

Обратные тригонометрические функции

Работу выполнила

Учитель МАОУ «Лицей №10»

Золотухина Л.В

Содержание:

1. Обратные тригонометрические функции, свойства, графики
2. Историческая справка
3. Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции
4. Решение уравнений
5. Задания различного уровня сложности

Из истории тригонометрических функций

- Древняя Греция. III в до н. э. Евклид, Аполоний Пергский. Отношения сторон в прямоугольном треугольнике.
- Ок. 190 до н. э Гиппарх Никейский. Возможно он первый составил таблицу хорд, аналог современных таблиц тригонометрических функций.
- Абу-аль-Ваф ввел тригонометрические функции тангенс и котангенс.
- Первая половина XV в. Аль-Каши произвел уникальные расчеты, которые были нужны для составления таблицы синусов с шагом $1'$.
- I-II вв. индийские математики вводят понятие синуса.
- 1423-1461- австрийский математик и астроном Георг фон Пойербак был одним из первых европейских ученых, который применил понятие синуса.
- 1602-1675 французский математик, астроном и физик Жиль Роберваль построил синусоиду.
- XV в. Региомонтан ввел термин тангенс.
- 1739 г. И. Бернулли ввел современные обозначения синуса и косинуса.
- 1770 г. Георг Симон Кюгель вводит новый термин тригонометрические функции.
- 1772 г. Ж. Лагранж вводит первую из шести обратных тригонометрических функций.
- Карл Шерфер ввел современные обозначения для обратных тригонометрических функций.

Arcsin x

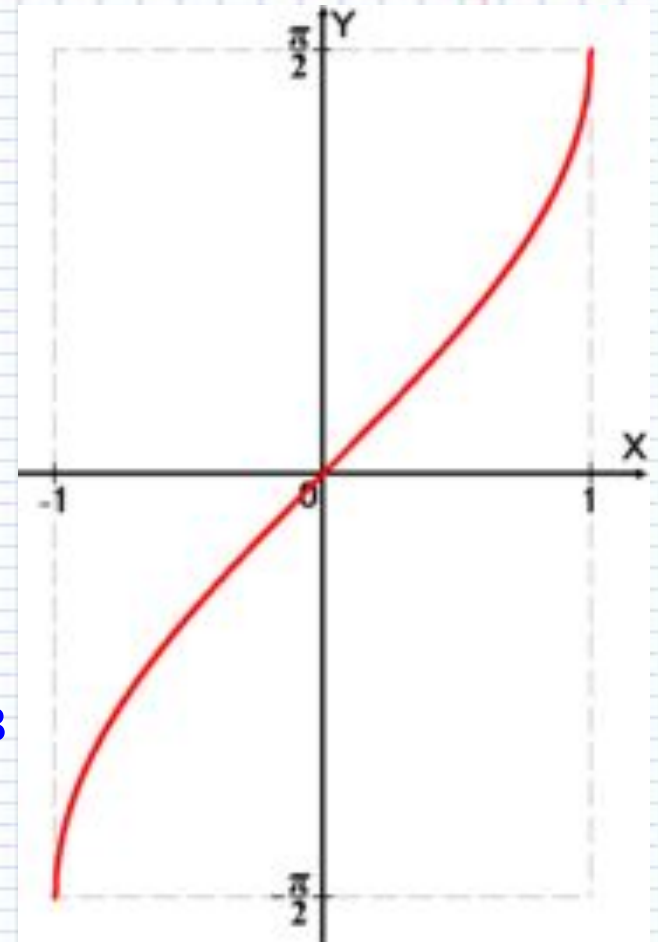
Арксинусом числа m называется такой угол x , для которого $\sin x = m$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, |m| \leq 1$

Функция $y = \sin x$ непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой. Функция $y = \arcsin x$ является строго возрастающей.

График обратной функции симметричен с графиком основной функции относительно биссектрисы I - III координатных углов.

Свойства функции $y = \arcsin x$

- 1) Область определения: отрезок $[-1; 1]$;
- 2) Область изменения: отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$;
- 3) Функция $y = \arcsin x$ нечетная:
 $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;
- 4) Функция $y = \arcsin x$ монотонно возрастающая;
- 5) График пересекает оси Ox , Oy в начале координат.



Arccos x

Арккосинусом числа m называется такой угол x , для которого:

$$\cos x = m$$

$$0 \leq x \leq \pi$$

$$|m| \leq 1$$

Свойства функции $y = \arccos x$.

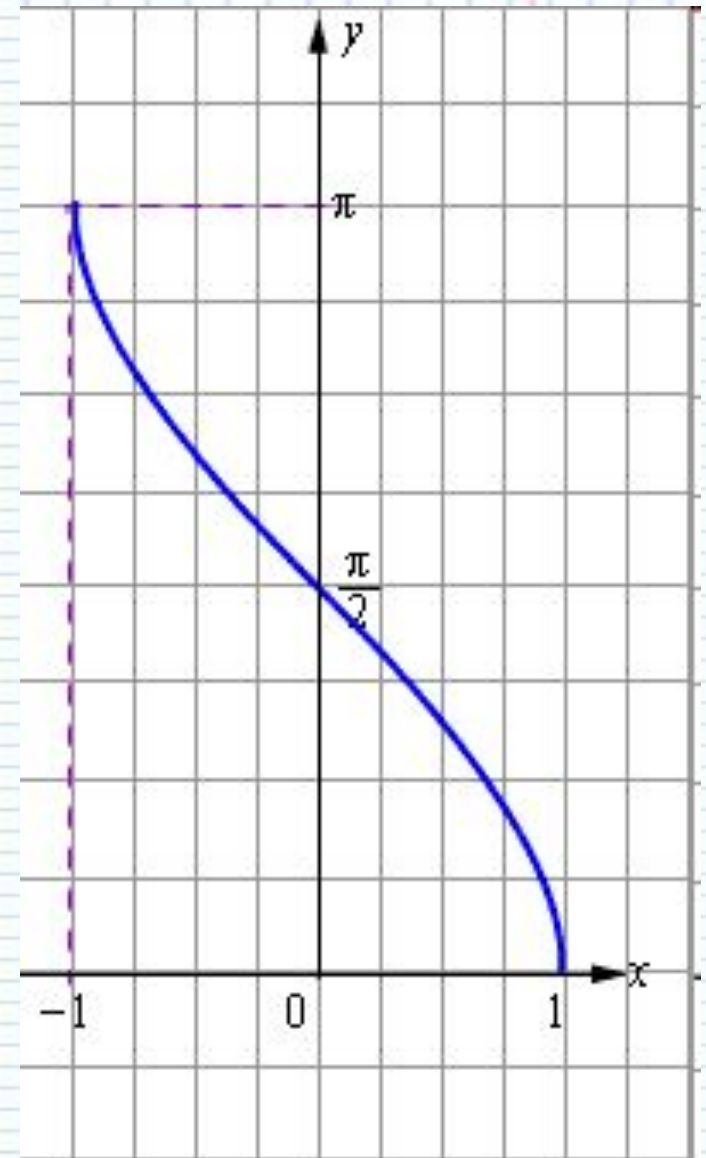
**Функция $y = \arccos x$
является строго
убывающей**

$$\cos(\arccos x) = x \text{ при} \\ -1 \leq x \leq 1$$

$$\arccos(\cos y) = y \text{ при} \\ 0 \leq y \leq \pi$$

$$D(\arccos x) = [-1; 1]$$

$$E(\arccos x) = [0; \pi]$$



Arctgx

Арктангенсом числа m называется такой угол x , для которого $\operatorname{tg}x=m$,
 $-\pi/2 < x < \pi/2$.

График функции $y=\operatorname{arctg}x$ получается из графика функции $y=\operatorname{tg}x$, симметрией относительно прямой $y=x$.

$y = \text{arctg} x$

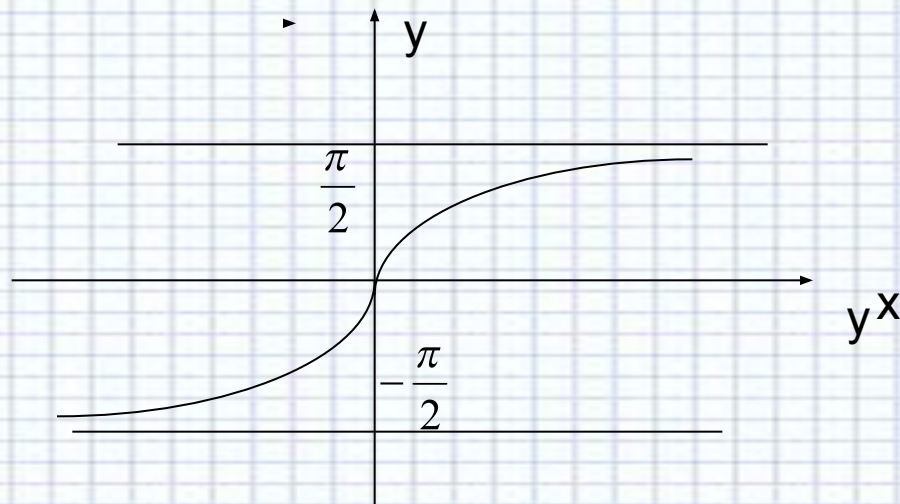
1) Область определения: \mathbb{R}

2) Область значения: отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$;

3) Функция $y = \text{arctg} x$ нечетная: $\text{arctg} (-x) = -\text{arctg} x$;

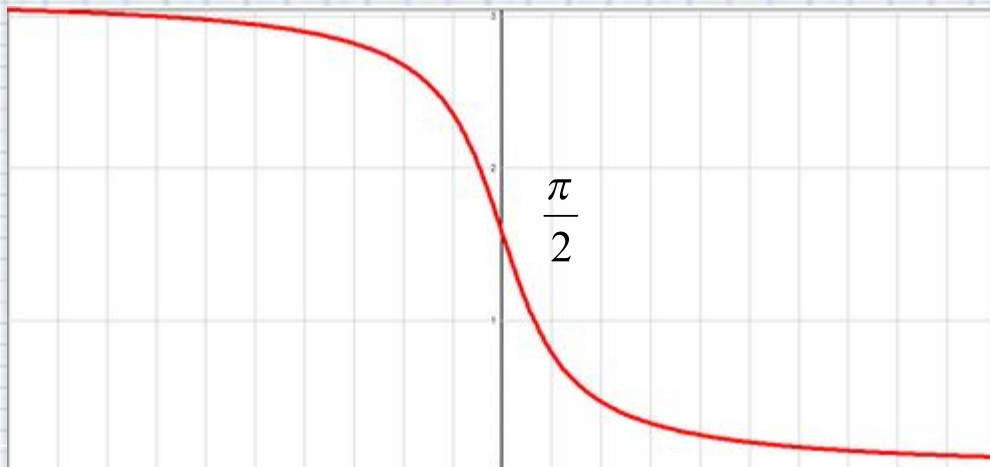
4) Функция $y = \text{arctg} x$ монотонно возрастающая;

5) График пересекает оси Ox , Oy в начале координат.



Arcctgx

Арккотангенсом числа m называется такой угол x , для которого $\text{ctgx} = a$, $0 < x < \pi$



Arcctgx

- Функция $y = \text{arcctg} x$ непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой.
- Функция $y = \text{arcctg} x$ является строго убывающей.
- $\text{ctg}(\text{arcctg} x) = x$ при $x \in \mathbb{R}$
- $\text{arcctg}(\text{ctg} y) = y$ при $0 < y < \pi$
- $D(\text{arcctg} x) = (-\infty; \infty)$
- $E(\text{arcctg} x) = (0; \pi)$

Преобразование выражений

Вычислить :

1) $24\sqrt{3}\operatorname{tg}(\arcsin 0,5)$; 2) $4\sqrt{2}\cos(\operatorname{arccctg} 1)$;

3) $12\sqrt{7}\operatorname{ctg}\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$.

Решение :

1) $24\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = 24\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 24$.

2) $4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$.

3) $\sin \alpha = -\frac{3}{4}$, $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$,

$\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$,

$12\sqrt{7}\operatorname{ctg}\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = -12\sqrt{7}\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)\right) =$

$= -12\sqrt{7} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = 28$.

Преобразование выражений

1. Вычислить без калькулятора

$$4\arctg \frac{1}{5} - \arctg \frac{1}{239}$$

Решение:

$$\alpha = \arctg \frac{1}{5}, \beta = \arctg \frac{1}{239}, \text{ тогда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}, \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{239}$$

Надо вычислить $B = 4\alpha - \beta$

Возьмем танген от обеих частей этого равенства:

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg}(4\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \cdot \frac{1}{239}} = \frac{239 \cdot 120 - 119}{119 \cdot 239 + 120} = 1. \text{ Так как } \operatorname{tg} B = 1, \text{ то } B = \frac{\pi}{4}.$$

Упражнения для самостоятельного решения

Вычислить :

1. $\cos(2\arccos \frac{4}{5});$

2. $\sin(\frac{1}{2}\arccos \frac{3}{5} - 2\arctg(-2));$

3. $\text{tg}(\frac{1}{2}\arccos \frac{3}{5} - 2\arctg(-2)).$

Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

1. Решить уравнение $\arccos(2x + 1) = \frac{3\pi}{4}$.

Так как $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$, то по определению арккосинуса а числа данное уравнение равносильно уравнению

$$2x + 1 = \cos \frac{3\pi}{4}, \text{ откуда } 2x + 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

2. Решить уравнение $2(\arcsin x)^2 - 5 \arcsin x + 2 = 0$.

Пусть $\arcsin x = t$, причем $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тогда

$$2t^2 - 5t + 2 = 0.$$

$$t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}, \text{ но } 2 \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arcsin x = \frac{1}{2}, x = \sin \frac{1}{2}.$$

Упражнения для самостоятельного решения

Решить уравнения :

$$1. \arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{3};$$

$$2. \operatorname{arctg} \frac{1-x}{4} = \frac{\pi}{3},$$

$$3. \arcsin x - \arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Задания различного уровня сложности

Найти значение выражения

$$6\sqrt{11}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\right).$$

Решение : Применим формулу приведения :

$$6\sqrt{11}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\right) = -6\sqrt{11}\sin\left(\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\right).$$

Поскольку $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$, то

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\right) &= 1 - \cos^2\left(\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\right) = \\ &= 1 - \left(-\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}.\end{aligned}$$

Функция $f(x) = \sin x$ на промежутке $[0; \pi]$ принимает только неотрицательные значения, поэтому

$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{11}}{6},$$

Значение данного выражения равно -11.

Задания различного уровня сложности

Решить уравнение

$$2\arcsin 2x = \arccos 7x.$$

Решение : найдем ОДЗ уравнения :

$$\begin{cases} -1 \leq 2x \leq 1 \\ -1 \leq 7x \leq 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{7} \leq x \leq \frac{1}{7} \end{cases}$$

$$\text{то есть } -\frac{1}{7} \leq x \leq \frac{1}{7}.$$

На этом промежутке уравнение равносильно следующему :

$$\cos(2\arcsin 2x) = \cos(\arccos 7x)$$

$$\text{Так как } \cos(\arccos 7x) = 7x,$$

$$\cos(2\arcsin 2x) = 1 - 2\sin^2(\arcsin 2x) = 1 - 2(2x)^2 = 1 - 8x^2$$

$$1 - 8x^2 = 7x \text{ или } 8x^2 + 7x - 1 = 0, x = -1, x = \frac{1}{8}.$$

$$\text{С учетом ОДЗ получаем окончательно } x = \frac{1}{8}.$$

Задания различного уровня сложности

Решить задачу :

Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол, равный 60° .

Найдите угол между боковыми гранями.

Решение :

Воспользуемся соотношением между данным и искомым

$$\text{углами. } \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta. \text{ Получим, что } \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Найдем } \cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{6}{16} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Получим, что } \varphi = \pi - \arccos \frac{1}{4}.$$

Таблицы значений обратных тригонометрических функций

В следующей таблице приведены значения функций **арксинуса** и **арккосинуса** для некоторых значений углов:

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

В следующей таблице приведены значения
функций
арктангенса и арккотангенса
для некоторых значений углов:

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Литература:

1. Алгебра и начала анализа: учеб. Для 10-11 кл. общеобр. учреждений/ Ш.А. Алимов, Просвещение, 2009.-384 с.
2. Тесты по математике для абитуриентов.-М.:Айрис-пресс,2003.-352 с.
3. За страницами учебника математики/С.А Литвинова, Л.В. Куликова.- 2-е изд.,дополнительное.М.: Глобус, Волгоград: Панорама,2008.-176с.