс
- Метод Гаусса
- Габриэль Крамер
- Метод Крамера
- Вывод
- Использованные источники информации

# Матрица

## Определение

Прямоугольная таблица из  $m$ ,  $n$  чисел, содержащая  $m$  – строк и  $n$  – столбцов, вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей размера  $m \times n$**

Числа, из которых составлена матрица, называются *элементами матрицы*.

Положение элемента  $a_{ij}$  в матрице характеризуется двойным индексом:

первый  $i$  – номер строки;

второй  $j$  – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент.

Сокращенно матрицы обозначают заглавными буквами:  $A, B, C, \dots$

$$A = (a_{ij}); \quad (i = 1, m; \quad j = 1, n)$$

Коротко можно записывать так:

# Иоганн Карл Фридрих Гаусс

(30 апреля 1777, Брауншвейг — 23 февраля 1855, Гёттинген)

## Биография

Дед Гаусса был бедным крестьянином, отец — садовником, каменщиком, смотрителем каналов в герцогстве Брауншвейг. Уже в двухлетнем возрасте мальчик показал себя вундеркиндом. В три года он умел читать и писать. Согласно легенде, школьный учитель математики, чтобы занять детей на долгое время, предложил им сосчитать сумму чисел от 1 до 100. Юный Гаусс заметил, что попарные суммы с противоположных концов одинаковы:  $1+100=101$ ,  $2+99=101$  и т. д., и мгновенно получил результат  $50 \times 101 = 5050$ .

После 1801 года Гаусс включил в круг своих интересов естественные науки. Катализатором послужило открытие малой планеты Церера, вскоре после наблюдений потерянной. 24-летний Гаусс проделал (за несколько часов) сложнейшие вычисления по новому, открытому им же методу, и указал место, где искать беглянку; там она, к общему восторгу, и была вскоре обнаружена.

Умер Гаусс 23 февраля 1855 года в Гёттингене.





# Типы уравнений

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет решение, и *несовместной*, если она не имеет решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение и *неопределенной*, если она имеет бесчисленное множество решений.

Две совместные системы называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений.

# Элементарные преобразования

К элементарным преобразованиям системы отнесем следующее:

1. перемена местами двух любых уравнений;
2. умножение обеих частей любого из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;
3. прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое действительное число.

# Общий случай

Для простоты рассмотрим метод Гаусса для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными в случае, когда существует единственное решение:

Дана система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

## 1-ый шаг метода Гаусса

На первом шаге исключим неизвестное  $x_1$  из всех уравнений системы (1), кроме первого. Пусть коэффициент  $a_{11}$ . Назовем его ведущим элементом.

Разделим первое уравнение системы (1) на  $a_{11}$ . Получим уравнение:

где  $a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$ ;  $j=1,2,3$ ;  $b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}$

Исключим  $x_1$  из второго и третьего уравнений системы (1). Для этого вычтем из них уравнение (2), умноженное на коэффициент при  $x_1$  (соответственно  $a_{21}$  и  $a_{31}$ ).

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \quad (2)$$

Система примет вид:

Верхний индекс  $(1)$  указывает, что речь идет о коэффициентах первой преобразованной системы

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)} \end{cases} \quad (3)$$



## 2-ой шаг метода Гаусса

На втором шаге исключим неизвестное  $x_2$  из третьего уравнения системы (3) из третьего уравнения системы (3). Пусть коэффициент  $a_{23}^{(1)}$  за ведущий элемент и разделим на него второе уравнение системы (3), получим уравнение:

$$x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)} \quad (4)$$

$$a_{23}^{(2)} = \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; \quad b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

где

Из третьего уравнения системы (3) вычтем уравнение (4), умноженное на  $a_{33}^{(1)}$ .  
Получим уравнение:  $a_{33}^{(2)} x_3 = b_3^{(2)}$   
Предполагая, что  $a_{33}^{(2)} \neq 0$ , находим  $x_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = b_3^{(3)}$

В результате преобразований система приняла вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)} \\ x_3 = b_3^{(3)} \end{cases} \quad (5)$$

Система вида (5) называется **треугольной**.

Процесс приведения системы (1) к треугольному виду (5) (шаги [1](#) и [2](#)) называют **прямым ходом метода Гаусса**.

Нахождение неизвестных из треугольной системы называют **обратным ходом метода Гаусса**.

Для этого найденное значение  $x_3$  подставляют во второе уравнение системы (5) и находят  $x_2$ . Затем  $x_2$  и  $x_3$  подставляют в первое уравнение и находят  $x_1$ .

Если в ходе преобразований системы получается противоречивое уравнение вида  $0 = b$ , где  $b \neq 0$ , то это означает, что система несовместна и решений не имеет.

В случае совместной системы после преобразований по методу Гаусса, составляющих прямой ход метода, система  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными будет приведена или к *треугольному* или к *ступенчатому* виду.

Треугольная система имеет вид:

Такая система имеет единственное решение, которое находится в

результате проведения обратного хода метода Гаусса.

Ступенчатая система имеет вид:

Такая система имеет бесчисленное множество решений.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + \dots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = d_n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_k + \dots + c_{kn}x_n = d_k \end{array} \right.$$

# Рассмотрим на примере

1. Покажем последовательность решения системы из трех уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16 \\ x_1 + 2,5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$

2. Поделим первое уравнение на 2, затем вычтем его из второго ( $a_{21}=1$ , поэтому домножение не требуется) и из третьего, умножив предварительно на  $a_{31}=3$

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_2 + 4x_3 = 16 \\ 4,5x_2 - 5x_3 = -6 \end{cases}$$

3. Поделим второе уравнение полученной системы на 2, а затем вычтем его из третьего, умножив предварительно на 4,5 (коэффициент при  $x_2$ )

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \\ -14x_3 = -42 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x_3 = -42 / (-14) = 3; \\ x_2 = 8 - 2 \cdot 3 = 2 \\ x_1 = 8 - 0,5 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 1 \end{cases}$$

# Метод Крамера

Метод Крамера—способ решения квадратных систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем основной матрицы (причём для таких уравнений решение существует и единственно). Создан Габриэлем Крамером в 1751 году.

# Габриэль Крамер

(31 июля 1704, Женева, Швейцария—4 января 1752, Баньоль-сюр-Сез, Франция)

## Биография

Крамер родился в семье франкоязычного врача. В 18 лет защитил диссертацию. В 20-летнем возрасте Крамер выставил свою кандидатуру на вакантную должность преподавателя на кафедре философии Женевского университета.

1727: Крамер 2 года путешествовал по Европе, заодно перенимая опыт у ведущих математиков — Иоганна Бернулли и Эйлера, Галлея и де Муавра, Мопертюи и Клеро.

В свободное от преподавания время Крамер пишет многочисленные статьи на самые разные темы: геометрия, история математики, философия, приложения теории вероятностей.

1751: Крамер получает серьёзную травму после дорожного инцидента с каретой. Доктор рекомендует ему отдохнуть на французском курорте, но там его состояние ухудшается, и 4 января 1752 года Крамер умирает.



Рассмотрим систему линейных уравнений с квадратной матрицей  $A$ , т.е. такую, у которой число уравнений совпадает с числом неизвестных:

Теорема. Система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

*Имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы этой системы отличен от нуля:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$



В этом случае решение можно вычислить по **формуле**

## Крамера

$$x_k = \frac{\det [A_{[1]} | \dots | A_{[k-1]} | \mathcal{B} | A_{[k+1]} | \dots | A_{[n]}]}{\det A} \quad \text{при } k \in \{1, \dots, n\} .$$

*Для получения значения  $x_k$  в числитель ставится определитель, получающийся из  $\det(A)$  заменой его  $k$ -го столбца на столбец правых частей*

- **Пример. Решить систему уравнений :**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

# Решение.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-28}{14} = -2, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{14} = 0$$

# Найдите оставшиеся компоненты решения.

- Формулы Крамера не представляют практического значения в случае систем с *числовыми* коэффициентами: вычислять по ним решения конкретных систем линейных уравнений неэффективно, поскольку они требуют вычисления  $(n+1)$ -го определителя порядка  $n$ , в то время как метод Гаусса фактически эквивалентен вычислению одного определителя порядка  $n$ . Тем не менее, теоретическое значение формул Крамера заключается в том, что они дают **явное** представление решения системы через ее коэффициенты. Например, с их помощью легко может быть доказан результат
- Решение системы линейных уравнений с квадратной матрицей  $A$  является непрерывной функцией коэффициентов этой системы при условии, что  $\det A \neq 0$ .

# Найдите оставшиеся компоненты решения.

- Кроме того, формулы Крамера начинают конкурировать по вычислительной эффективности с методом Гаусса в случае систем, зависящих от параметра.
- зависящей от параметра  $\lambda \in \mathbb{R}$  определить предел отношения компонент решения:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 6 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11, \end{cases}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 8} \frac{x_3}{x_2}.$$

# Решение.

- В этом примере определитель матрицы системы равен  $-(\lambda - 8)^2$ . По теореме Крамера система совместна при  $\lambda \neq 8$ . Для случая  $\lambda \neq 8$  применением метода Гаусса убеждаемся, что система несовместна. Тем не менее, указанный предел существует. Формулы Крамера дают значения компонент решения в виде

$$x_2 = \frac{2(2\lambda - 13)}{\lambda - 8}, \quad x_3 = \frac{3(\lambda - 6)}{\lambda - 8}$$

и, хотя при  $\lambda \rightarrow 8$  каждая из них имеет бесконечный предел, их отношение стремится к пределу конечному.

# Ответ.

Приведенный пример поясняет также каким образом система линейных уравнений, непрерывно зависящая от параметра, становится несовместной: при стремлении параметра к какому-то критическому значению (обращающему в нуль определитель матрицы системы) хотя бы одна из компонент решения «уходит на бесконечность».

# Вывод

Рассмотренный в данной презентации Метод Крамера позволяет решать линейные системы, но удобнее решать системы линейных уравнений с помощью метода Гаусса, который находит широкое применение и содержится в пакетах стандартных программ для ЭВМ.



# Использованные источники

1. В.С. Щипачев, Высшая математика
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра: Учебник для вузов.
3. <http://ru.wikipedia.org>
4. Волков Е.А. Численные методы.
5. В.Е. Шнейдер и др., Краткий курс высшей математики, том I.