8.9. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Теорема Ферма

Если дифференцируемая на промежутке X функция y=f(x) достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна 0:

$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$

Доказательство:

Пусть функция *y=f(x)* дифференцируема на промежутке *X* и в точке $x_0 \in X$ **принимает наименьшее значение.**

Тогда $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$

если $x_0 + \Delta x \in X$

Величина $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$

Следовательно

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ **при** $\Delta x > 0$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ **при** $\Delta x < 0$

Переходим в этих неравенствах соответственно к пределу справа и слева:

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$$

По условию функция *y=f(x)* дифференцируема в точке x_0, следовательно ее предел при $\Delta x \to 0$ **не должен зависеть от способа стремления** Δx **к нулю, т.е.**

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \boxed{f'(x_0) = 0}$$

Геометрический смысл теоремы Ферма

В точке наибольшего или наименьшего значения, достигаемого внутри промежутка
X, касательная к графику функции параллельна оси X.

Теорема Ролля

Пусть функция y=f(x) удовлетворяет следующим условиям:

1. ***Непрерывна на отрезке [a,b].***
2. ***Дифференцируема на интервале (a,b).***
3. ***На концах отрезка принимает равные значения: f(a)=f(b).***

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка ξ, в которой производная равна нулю:

$$\boxed{f'(\xi) = 0}$$

Доказательство:

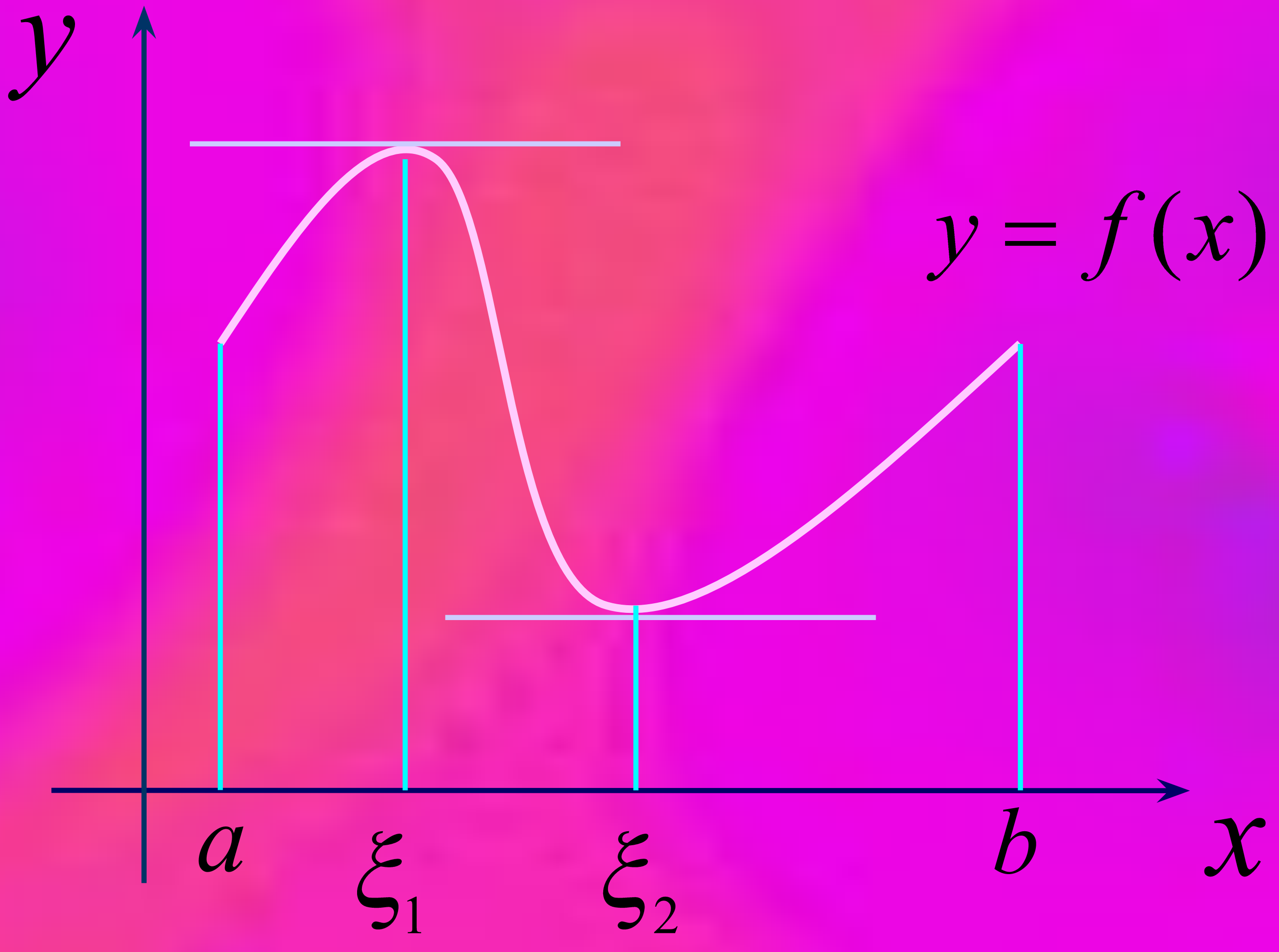
По теореме Вейерштрасса, функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своего наибольшего *M* и наименьшего *m* значений.

Если оба этих значения достигаются на концах отрезка,то они по условию равны: *M*= *m*, а это значит, что функция постоянна на *[a,b]*. Тогда $f'(x) = 0$ во всех точках этого отрезка.

Если же хотя бы одно из этих значений достигается внутри отрезка, то по теореме Ферма, производная функции в этой точке равна нулю: $f'(x) = 0$

Геометрический смысл теоремы Ролля

Найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции параллельна оси Х, в этой точке производная функции будет равна нулю.



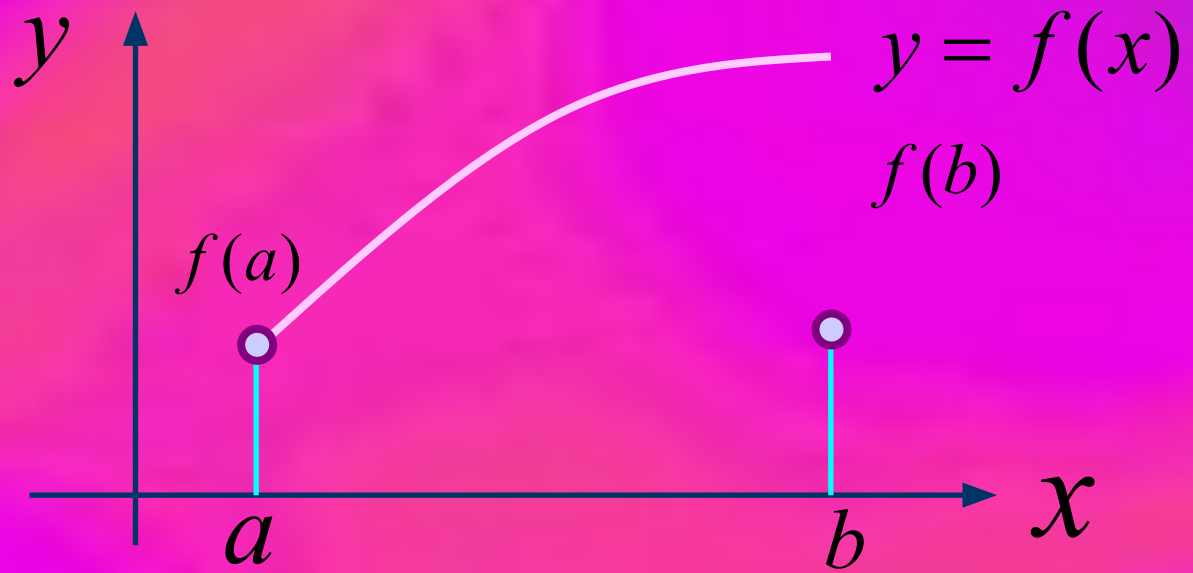
y
y = f(x)
a
ξ1
ξ2
b
x

Если же хотя бы одно условие теоремы Ролля нарушено, то заключение теоремы может быть неверным.

Например:

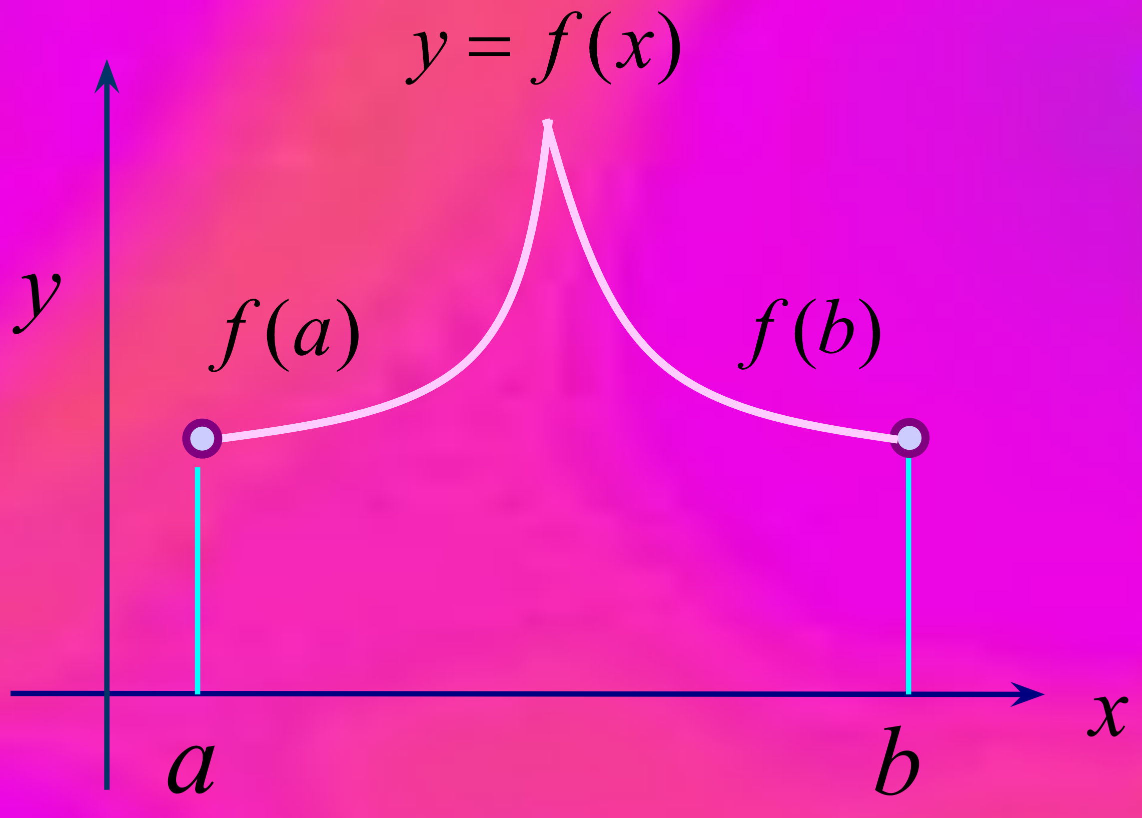
1

Отсутствует непрерывность на [a,b].



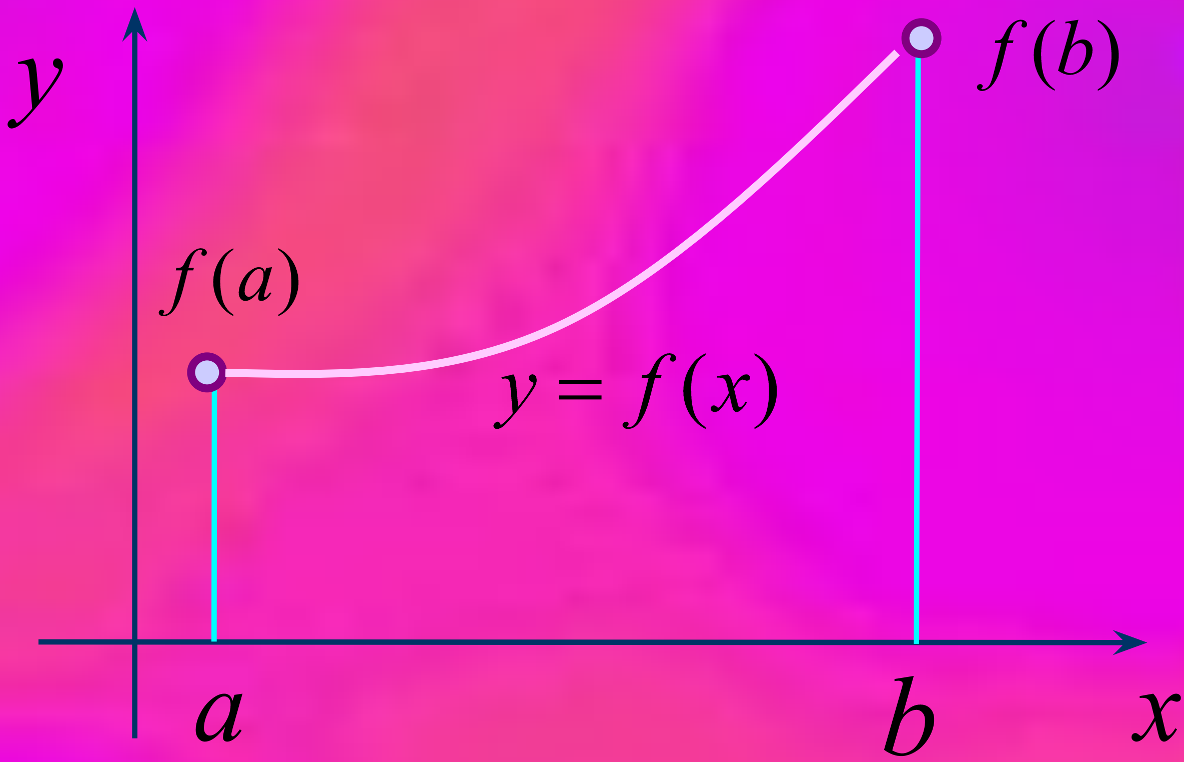
2

Отсутствует дифференцируемость на (a,b).



3

$$f(a) \neq f(b)$$



Теорема Лагранжа

Пусть функция y=f(x) удовлетворяет следующим условиям:

1. ***Непрерывна на отрезке [a,b].***
2. ***Дифференцируема на интервале (a,b).***

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка ξ, в которой производная функции равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Доказательство:

Введем новую функцию *g(x)*:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

Она непрерывна на *[a,b]*, дифференцируема на *(a,b)* и на концах отрезка принимает равные значения:

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{\cancel{b - a}} \cdot \cancel{(b - a)}$$

$$g(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$$

$$g(a) = f(a) - \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a)}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad g(a) = f(a) \quad \Rightarrow \quad g(a) = g(b)$$

Следовательно, по теореме Ролля существует точка

$$\xi \in (a, b)$$

такая, что

$$g'(\xi) = 0$$

или $$g'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(\xi-a)'=0$$

$$\Rightarrow \quad g'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

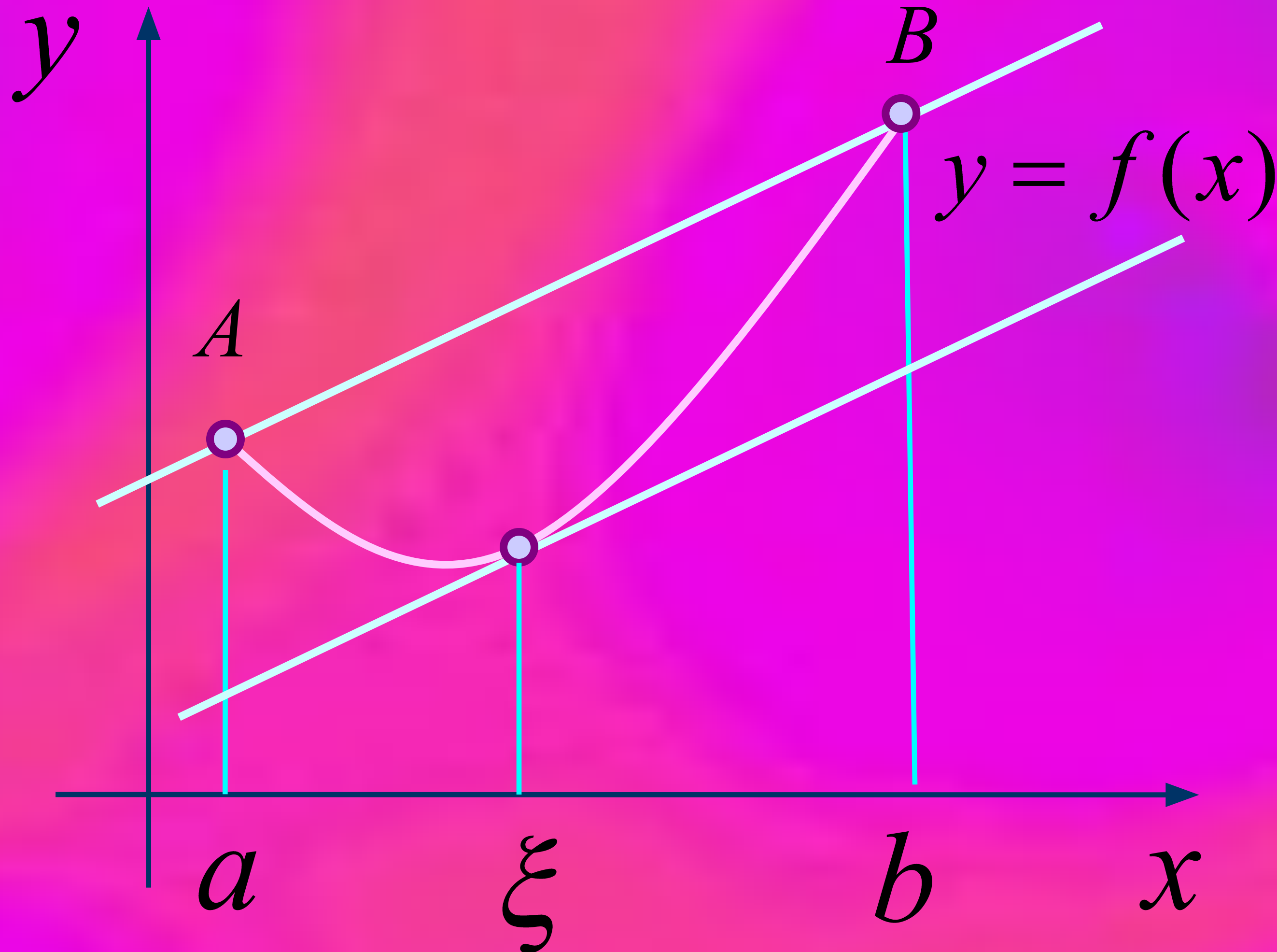
отсюда

$$\boxed{f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Эту теорему часто записывают в виде:

$$f'(\xi)\cdot(b-a)=f(b)-f(a)$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа



Если перемещать прямую АВ параллельно начальному положению, то найдется хотя бы одна точка

$$\xi \in (a,b)$$

в которой касательная к графику функции y=f(x) и хорда АВ, проведенная через концы дуги АВ будут параллельны.

Следствие.

Если производная функции $y=f(x)$ равна 0 на некотором промежутке X, то эта функция постоянна на всем промежутке.

Доказательство:

Возьмем на промежутке X *[a,x]*, тогда по теореме Лагранжа

$$f'(\xi)\cdot(x-a)=f(x)-f(a)$$

По условию теоремы $f'(\xi)=0$

$$\Rightarrow\quad 0\cdot(x-a)=f(x)-f(a)$$

$$\Rightarrow\quad 0=f(x)-f(a)$$

То есть

$$\boxed{f(x)=f(a)}$$