

Неравенства

Неравенства

Познакомившись с действительными числами, узнав об их свойствах, мы научились проводить различные арифметические операции над ними, такие как алгебраические преобразования выражений или решение уравнений. Настало время неравенств.

Неравенства

- Свойства числовых неравенств

- Решение линейных неравенств

КОНЕЦ

Сначала

Ж

Ж

Ж

У

СВОЙСТВА

$x \leq y$

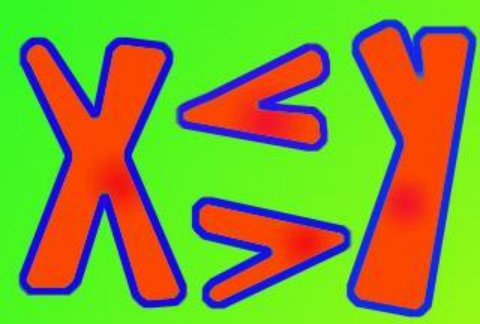


Недавно мы ввели понятие числового неравенства:

$a < b$ - это значит, что $a - b$ - положительное число;

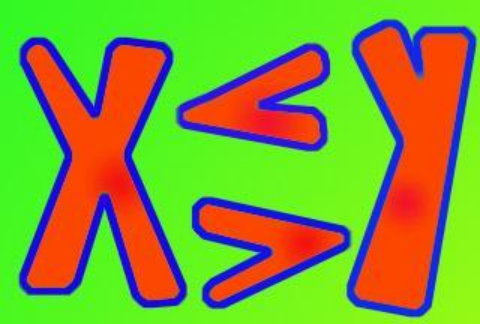
$a > b$ - это значит, что $a - b$ - отрицательное число.

Числовые неравенства обладают рядом свойств, знание которых поможет нам в дальнейшем работать с неравенствами.



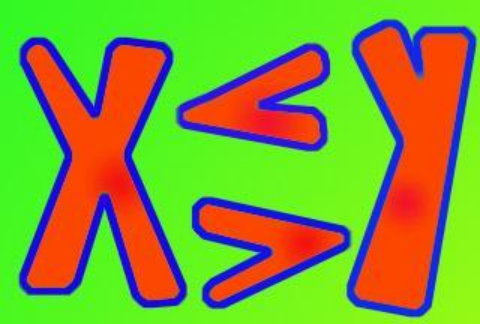
Для чего нужно?

Для чего нужно уметь решать уравнения, вы знаете: до сих пор математическая модель практически любой реальной ситуации, которую мы рассматривали, представляла собой либо уравнение, либо систему уравнений. На самом деле встречаются и другие математические модели — неравенства, просто мы пока таких ситуаций избегали.



Для чего нужно?

Знание свойств числовых неравенств будет полезно и для исследования функций. Например, с неравенствами связаны такие известные вам свойства функций, как наибольшее и наименьшее значения функции на некотором промежутке, ограниченность функции снизу или сверху. С неравенствами связано и свойство возрастания или убывания функции, о котором пойдет речь в одном из следующих параграфов. Так что, как видите, без знания свойств числовых неравенств нам не обойтись. Да мы сами уже могли убедиться в необходимости умения работать с неравенствами.



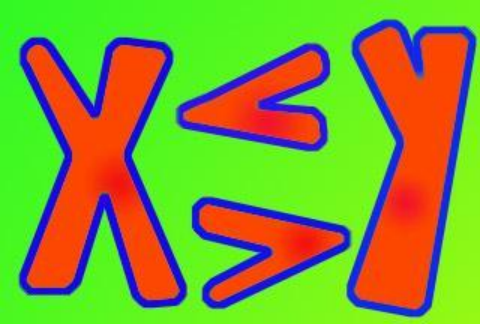
СВОЙСТВО 1

Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Доказательство:

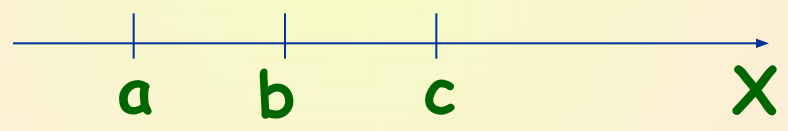
По условию, $a > b$, т.е. $a - b$ — положительное число.
Аналогично, так как $b > c$, делаем вывод, что $b - c$ — положительное число.

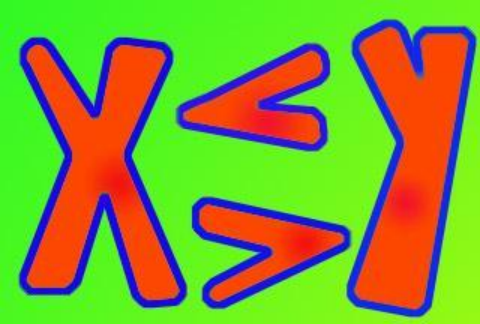
Сложив положительные числа $a - b$ и $b - c$, получим положительное число.
Имеем $(a - b) + (b - c) = a - c$. Значит, $a - c$ — положительное число, т.е. $a > c$, что и требовалось доказать.



СВОЙСТВО 1

Свойство 1 можно обосновать, используя геометрическую модель множества действительных чисел, т.е. числовую прямую. Неравенство $a > b$ означает, что на числовой прямой точка a расположена правее точки b , а неравенство $b > c$ — что точка b расположена правее точки c . Но тогда точка a расположена на прямой правее точки c , т.е. $a > c$.

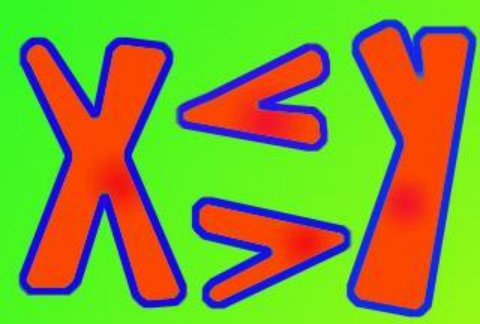




СВОЙСТВО 2

Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

То есть, если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же действительное число, то знак уравнения не меняется.

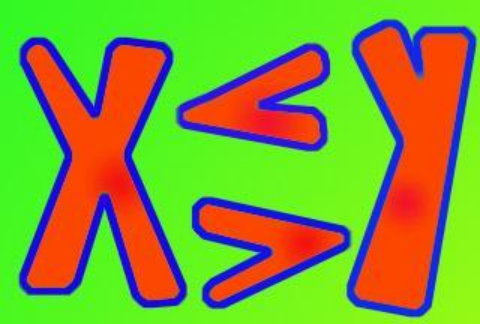


СВОЙСТВО 3

Если $a > b$ и $m > 0$, то $am > bm$;

Если $a > b$ и $m < 0$, то $am < bm$.

Смысл свойства 3 заключается в следующем: если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то знак неравенства следует сохранить. Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства следует изменить ($<$ на $>$, $>$ на $<$).

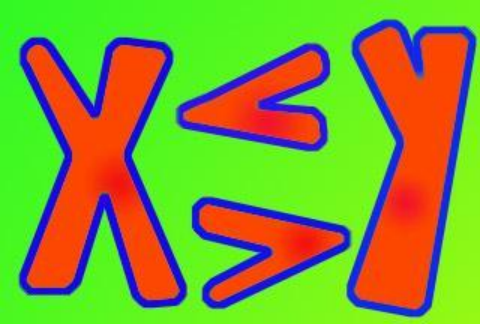


СВОЙСТВО 3

Если $a > b$ и $m > 0$, то $am > bm$;

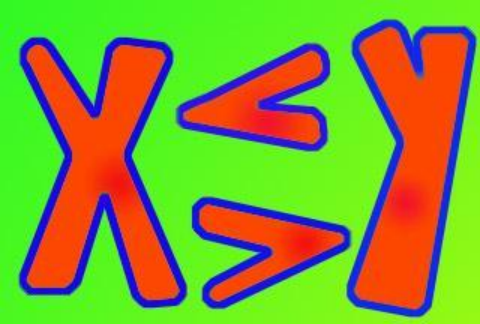
Если $a > b$ и $m < 0$, то $am < bm$.

То же относится к делению обеих частей неравенства на одно и то же положительное или отрицательное число m , то поскольку деление на m всегда можно заменить умножением на $1/m$.



СВОЙСТВО 3

Из свойства 3, в частности, следует, что, умножив обе части неравенства $a > b$ на -1 , получим $-a < -b$. Это значит, что если изменить знаки у обеих частей неравенства, то надо изменить и знак неравенства: если $a > b$, то $-a < -b$.

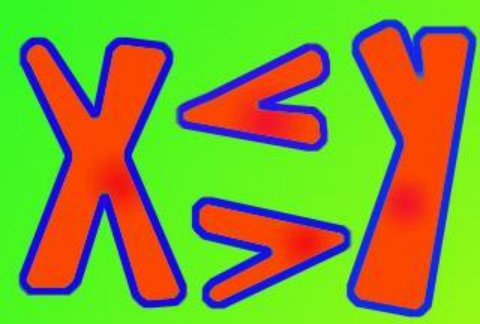


СВОЙСТВО 4

Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Доказательство:

Так как $a > b$, то, согласно свойству 2, $a + c > b + c$. Аналогично, так как $c > d$, то $b + c > b + d$. Итак, $a + c > b + c$, $b + c > b + d$. Тогда, в силу свойства 1, получаем, что $a + c > b + d$.

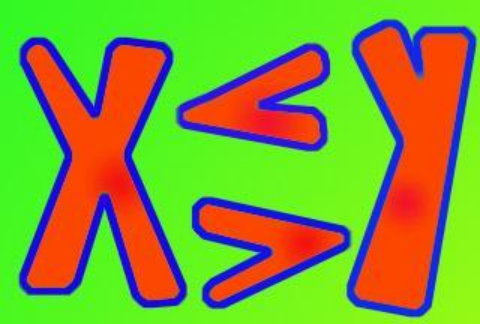


СВОЙСТВО 5

Если a, b, c, d - положительные числа, и $a > b, c > d$, то $ac > bd$.

Доказательство:

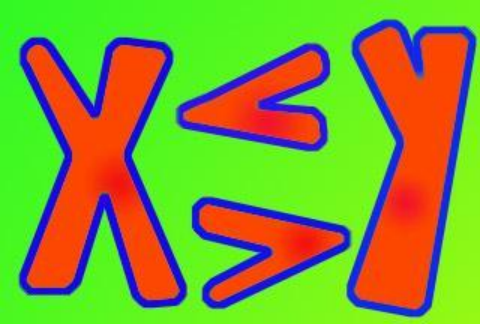
Так как $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$. Аналогично, так как $c > b$ и $b > 0$, то $cb > ab$. Итак, $ac > bc, bc > bd$. Тогда, согласно свойству 1, получаем, что $ac > bd$.



СВОЙСТВО 6

Если a и b — неотрицательные числа и $a > b$, то a в степени $n > b$ в степени n , где n — любое натуральное число.

Смысл свойства 6 заключается в следующем: если обе части неравенства — неотрицательные числа, то их можно возвести в одну и ту же натуральную степень, сохранив знак неравенства.



Смысл неравенства

Обычно неравенства вида $a > b$, $c > d$ (или $a < b$, $c < d$) называют неравенствами одинакового смысла, а неравенства $a > b$ и $c > d$ - неравенствами противоположного смысла. Свойство 5 означает, что при умножении неравенств одинакового смысла, у которых левые и правые части — положительные числа, получится неравенство того же смысла.

[Оглавление](#)



Решение линейных
неравенств

Решение неравенства с переменной

$$ax + b < y$$

Свойства числовых равенств помогали нам решать уравнения, т.е. находить те значения переменной, при которых уравнение обращается в верное числовое равенство. Точно так же свойства числовых неравенств помогут нам решать неравенства с переменной, т.е. находить те значения переменной, при которых неравенство с переменной обращается в верное числовое неравенство. Каждое такое значение переменной называют обычно решением неравенства с переменной.

Пример

$$ax + b < y$$

Рассмотрим, например, неравенство: $2x + 5 < 7$. Подставив вместо x значение 0 , получим $5 < 7$ - верное неравенство; значит, $x = 0$ — решение данного неравенства. Подставив вместо x значение 1 , получим $7 < 7$ - неверное неравенство; поэтому $x = 1$ не является решением данного неравенства. Подставив вместо x значение -3 , получим $-6 + 5 < 7$, т. е. $-1 < 7$ - верное неравенство; следовательно, $x = -1$ - решение данного неравенства. Подставив вместо x значение $2,5$, получим $2 * 2,5 + 5 < 7$, т. е. $10 < 7$ - неверное неравенство. Значит, $x = 2,5$ не является решением неравенства.

Пример

$$ax + b < y$$

Но вы же понимаете, что это — тупиковый путь: ни один математик не станет так решать неравенство, ведь все числа невозможно перебрать! Вот тут-то и нужно использовать свойства числовых неравенств, рассуждая следующим образом.

Пример

$$ax + b < y$$

Нас интересуют такие числа x , при которых $2x + 5 < 1$ - верное числовое неравенство. Но тогда и $2x + 5 - 5 < 1 - 5$ - верное неравенство (согласно свойству 2: к обеим частям неравенства прибавили одно и то же число - 5). Получили более простое неравенство $2x < -4$. Разделив обе его части на положительное число 2, получим (на основании свойства 3) верное неравенство $x < -2$.

Пример

$$ax + b < y$$

Что это значит? Это значит, что решением неравенства является любое число x , которое меньше 1 . Эти числа заполняют открытый луч $(-\infty, 1)$. Обычно говорят, что этот луч — решение неравенства $2x + 5 < 7$ (точнее было бы говорить о множестве решений, но математики, как всегда, экономны в словах). Таким образом, можно использовать два варианта записи решений данного неравенства: $x < 1$ или $(-\infty, 1)$.

Решение неравенств

$$ax + b < y$$

Свойства числовых неравенств позволяют руководствоваться при решении неравенств следующими правилами:

Правило 1

$$ax + b < y$$

Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, не изменив при этом знак неравенства.

Правило 2

$$ax + b < y$$

Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, не изменив при этом знак неравенства.

Правило 3

$$ax + b < y$$

Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный.

Оглавление