

8.9. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Теорема Ферма

*Если дифференцируемая на промежутке
X функция $y=f(x)$ достигает
наибольшего или наименьшего
значения во внутренней точке x_0 этого
промежутка, то производная функции
в этой точке равна 0:*

$$f'(x_0) = 0$$

Доказательство:

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на промежутке X и в точке $x_0 \in X$

принимает наименьшее значение.

Тогда $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$

если $x_0 + \Delta x \in X$

Величина $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$

Следовательно

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{при} \quad \Delta x > 0 \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{при} \quad \Delta x < 0$$

Переходим в этих неравенствах соответственно к пределу справа и слева:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$$

По условию функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , следовательно ее предел при $\Delta x \rightarrow 0$ не должен зависеть от способа стремления Δx к нулю, т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$$



Геометрический смысл теоремы Ферма

В точке наибольшего или наименьшего значения, достигаемого внутри промежутка X , касательная к графику функции параллельна оси X .

Теорема Ролля

Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1. Непрерывна на отрезке $[a,b]$.*
- 2. Дифференцируема на интервале (a,b) .*
- 3. На концах отрезка принимает равные значения: $f(a)=f(b)$.*

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка ξ , в которой производная равна нулю:

$$f'(\xi) = 0$$

Доказательство:

По теореме Вейерштрасса, функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своего наибольшего M и наименьшего m значений.

Если оба этих значения достигаются на концах отрезка, то они по условию равны: $M = m$, а это значит, что функция постоянна на $[a, b]$. Тогда $f'(x) = 0$ во всех точках этого отрезка.

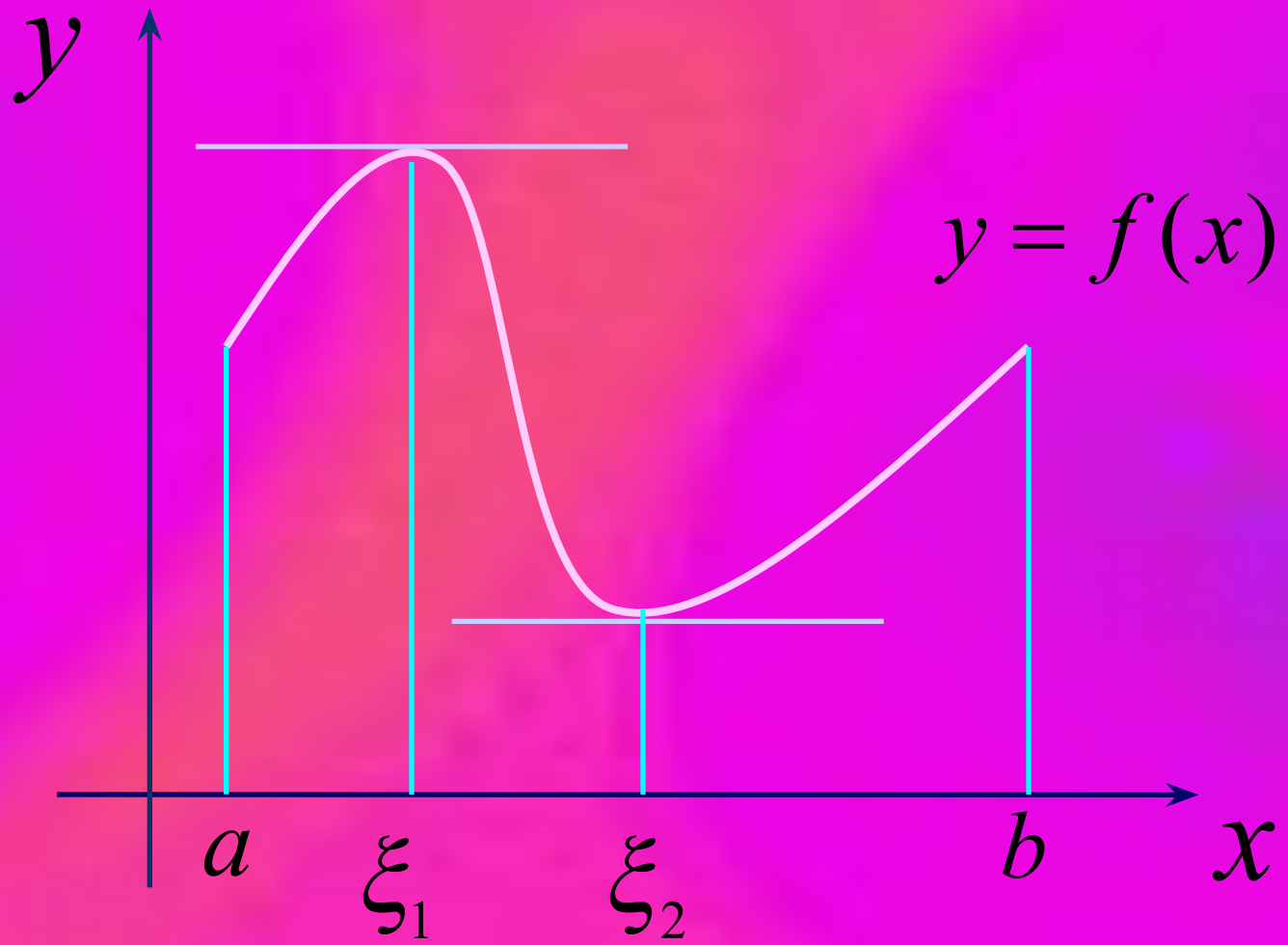
Если же хотя бы одно из этих значений достигается внутри отрезка, то по теореме Ферма, производная функции в этой точке равна нулю:

$$f'(x) = 0$$



Геометрический смысл теоремы Ролля

Найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции параллельна оси X , в этой точке производная функции будет равна нулю.

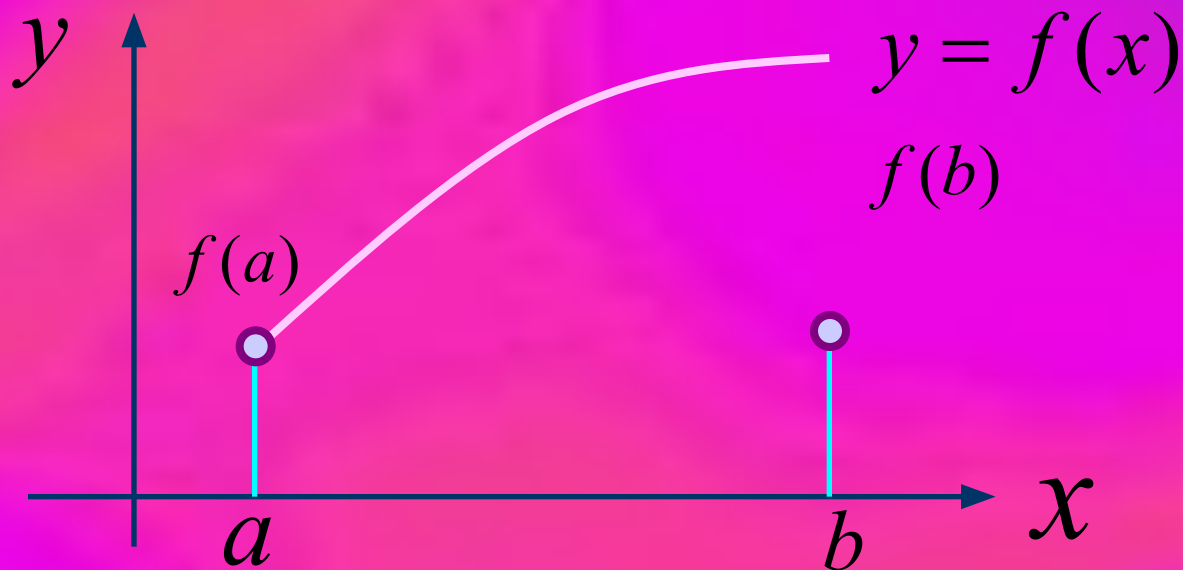


Если же хотя бы одно условие теоремы Ролля нарушено, то заключение теоремы может быть неверным.

Например:

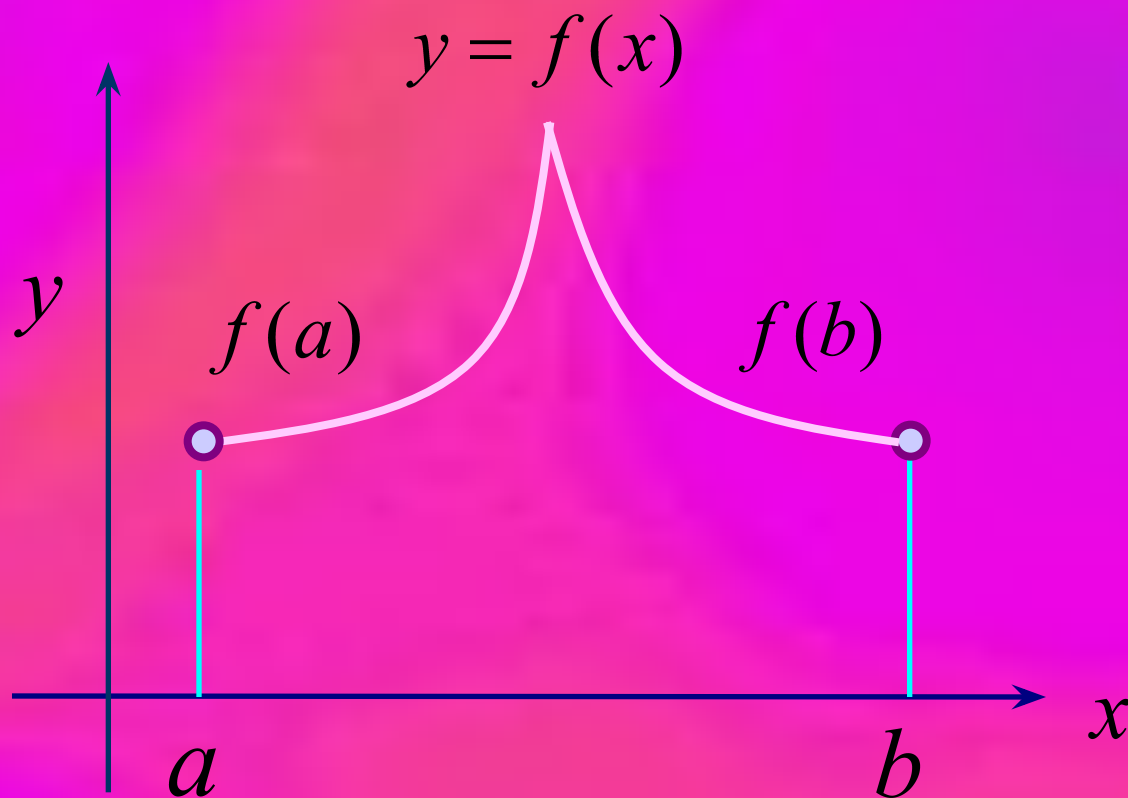
+

Отсутствует непрерывность на $[a,b]$.



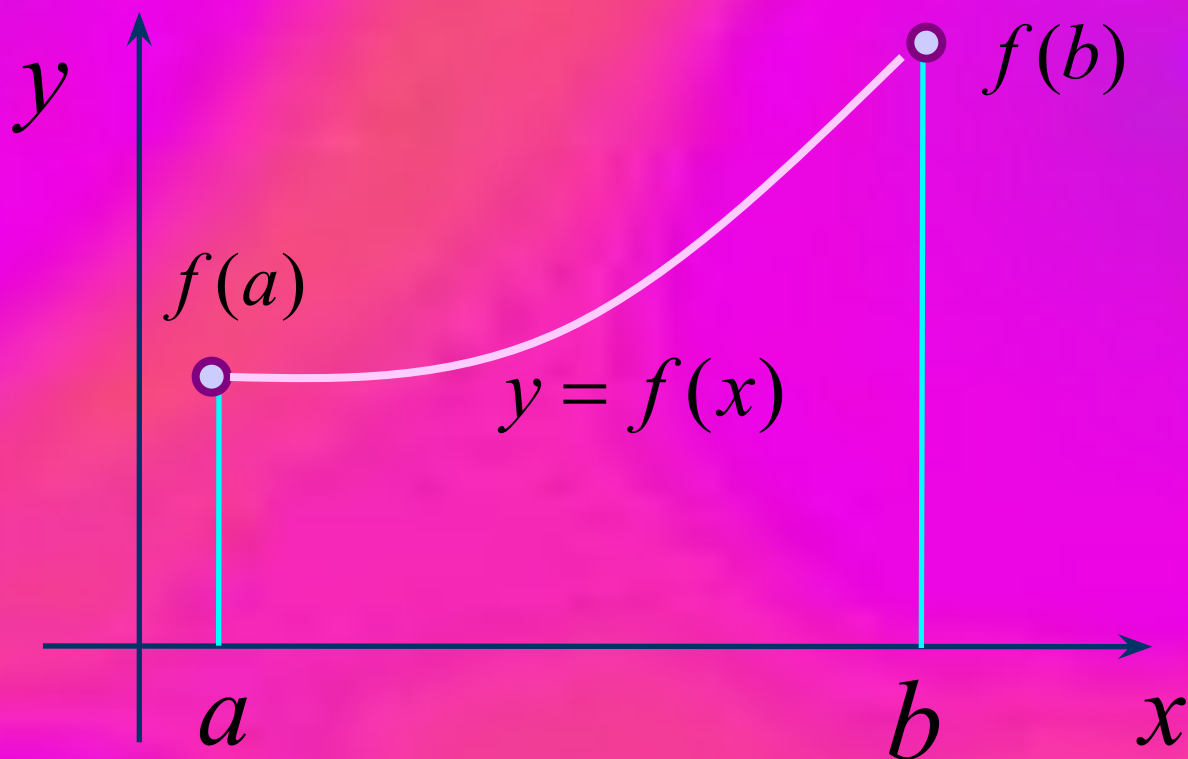
2

Отсутствует дифференцируемость на (a,b) .



3

$$f(a) \neq f(b)$$



Теорема Лагранжа

Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1. Непрерывна на отрезке $[a,b]$.*
- 2. Дифференцируема на интервале (a,b) .*

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка ξ , в которой производная функции равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Доказательство:

Введем новую функцию $g(x)$:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

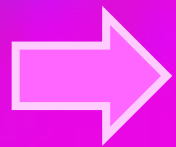
Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

Она непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и на концах отрезка принимает равные значения:

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a)$$

$$g(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) \rightarrow 0$$



$$g(a) = f(a)$$



$$g(a) = g(b)$$

Следовательно, по теореме Ролля существует точка

$$\xi \in (a, b)$$

такая, что

$$g'(\xi) = 0$$

или
$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (\xi - a)' = 0$$



$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

отсюда

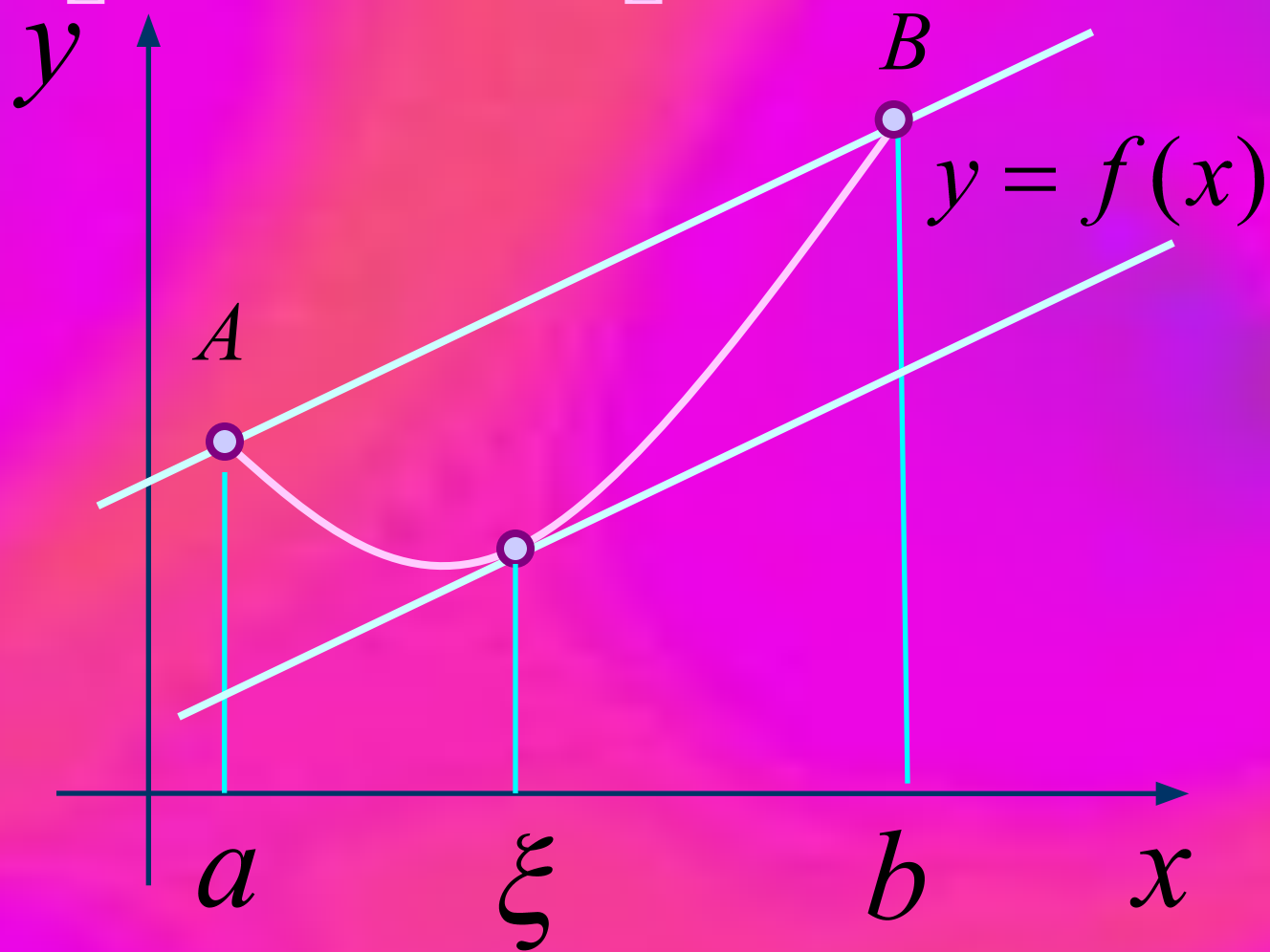
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Эту теорему часто записывают в виде:

$$f'(\xi) \cdot (b - a) = f(b) - f(a)$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа



*Если перемещать прямую АВ
параллельно начальному положению,
то найдется хотя бы одна точка*

$$\xi \in (a, b)$$

*в которой касательная к графику
функции $y=f(x)$ и хорда АВ, проведенная
через концы дуги АВ будут
параллельны.*

Следствие.

Если производная функции $y=f(x)$ равна 0 на некотором промежутке X , то эта функция постоянна на всем промежутке.

Доказательство:

Возьмем на промежутке X $[a, x]$, тогда по теореме Лагранжа

$$f'(\xi) \cdot (x - a) = f(x) - f(a)$$

По условию теоремы $f'(\xi) = 0$

→ $0 \cdot (x - a) = f(x) - f(a)$

→ $0 = f(x) - f(a)$

То есть

$$f(x) = f(a)$$

