МАТЕМАТИКА

Метод интервалов. Общий метод интервалов.

Л Е К Ц И Я № 7

«Метод интервалов. Общий метод интервалов.»

Литература С.М. Никольский «Алгебра и начала анализа: Учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений» §2 п. 2.7 – 2.9.

План лекции:

- Рациональные неравенства
- Метод интервалов
- Общий метод интервалов

Определение

Неравенство, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно x, называют рациональным неравенством с неизвестным x.

$$(5x+1)(3-2x)<0$$

$$\frac{(2x-3)^4(7-x)^3}{(2x-1)^2(3-x)}\geq 0$$

$$\frac{x^2-x-6}{x-1}\leq\frac{2}{x-5}-3$$

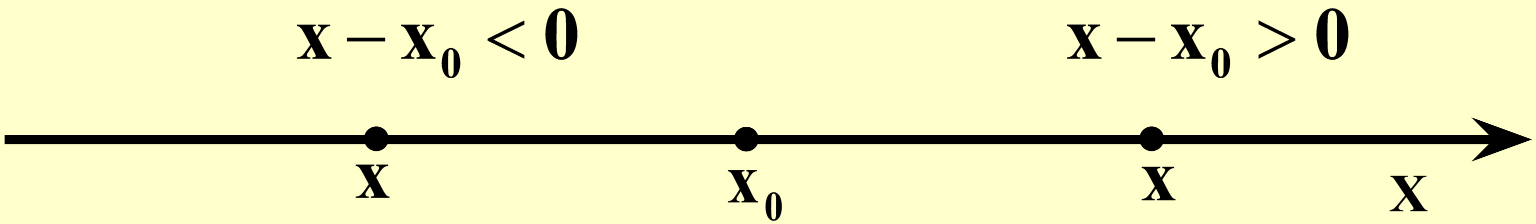
$$\frac{4x-6}{5-x}>2$$

$$(x^2-1)^2(3-2x)^3(4-x)<0$$

Определение

Решением неравенства с неизвестным x называют число, при подстановке которого в это неравенство вместо x получается верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти все его решения или показать, что их нет.



Метод интервалов для решения неравенств вида $A(x) > 0$ и $A(x) < 0$ основан на следующем утверждении.

Точка x_0 делит ось O_x на две части:

1) **для любого x, находящегося справа от точки x_0, двучлен $x - x_0$ положителен;**

2) **для любого x, находящегося слева от точки x_0, двучлен $x - x_0$ отрицателен.**

Пусть требуется решить неравенство

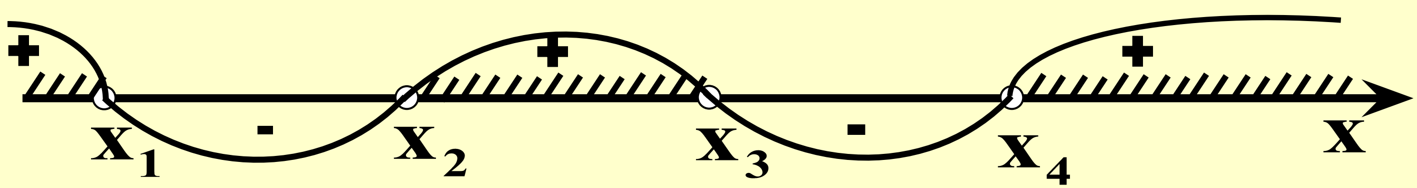
$$(x - x_1)(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n) > 0$$

Не нарушая общности, положим

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) > 0$$

Тогда:

5). Аналогично рассуждая, получим, что $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) > 0$ для x из интервалов $(x_4;\infty)$, $(x_2;x_3)$, $(-\infty;x_1)$ и $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) < 0$ для x из любого интерва по интервалу $(x_3;x_4)$, $(x_1;x_2)$.



Замечание 1

Сами числа x_1, x_2, x_3, x_4 не являются решением неравенства $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)>0$.

Замечание 2

Множество решений неравенств вида $A(x)\geq 0$, и $A(x)\leq 0$, где $A(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$, $n\geq 1, n\in N$, есть объединение множества всех решений неравенств $A(x)>0$ и $A(x)<0$ и множества всех решений уравнения $A(x)=0$.

Метод интервалов для решения неравенств вида

$A(x) < 0$, $A(x) > 0$, $A(x) \le 0$, $A(x) \ge 0$,

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n),$$

где $n \ge 1, n \in N$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, то есть все x_k различны.

1. Привести рациональное неравенство к одному из видов: $A(x) > 0$, $A(x) < 0$, $A(x) \ge 0$, $A(x) \le 0$, где $A(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)$, $n \ge 1, n \in N$.

2. Найти нули множителей, стоящих в левой части неравенства, и расположить их на оси O_x в соответствующем порядке.

<u>Метод интервалов</u> для решения неравенств вида

$A(x) < 0$ $A(x) > 0$ $A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$

, , **где** ,

$n \geq 1, n \in N$ $x_1 < x_2 < ... < x_n$ x_k

, **то есть все различны.**

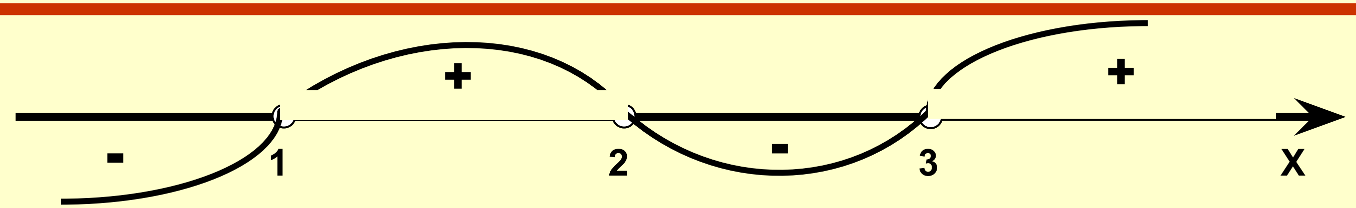
3. **Над промежутком справа от наибольшего нуля многочлена поставить знак «+», так как на этом промежутке все множители положительны. Затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной нуль, сменить знак на противоположный.**

Пример1

Решить неравенство $(x-1)(x-2)(x-3)>0$.

Решение

Нули множителей: $x=1$, $x=2$, $x=3$.



Ответ: $\left[\begin{array}{l} 1<x<2, \\ x>3. \end{array}\right.$

Пример 2

Решить неравенство $(2-x)(x^2-4x+3)(x+1)>0$.

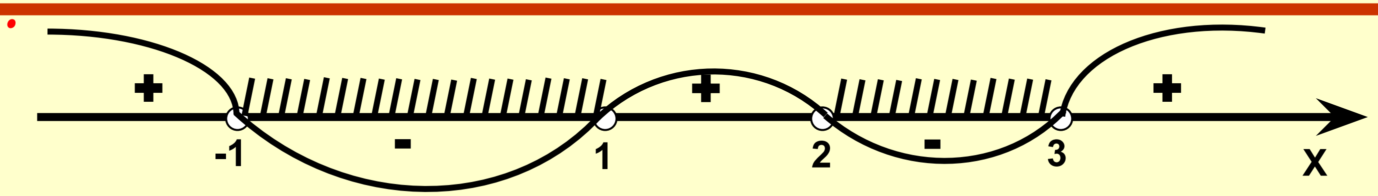
Решение

$$(2-x)(x^2-4x+3)(x+1)>0,$$

умножив неравенство на -1 **и разложив квадратный трёхчлен на множители, получим неравенство равносильное данному**

$$(x-2)(x-1)(x-3)(x+1)<0.$$

Нули множителей: $x=-1$, $x=1$, $x=2$, $x=3$



Ответ: $\left[\begin{array}{l} -1<x<1, \\ 2<x<3. \end{array}\right.$

Пример 3

Решить неравенство $\left(x^2-6x\right)\left(16-x^2\right)\ge 0$.

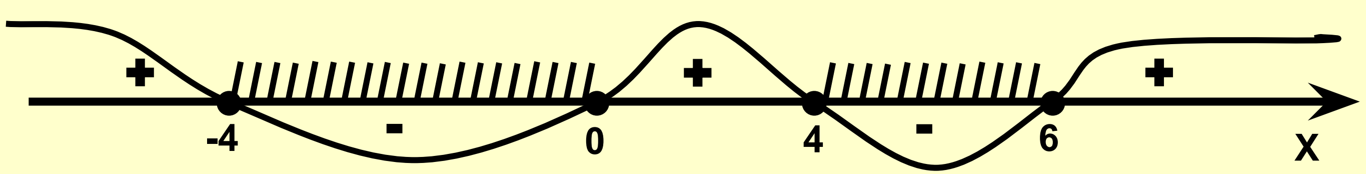
Решение

$$\left(x^2-6x\right)\left(16-x^2\right)\ge 0$$

умножив неравенство на *-1* и разложив квадратные трёхчлены на множители, получим неравенство равносильное данному

$$x\left(x-6\right)\left(x-4\right)\left(x+4\right)\le 0$$

Нули множителей: $x=-4$, $x=0$, $x=4$, $x=6$



Ответ: $\left[\begin{array}{l} -4\le x\le 0,\\ 4\le x\le 6. \end{array}\right.$

Пример 4

Решить неравенство $\left(x^2-2x-3\right)\left(x^2+x+1\right)\left(49-x^2\right)\left(5x-x^2\right)\ge 0$

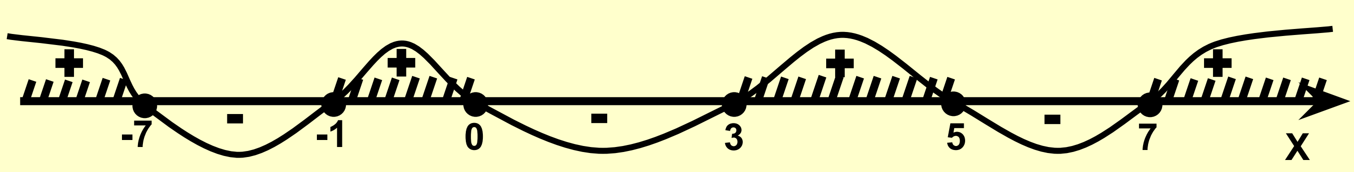
Решение

$$\left(x^2-2x-3\right)\left(x^2+x+1\right)\left(49-x^2\right)\left(5x-x^2\right)\ge 0,$$

умножив неравенство 2 раза на -1, разложив квадратные трёхчлены на множители и учитывая, что $x^2+x+1>0$ при $x\in R$, получим неравенство равносильное данному

$$(x-3)(x+1)(x-7)(x+7)x(x-5)\ge 0$$

Нули множителей: $x=-7$, $x=-1$, $x=0$, $x=3$, $x=5$, $x=7$



Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} x\le -7, \\ -1\le x\le 0, \\ 3\le x\le 5, \\ x\ge 7. \end{array}\right.$$

Общий метод интервалов для решения неравенств вида $A(x) > 0$, $A(x) < 0$, $A(x) \geq 0$, $A(x) \leq 0$, где

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \quad n \geq 1, n \in N$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$,

если не все различны

1. Привести рациональное неравенство к одному из видов:

$A(x) > 0$, $A(x) < 0$, $A(x) \geq 0$, $A(x) \leq 0$, где

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n), \quad n \geq 1, n \in N$$

если не все $x_1, x_2, \ldots, x_n$ различны, то произведение одинаковых двучленов записывают в виде степени этого двучлена

$$A(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_n)^{k_n} \quad k_m \geq 1;\ k_m \in N,$$

Общий метод интервалов для решения неравенств вида $A(x) > 0$, $A(x) < 0$, $A(x) \geq 0$, $A(x) \leq 0$, **где**

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \quad n \geq 1, n \in N$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$,

если не все ... **различны**

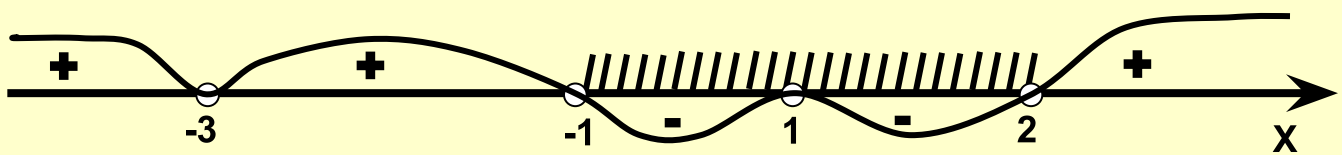
3. **Над промежутком справа от наибольшего нуля многочлена поставить знак «+», так как на этом промежутке все множители положительны. Затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной нуль, сменить знак на противоположный, если соответствующий этому нулю двучлен возведён в нечётную степень, и сохранить знак, если соответствующий этому нулю двучлен возведён в чётную степень.**

Пример1

Решить неравенство $(x+3)^2(x+1)^3(x-1)^4(x-2)<0$.

Решение

Нули множителей: $x=-3$, $x=-1$, $x=1$, $x=2$.



Ответ: $\left[\begin{array}{l} -1<x<1, \\ 1<x<2. \end{array}\right.$

Пример1

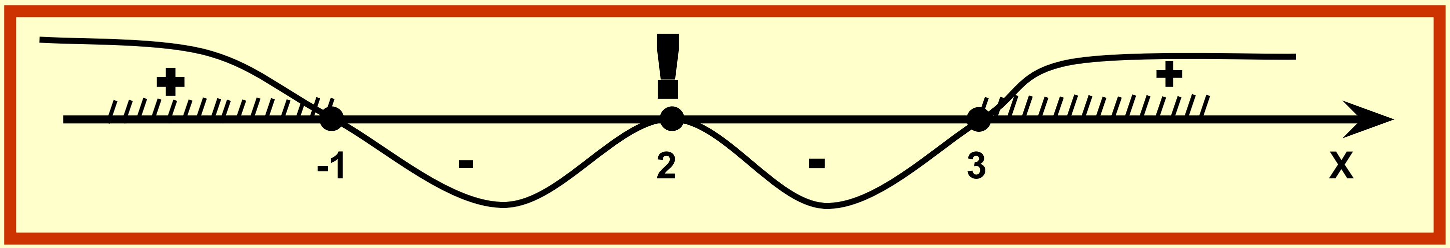
Решить неравенство $(x+1)(3-x)(x-2)^2 \le 0$.

Решение

$$(x+1)(3-x)(x-2)^2 \le 0,$$

$$(x+1)(x-3)(x-2)^2 \ge 0$$

Нули множителей: $x=-1$, $x=2$, $x=3$.



Ответ: $\left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ x = 2, \\ x \ge 3. \end{array}\right.$

Метод интервалов для решения неравенств вида

$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ и $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$, где $A(x)$ и $B(x)$ разлагаются в $x - x_0$

Замечани разных двучленов вида

Неравенство $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ равносильно неравенству $A(x) \cdot B(x) > 0$,

неравенство $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ равносильно неравенству $A(x) \cdot B(x) < 0$.

Пример1

Решить неравенство

$$\frac{x-3}{x-5}<0$$

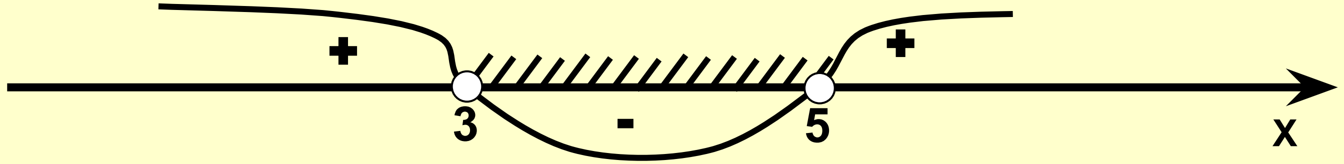
.

Решение

$$\frac{x-3}{x-5}<0,$$

$$(x-3)(x-5)<0.$$

Нули множителей: $x=3$, $x=5$



Ответ:

$$3<x<5.$$

Пример2

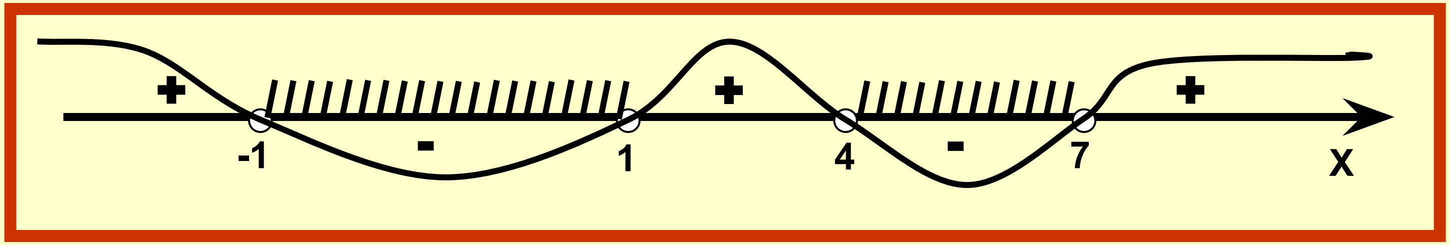
Решить неравенство $\dfrac{x^2-5x+4}{-x^2+6x+7}>0$

Решение

$\dfrac{x^2-5x+4}{-x^2+6x+7}>0,$ **умножив неравенство на** *-1* **и разложив квадратные трёхчлены на множители, получим неравенство** $\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x+1)(x-7)}<0,$ **равносильное данному**

$$(x-1)(x-4)(x+1)(x-7)<0.$$

Нули множителей: $x=-1$, $x=1$, $x=4$, $x=7$



Ответ: $\left[\begin{array}{l}-1<x<1,\\ 4<x<7.\end{array}\right.$

Пример3

Решить неравенство $\dfrac{x}{2x+3} > \dfrac{1}{x}$

Решение

$$\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{x},$$

$$\frac{x}{2x+3} - \frac{1}{x} > 0,$$

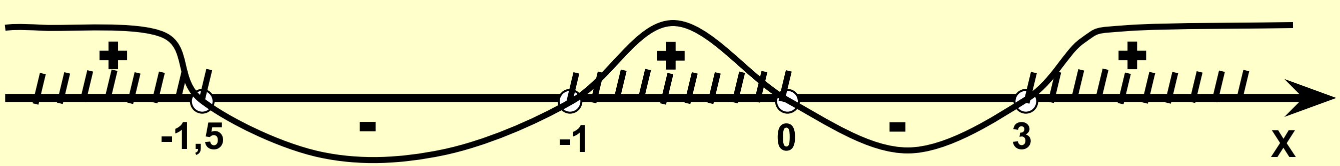
$$\frac{x^2-(2x+3)}{x(2x+3)} > 0,$$

$$\frac{x^2-2x-3}{x(2x+3)} > 0,$$

$$\frac{(x+1)(x-3)}{x(2x+3)} > 0,$$

$$(x+1)(x-3)x(2x+3) > 0.$$

Нули множителей: $x = -1{,}5$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$



Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} x < -1{,}5, \\ -1 < x < 0, \\ x > 3. \end{array}\right.$$

Метод интервалов для решения неравенств вида $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ и $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$, где $A(x)$ и $B(x)$ разлагаются в произведения двучленов $x - x_0$, где в числителе и знаменателе дроби

Не нарушая общности положим, что неравенство $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ имеет вид

$$\frac{(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)}{(x - x_1)^{k_2}(x - x_2')\cdot\ldots\cdot(x - x_m')} > 0$$

тогда его можно представить в виде

$$\frac{(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)}{(x - x_1)^{k_1+k_2}(x - x_2')\cdot\ldots\cdot(x - x_m')} > 0.$$

Пример 1

Решить неравенство

$$\frac{x}{x+3}+\frac{2}{x-2}<\frac{5x}{(x+3)(x-2)}$$

Решение

$$\frac{x}{x+3}+\frac{2}{x-2}<\frac{5x}{(x+3)(x-2)},$$

$$\frac{x}{x+3}+\frac{2}{x-2}-\frac{5x}{(x+3)(x-2)}<0,$$

$$\frac{x(x-2)+2(x+3)-5x}{(x+3)(x-2)}<0,$$

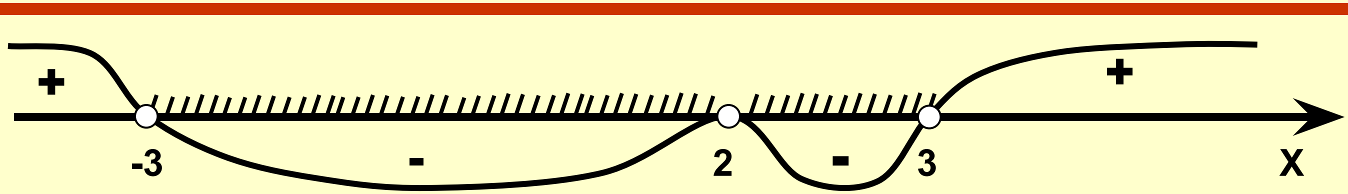
$$\frac{x^2-5x+6}{(x+3)(x-2)}<0,$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-2)}<0,$$

$$\frac{x-3}{(x+3)(x-2)^2}<0,$$

$$(x-3)(x+3)(x-2)^2<0.$$

Нули множителей: $x=-3$, $x=2$, $x=3$



Ответ:

$$\left[\begin{array}{l}-3<x<2,\\ 2<x<3.\end{array}\right.$$

Замечание.

Множество решений неравенств вида $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geq 0$, $\dfrac{A(x)}{B(x)} \leq 0$ есть объединение множества всех решений неравенств $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$ $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0$, и множества всех решений уравнения $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$.

Приме р1

(ЦТ 2000 г.) Найти число целых решений неравенства

$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \ge \frac{1}{x^2-x-2}$$

Решен ие

$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \ge \frac{1}{x^2-x-2},$$

$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} - \frac{1}{x^2-x-2} \ge 0,$$

$$\frac{8x+3}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x+1)} \ge 0,$$

$$\frac{8x+3-(x+1)(x+3)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \ge 0,$$

$$\frac{-x^2+4x}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \ge 0,$$

$$\frac{x(x-4)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \le 0,$$

$$\begin{cases} x(x-4)(x+1)^2(x+3)(x-2) \le 0, \\ (x+1)^2(x+3)(x-2) \ne 0. \end{cases}$$

Пример 1

(ЦТ 2000 г.) Найти число целых решений неравенства

$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \ge \frac{1}{x^2-x-2}$$

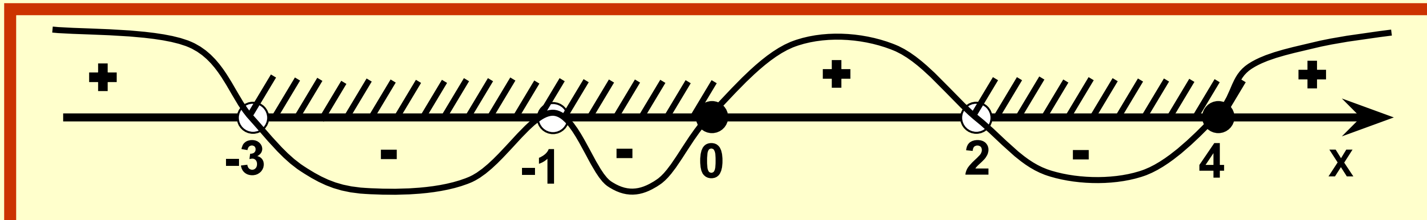
Решение

$$\frac{x(x-4)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \le 0$$

$$\begin{cases} x(x-4)(x+1)^2(x+3)(x-2) \le 0, \\ (x+1)^2(x+3)(x-2) \ne 0. \end{cases}$$

Нули числителя: $x = 0$, $x = 4$

Нули знаменателя: $x = -3$, $x = -1$, $x = 2$



Итак

$$\left[\begin{array}{l} -3 < x < -1, \\ -1 < x \le 0, \\ 2 < x \le 4. \end{array}\right.$$

Целые решения: $x = -2; 0; 3; 4.$

Ответ: *4* целых решения.

Домашнее задание

1) Материал лекций 1 –7.

2) Галицкий М.Л. «Сборник задач по алгебре для 8 – 9 классов» §8 № 8.54в), г); 8.72; 8.90; 8.96.

3) Сборник для подготовки к ЦТ. Тема № 6.