Метод математической индукции

Содержание:

Введение

В основе всякого математического исследования лежат дедуктивный и индуктивный методы. Дедуктивный метод рассуждений - это рассуждение от общего к частному, т.е. рассуждение, исходным моментом которого является общий результат, а заключительным моментом – частный результат. Индукция применяется при переходе от частных результатов к общим, т.е. является методом, противоположным дедуктивному.

Основная часть

По своему первоначальному смыслу слово “индукция” применяется к рассуждениям, при помощи которых получают общие выводы, опираясь на ряд частных утверждений. Простейшим методом рассуждений такого рода является полная индукция. Вот пример подобного рассуждения.

Пусть требуется установить, что каждое натуральное чётное число n в пределах *4< n < 20* представим в виде суммы двух простых чисел. Для этого возьмём все такие числа и выпишем соответствующие разложения:

4=2+2; 6=3+3; 8=5+3;
10=7+3; 12=7+5; 14=7+7;
16=11+5; 18=13+5; 20=13+7.

Эти девять равенств показывают, что каждое из интересующих нас чисел действительно представляется в виде суммы двух простых слагаемых.
Таким образом, полная индукция заключается в том, что общее утверждение доказывается по отдельности в каждом из конечного числа возможных случаев.
Иногда общий результат удаётся предугадать после рассмотрения не всех, а достаточно большого числа частных случаев (так называемая неполная индукция).

Полная индукция имеет в математике лишь ограниченное применение. Многие интересные математические утверждения охватывают бесконечное число частных случаев, а провести проверку для бесконечного числа случаев мы не в состоянии. Неполная же индукция часто приводит к ошибочным результатам.

Во многих случаях выход из такого рода затруднений заключается в обращении к особому методу рассуждений, называемому методом математической индукции.

Принцип математической индукции.

Если предложение A(n), зависящее от натурального числа n, истинно для n=1 и из того, что оно истинно для n=k (где k-любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего числа n=k+1, то предположение A(n) истинно для любого натурального числа n.

Если предложение $A(n)$ истинно при $n=p$ и если $A(k) > A(k+1)$ для любого $k>p$, то предложение $A(n)$ истинно для любого $n>p$.

Док-во по методу математической индукции проводиться следующим образом. Сначала доказываемое утверждение проверяется для ***n=1,*** т.е. устанавливается истинность высказывания ***A(1)***. Эту часть доказательства называют ***базисом индукции.*** Затем следует часть док-ва, называемая ***индукционным шагом.*** В этой части доказывают справедливость утверждения для ***n=k+1*** в предположении справедливости утверждения для ***n=k*** ,т.е. доказывают, что ***A(k) >A(k+1).***

Метод математической индукции в решении задач на делимость.

Пример 1

Доказать, что при любом n , 7^n-1 делится на 6 без остатка.

Решение:

1)Пусть $n=1$, тогда $X_1=7^1-1=6$ делится на 6 без остатка. Значит при $n=1$ утверждение верно.

2) Предположим, что при $n=k$,7^k-1 делится на 6 без остатка.

3) Докажем, что утверждение справедливо для $n=k+1$.

$X_{k+1} = 7^{k+1} - 1 = 7$

$7^{k} - 7 + 6 = 7(7^{k} - 1) + 6.$

Первое слагаемое делится на *6*, поскольку $7^{k} - 1$ делится на 6 по предположению, а вторым слагаемым является *6*. Значит $7^{n} - 1$ кратно 6 при любом натуральном n. В силу метода математической индукции утверждение доказано.

Применение метода к суммированию рядов.

Пример 2

Доказать, что

$1+x+x^{2}+x^{3}+\ldots+x^{n}=(x^{n+1}-1)/(x-1)$, где x (1)

Решение:

1) При n=1 получаем

$1+x=(x^{2}-1)/(x-1)=(x-1)(x+1)/(x-1)=x+1$

следовательно, при n=1 формула верна; A(1) истинно.

2) Пусть k-любое натуральное число и пусть формула верна при n=k, т.е.

$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k=(x^{k+1}-1)/(x-1).$

Докажем, что тогда выполняется равенство $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k+x^{k+1}=(x^{k+2}-1)/(x-1).$

В самом деле

$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k+x^{k+1}=(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k)+x^{k+1}=(x^{k+1}-1)/(x-1)+x^{k+1}=$

$=(x^{k+2}-1)/(x-1).$

Итак, $A(k) > A(k+1)$.

На основании принципа математической индукции заключаем, что формула верна для любого натурального числа n.

Применения метода к доказательству неравенств.

Пример 3

Доказать, что при $n>2$ справедливо неравенство

$1+(1/2^2)+(1/3^2)+\ldots+(1/n^2)<1{,}7-(1/n)$.

Решение:

1) При $n=3$ неравенство верно

$1+(1/2^2)+(1/3^2)=245/180<246/180=1{,}7-(1/3)$.

2) Предположим, что при $n=k$

$1+(1/2^2)+(1/3^2)+\ldots+(1/k^2)=1{,}7-(1/k)$.

3) Докажем справедливость неравенства при n=k+1

$(1+(1/2^2)+\ldots+(1/k^2))+(1/(k+1)^2)<$

$<1{,}7(1/k)+(1/(k+1)^2).$

Докажем, что

$1{,}7-(1/k)+(1/(k+1)^2)<1{,}7-(1/k+1)$ U

$(1/(k+1)^2)+(1/k+1)<1/k$ U $(k+2)/(k+1)^2<1/k$ U

$k(k+2)<(k+1)^2$ U $k^2+2k<k^2+2k+1.$

Последнее очевидно, а поэтому

$1+(1/2^2)+(1/3^2)+\ldots+(1/(k+1)^2)<1{,}7-(1/k+1).$

В силу метода математической индукции неравенство доказано.

Метод в применение к другим задачам.

Пример 4

Доказать, что число диагоналей выпуклого n-угольника равно n(n-3)/2.

Решение:

1) При n=3 утверждение справедливо, ибо в треугольнике

A_3 =3(3-3)/2=0 диагоналей;

A_2 A(3) истинно.

2) Предположим, что во всяком

выпуклом k-угольнике имеет ся A_k =k(k-3)/2 диагоналей.

3)Докажем, что тогда в выпуклом

A_{k+1} *(k+1)*-угольнике число

диагоналей $A_{k+1} = (k+1)(k-2)/2$.

Пусть $A_1 A_2 A_3 \ldots A_k A_{k+1}$ -выпуклый *(k+1)*-угольник. Проведём в нём диагональ $A_1 A_k$. Чтобы подсчитать общее число диагоналей этого (k+1)-угольника нужно подсчитать число диагоналей в k-угольнике $A_1 A_2 \ldots A_k$, прибавить к полученному числу *k-2*, т.е. число диагоналей *(k+1)*-угольника, исходящих из вершины A_{k+1}, и, кроме того, следует учесть диагональ $A_1 A_k$. Таким образом,

$k+1=k+(k-2)+1=k(k-3)/2+k-1=(k+1)(k-2)/2$.

Итак, $A(k) > A(k+1)$. Вследствие принципа математической индукции утверждение верно для любого выпуклого

n-угольника.

Заключение

В частности изучив метод математической индукции, я повысила свои знания в этой области математики, а также научилась решать задачи, которые раньше были мне не под силу.

В основном это были логические и занимательные задачи, т.е. как раз те, которые повышают интерес к самой математике как к науке. Решение таких задач становится занимательным занятием и может привлечь в математические лабиринты всё новых любознательных. По-моему, это является основой любой науки.