

Восемь способов решения
одного
тригонометрического
уравнения

Восемь способов решения одного тригонометрического уравнения.

1. Приведение уравнения к однородному.
2. Разложение левой части уравнения на множители.
3. Введение вспомогательного угла.
4. Преобразование разности (или суммы) тригонометрических функций в произведение.
5. Приведение к квадратному уравнению.
6. Возведение обеих частей уравнения в квадрат.
7. Универсальная подстановка.
8. Графическое решение.

Задача. Решите уравнение $\sin x - \cos x = 1$
различными способами.

3



Способ первый. Приведение уравнения к однородному.

4

$$\sin x - \cos x = 1$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$\cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$1) \cos \frac{x}{2} = 0 \quad \text{или}$$

$$2) \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0$$

$$1) \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi + 2\pi k$$

Это однородное уравнение первой степени. Делим обе части этого уравнения на

$$\cos \frac{x}{2}, \quad \cos \frac{x}{2} \neq 0 \quad \text{т.к., если } \cos \frac{x}{2} = 0, \text{ то } \sin \frac{x}{2} - 0 = 0,$$

$$\text{что противоречит тождеству } \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1$$

$$\text{Получим: } \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$1 = \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}.$$

Способ второй. Разложение левой части уравнения на множители.

5

$$\sin x - \cos x = 1$$

$$\sin x - (1 + \cos x) = 0$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$\cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2};$$

Далее так, как в первом способе.

Способ третий. Введение вспомогательного угла.

6

$$\sin x - \cos x = 1$$

$$\sqrt{2} \left(\sin x \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1$$

В левой части вынесем $\sqrt{2}$ - корень квадратный из суммы квадратов коэффициентов при $\sin x$ и $\cos x$.

$$\sin x \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin x \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$$
$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha - \beta)$$

Внимание! Эквивалентны ли результаты, полученные в рассмотренных способах решений данного уравнения $\sin x - \cos x = 1$?

7

Покажем однозначность ответов.

1-й способ

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x: \frac{\pi}{2}; 5\frac{\pi}{2}; 9\frac{\pi}{2}; -3\frac{\pi}{2}; -7\frac{\pi}{2}; \dots$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pi; 3\pi; 5\pi; -\pi; -3\pi; \dots$$

2-й способ

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

$$x: \frac{\pi}{2}; \pi; 5\frac{\pi}{2}; 3\pi; 9\frac{\pi}{2}; -\pi; -3\frac{\pi}{2}; -3\pi; -7\frac{\pi}{2} \dots$$

Способ четвертый. Преобразование разности (или суммы) тригонометрических функций в произведение.

8

Запишем уравнение $\sin x - \cos x = 1$ в виде:

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Применим формулу разности двух синусов.

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = 1$$

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Далее так, как в третьем способе.

Способ пятый. Приведение к квадратному уравнению относительно одной функции.

9

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\sin x - \cos x = 1 \Rightarrow \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} - \cos x = 1$$

$$\pm\sqrt{1 - \cos^2 x} = 1 + \cos x$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$1 - \cos^2 x = 1 + 2\cos x + \cos^2 x$$

$$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$$

$$\cos x(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

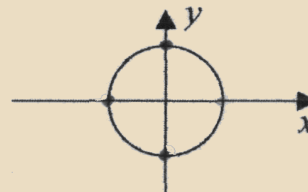
$$\cos x + 1 = 0, \cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in Z .$$

Внимание! При решении уравнения обе части уравнения возводились в квадрат, что могло привести к появлению посторонних решений, поэтому необходима проверка.

Сделаем проверку.

Полученные решения эквивалентны объединению трёх решений

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Первое и второе решение совпадают с ранее полученными, поэтому не являются посторонними. Проверять не будем.

Проверим: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Левая часть: $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 0 = -1,$

а правая часть уравнения равна **1**, следовательно это решение является посторонним.

Ответ:

$$\begin{aligned} x &= \pi + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Способ шестой. Возведение обеих частей уравнения в квадрат.

$$\sin x - \cos x = 1$$

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1,$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 - 2 \sin x \cos x = 1,$$

$$2 \sin x \cos x = 0,$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{или } \cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Способ седьмой. Универсальная подстановка .

12

Выражение всех функций через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (универсальная подстановка) по формулам:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$$

$$\sin x - \cos x = 1 \quad \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 1 \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \neq 0, \text{ т.к. } \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \geq 0.$$

Умножим обе части уравнения на $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Внимание! Могли потерять корни.Необходима проверка!

13

Область допустимых значений первоначального уравнения - всё множество \mathbb{R} . При переходе к $\text{tg} \frac{x}{2}$ из рассмотрения выпали значения

x , при которых $\text{tg} \frac{x}{2}$ не имеет смысла, т.е. $x = \pi + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Следует проверить , не является ли

$x = \pi + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$ решением данного уравнения.

Левая часть $\sin(\pi - 2\pi k) - \cos(\pi + 2\pi k) = \sin \pi - \cos \pi = 0 - (-1) = 1$ и правая часть равна единице. Значит, $x = \pi + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$ является решением данного уравнения.

Ответ: $\therefore x = \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Способ восьмой. Графический способ решения.

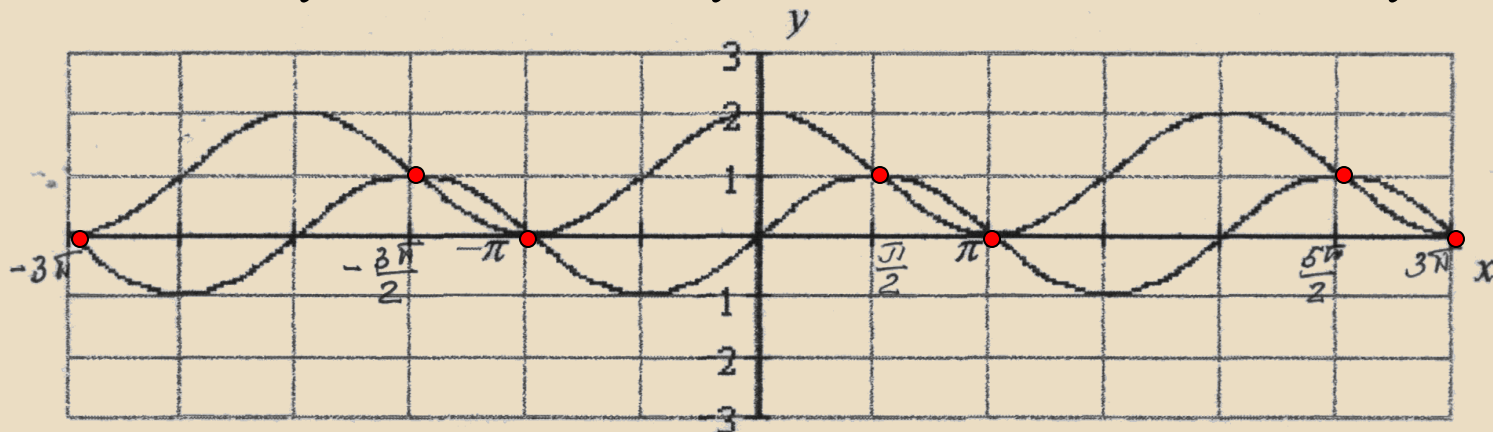
14

$$\sin x = \cos x + 1$$

На одном и том же чертеже построим графики функций, соответствующих левой и правой части уравнения. Абсциссы точек пересечения графиков являются решением данного уравнения,

$y = \sin x$ - график синусоида.

$y = \cos x + 1$ – синусоида, смещённая на единицу вверх.



Ответ: $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Проверь себя !

15

Решите самостоятельно, применяя разные способы решения одного и того же тригонометрического уравнения:

$$\sin 2x + \cos 2x = 1$$

$$\sin 2x + \cos 2x = 1$$

16

$$\sin 2x + \cos 2x = 1$$

$$2 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

$$2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 0,$$

$$2 \sin x (\cos x - \sin x) = 0,$$

$$\sin x = 0,$$

$$\cos x - \sin x = 0,$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{tg} x = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Способ: Приведение уравнения к однородному(1-й способ).

$$\sin 2x + \cos 2x = 1$$

$$\sin 2x + \cos 2x = 1,$$

$$\sin 2x - (1 - \cos 2x) = 0,$$

$$2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 0,$$

Далее так, как первым способом.

Способ: разложение левой части уравнения на множители
(2 – й способ).

$$\sin 2x + \cos 2x = 1$$

18

$$\sin 2x + \cos 2x = 1,$$

$$\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 1,$$

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$2x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi n, n \in Z,$$

$$x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in Z.$$

Способ: преобразование суммы тригонометрических функций в произведение (4-й способ).

$$\sin 2x + \cos 2x = 1$$

19

$\sin 2x + \cos 2x = 1$, разделим обе части уравнения на $\sqrt{2}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \sin 2x + \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + (-1)^k \frac{\pi}{8} + \pi \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{8} + (-1)^k \frac{\pi}{8} + \pi \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Способ: введение вспомогательного угла (3-й способ).

$$\sin 2x + \cos 2x = 1$$

20

$$\sin 2x + \cos 2x = 1,$$

$$\sin 2x \pm \sqrt{(1 - \sin^2 2x)} = 1,$$

$$\pm \sqrt{(1 - \sin^2 2x)} = 1 - \sin 2x, \text{ возведём обе части уравнения в квадрат, тогда}$$

$$1 - \sin^2 2x = 1 - 2\sin 2x + \sin^2 2x,$$

$$2\sin^2 2x - 2\sin 2x = 0,$$

$$2\sin 2x(\sin 2x - 1) = 0,$$

$$\sin 2x = 0,$$

$$2x = \pi n,$$

$$x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin 2x - 1 = 0,$$

$$\sin 2x = 1,$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Способ: приведение к квадратному уравнению относительно $\sin 2x$
(5-й способ).

$$\sin 2x + \cos 2x = 1$$

$$\sin 2x + \cos 2x = 1,$$

$$\underline{\sin^2 2x} + 2\sin 2x \cos 2x + \underline{\cos^2 2x} = 1,$$

$$2\sin 2x \cos 2x + 1 = 1,$$

$$2\sin 2x \cos 2x = 0,$$

$$\sin 2x = 0,$$

$$\cos 2x = 0,$$

$$2x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$

Способ : возведение обеих частей уравнения в квадрат
(6 – й способ).

$$\sin 2x + \cos 2x = 1$$

$$\sin 2x + \cos 2x = 1,$$

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 1$$

$$2 \operatorname{tg} x + 1 - \operatorname{tg}^2 x - 1 - \operatorname{tg}^2 x = 0, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x \neq 0$$

$$2 \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x = 0,$$

$$2 \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 1) = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = 0,$$

$$\operatorname{tg} x - 1 = 0,$$

$$\sin 2x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

$$x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z,$$

Способ: универсальная подстановка (7-й способ).

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z; x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Оцени себя сам

23

Реши уравнения:

$$6. \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2,$$

$$7. \sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2},$$

$$8. \sin x + \cos x = \sqrt{2},$$

$$9. \cos 2x - \cos 4x = 0,$$

$$10. \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0.$$

ОТВЕТЫ:

$$1. x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;$$

$$2. x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$3. x = \frac{\pi}{6} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z;$$

$$4. x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$5. x = \pi \frac{n}{3}, n \in Z; x = \pi n, n \in Z.$$

Ключ к ответам:

Номер уравнения	6	7	8	9	10
Номер ответа	4	3	1	5	2

Предлагаем уравнения для тренировки и самоконтроля

24

$$1) \sin 2x + \cos x = 0$$

$$2) \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$$

$$3) \sin 6x + \sin 3x = 0$$

$$4) \sin 2x + \cos 2x = 1$$

$$1) \sin 4x - \sin 2x = 0$$

$$2) \cos 2x - \cos 4x = 0$$

$$3) \sin x + \cos x = 1$$

$$4) \sqrt{3} \cos x + \sin x = 0$$

Желаем успеха!