Неравенства

Неравенства

Познакомившись с действительными числами, узнав об их свойствах, мы научились проводить различные арифметические операции над ними, такие как алгебраические преобразования выражений или решение уравнений. Настало время неравенств.

Неравенства

- Свойства числовых неравенств
- Решение линейных неравенств

КОНЕЦ

Сначала

Х ≷ У

свойства

Недавно мы ввели понятие числового неравенства:

$a<b$ – это значит, что $a-b$ – положительное число;

$a<b$ – это значит, что $a-b$ – отрицательное число.

Числовые неравенства обладают рядом свойств, знание которых поможет нам в дальнейшем работать с неравенствами.

Для чего нужно?

Для чего нужно уметь решать уравнения, вы знаете: до сих пор математическая модель практически любой реальной ситуации, которую мы рассматривали, представляла собой либо уравнение, либо систему уравнений. На самом деле встречаются и другие математические модели — неравенства, просто мы пока таких ситуаций избегали.

$X \lessgtr Y$

Для чего нужно?

Знание свойств числовых неравенств будет полезно и для исследования функций. Например, с неравенствами связаны такие известные вам свойства функций, как наибольшее и наименьшее значения функции на некотором промежутке, ограниченность функции снизу или сверху. С неравенствами связано и свойство возрастания или убывания функции, о котором пойдет речь в одном из следующих параграфов. Так что, как видите, без знания свойств числовых неравенств нам не обойтись. Да мы сами уже могли убедиться в необходимости умения работать с неравенствами.

Свойство 1

Если **a>b** и **b>c** , то **a>c**.

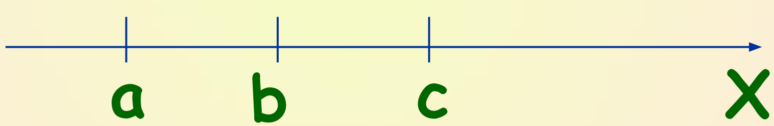
Доказательство:

По условию, **a>b**, т.е. **a -b** — положительное число. Аналогично, так как **b>c**, делаем вывод, что **b-c** — положительное число.

Сложив положительные числа **a-b** и **b-c**, получим положительное число. Имеем **(a-b) +(b-c)=a-c**. Значит, **a-c** — положительное число, т.е. **a>c**, что и требовалось доказать.

Свойство 1

Свойство 1 можно обосновать, используя геометрическую модель множества действительных чисел, т.е. числовую прямую. Неравенство **a>b** означает, что на числовой прямой точка **a** расположена правее точки **b**, а неравенство **b>c** — что точка **b** расположена правее точки **c** . Но тогда точка **a** расположена на прямой правее точки с, т. е. **a > c**.



Свойство 2

Если **a>b**, то **a+c>b+c** .

То есть, если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же действительное число, то знак уравнения не меняется.

Свойство 3

Если $a>b$ и $m>0$, то $am>bm$;

Если $a>b$ и $m<0$, то $am<bm$.

Смысл свойства 3 заключается в следующем: если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то знак неравенства следует сохранить. Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства следует изменить (**<**на**>**,**>**на**<**).

Свойство 3

Если **a>b** и **m>0**, то **am>bm**;

Если **a>b** и **m<0**, то **am<bm**.

То же относится к делению обеих частей неравенства на одно и то же положительное или отрицательное число **m**, то поскольку деление на **m** всегда можно заменить умножением на **1/m** .

Свойство 3

Из свойства 3, в частности, следует, что, умножив обе части неравенства $a>b$ на -1, получим $-a<-b$. Это значит, что если изменить знаки у обеих частей неравенства, то надо изменить и знак неравенства: если $a>b$, то $-a<-b$.

Свойство 4

Если **a>b** и **c>d**, то **a+c>b+d**.

Доказательство:

Так как **a>b**, то, согласно свойству 2, **a+c>b+c**. Аналогично, так как **c>d**, то **b+c>b+d**. Итак, **a+c>b+c**, **b+c>b+d**. Тогда, в силу свойства 1, получаем, что **a+c>b+d.**

Свойство 5

Если **a**, **b**, **c**, **d** – положительные числа, и **a>c**, **c>d**,то **ac>bd**.

Доказательство:
Так как **a>b** и **c>0**, то **ac> bc**. Аналогично, так как **c>b** и **b>0**, то **cb>ab**. Итак, **ac>bc**, **bc>bd**. Тогда, согласно свойству 1, получаем, что **ac>bd**.

Свойство 6

Если **a** и **b** — неотрицательные числа и **a>b**, то **a** в степени **n > b** в степени **n**, где **n** — любое натуральное число.

Смысл свойства 6 заключается в следующем: если обе части неравенства — неотрицательные числа, то их можно возвести в одну и ту же натуральную степень, сохранив знак неравенства.

Смысл неравенства

Обычно неравенства вида **$a>b$**, **$c>d$** (или **$a<b$**, **$c<d$**) называют неравенствами одинакового смысла, а неравенства **$a>b$** и **$c>d$** – неравенствами противоположного смысла. Свойство 5 означает, что при умножении неравенств одинакового смысла, у которых левые и правые части — положительные числа, получится неравенство того же смысла.

Оглавление

$ax \gtrless y$

Решение линейных неравеств

Решение неравенства с переменной

$ax+b<y$

Свойства числовых равенств помогали нам решать уравнения, т.е. находить те значения переменной, при которых уравнение обращается в верное числовое равенство. Точно так же свойства числовых неравенств помогут нам решать **неравенства с переменной**, т. е. находить те значения переменной, при которых неравенство с переменной обращается в верное числовое неравенство. Каждое такое значение переменной называют обычно **решением неравенства с переменной**.

Пример

$ax+b<y$

Рассмотрим, например, неравенство: **2x+5<7**. Подставив вместо **x** значение **0**, получим **5<7** - верное неравенство; значит, **x=0** — решение данного неравенства. Подставив вместо **x** значение **1**, получим **7<7** - неверное неравенство; поэтому **x=1** не является решением данного неравенства. Подставив вместо **x** значение **-3**, получим **-6+5<7**, т. е. **-1<7** - верное неравенство; следовательно, x=-1 - решение данного неравенства. Подставив вместо **x** значение **2,5**, получим **2*2,5+5<7**, т.е. **10<7** - неверное неравенство. Значит, x=2,5 не является решением неравенства.

Пример

$ax+b<y$

Но вы же понимаете, что это — тупиковый путь: ни один математик не станет так решать неравенство, ведь все числа невозможно перебрать! Вот тут-то и нужно использовать свойства числовых неравенств, рассуждая следующим образом.

Пример

$ax+b<y$

Нас интересуют такие числа **x**, при которых **2x+5<1** - верное числовое неравенство. Но тогда и **2x+5-5<7-5** - верное неравенство (согласно **свойству 2**: к обеим частям неравенства прибавили одно и то же число **– 5**). Получили более простое неравенство **2x<2**. Разделив обе его части на положительное число **2**, получим (на основании **свойства 3**) верное неравенство **x<1.**

Пример

$ax+b<y$

Что это значит? Это значит, что решением неравенства является любое число **x**, которое меньше **1**. Эти числа заполняют открытый луч **(-∞, 1)**. Обычно говорят, что этот луч — решение неравенства **$2x+5<7$** (точнее было бы говорить о множестве решений, но математики, как всегда, экономны в словах). Таким образом, можно использовать два варианта записи решений данного неравенства: **$x<1$** или **(-∞, 1)**.

Решение неравенств

$ax+b<y$

Свойства числовых неравенств позволяют руководствоваться при решении неравенств следующими правилами:

Правило 1

$ax+b<y$

Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, не изменив при этом знак неравенства.

Правило 2

$ax+b<y$

Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, не изменив при этом знак неравенства.

Правило 3

$ax+b<y$

Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный.

Оглавление