

Дидактический материал
тема: «Тригонометрические функции»

Пояснительная записка

В результате изучения курса математики учащиеся должны понимать, что функция – математическая модель, позволяющая описывать и изучать разнообразные зависимости между реальными величинами, уметь логически мыслить, проявлять творческие способности на уровне, необходимом для продолжения образования и для самостоятельной деятельности.

Данные дидактические материалы рассчитаны для курса математики 10 класса, обучающего по учебнику Алимов Ш.А. «Алгебра и начала анализа» по основной программе с учетом стандартов основного общего образования по математике.

После пройденного курса учащиеся должны знать:

- Определение области определения и множества значений функции, в том числе тригонометрических функций;
- Определение четности и нечетности функции, периодичности тригонометрических функций;
- Понятие функции косинуса, схему исследования функции $y = \cos(x)$ и её свойства;
- Понятие функции синуса, схему исследования функции $y = \sin(x)$ и её свойства;
- Понятие функции тангенса и котангенса, схему исследования функции $y = \operatorname{tg}(x)$ и $y = \operatorname{ctg}(x)$ и их свойства;
- Какие функции являются обратными тригонометрическими, иметь представление об их графиках и свойствах.

После изучения практического материала учащиеся должны уметь:

- Находить область определения и область значений тригонометрических функций;
- Находить период тригонометрических функций, исследовать их на четность и нечетность;
- Строить графики функций $y = \cos(x)$, $y = \sin(x)$, $y = \operatorname{tg}(x)$ и $y = \operatorname{ctg}(x)$;
- Находить по графикам промежутки возрастания и убывания, промежутки постоянных знаков, наибольшее и наименьшее значения функций;
- Преобразование графиков: параллельный перенос, симметрия относительно начала и осей координат, растяжение и сжатие вдоль осей координат;
- Решать задачи с использованием свойств обратных тригонометрических функций;
- Использовать свойства функции для сравнения и оценки её значений.

§ 38. «Область определения и множество значений тригонометрических функций».

Цель:

Знать: Определение области определения и множества значений функции, в том числе тригонометрических функций.

Уметь: Находить область определения и область значений тригонометрических функций.

Урок 1-3.

Справочный материал:

| Функция | Область определения D (x) | Множество значений E (y) |
|-----------------------------|---|-----------------------------------|
| $y = \sin(x)$ | R | $-1 \leq y \leq 1$ |
| $y = \cos(x)$ | R | $-1 \leq y \leq 1$ |
| $y = \operatorname{tg}(x)$ | $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n, n \in Z$ | R |
| $y = \operatorname{ctg}(x)$ | $x \neq \pi \cdot n, n \in Z$ | R |

Тренировочный тест

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\cos(x)}$.

а) $x \in R$; б) $x \geq 0$; в) $2\pi \cdot n \leq x \leq \pi + 2\pi \cdot n, n \in Z$;

г) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n, n \in Z$.

2. Найдите множество значений функции $y = 3 - 5 \cdot \sin(x)$.

а) $[-8; 8]$; б) $[-2; 8]$; в) $[-2; 5]$; г) $[-5; 2]$.

3. Чему равно наименьшее значение функции
 $y = \sin(x) \cdot \cos(x)$?

а) -1; б) -2; в) -1/2; г) 1.

4. Чему равно наибольшее значение функции
 $y = \sin^2 x - \cos^2 x$?

а) 0; б) 1; в) -1; г) 2.

Тренажер №1

Найти область определения функции:

В – 1

1. $y = \operatorname{ctg} x$

2. $y = \operatorname{tg} 2x$

3. $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$

4. $y = \frac{1}{\cos \frac{x}{2}}$

5. $y = \frac{1}{2 + \sin x}$

В – 2

1. $y = 3 \operatorname{tg} x$

2. $y = 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

3. $y = \frac{1}{\sin 2x}$

4. $y = \frac{1}{\sin 3x} + \frac{1}{\cos 3x}$

5. $y = \frac{1}{1 - \cos x}$

В – 3

1. $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$

2. $y = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$

3. $y = \frac{3}{1 + \sin x}$

4. $y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

5. $y = \operatorname{tg}(x) + \frac{1}{\operatorname{ctg}(x) + 1}$

Самостоятельная работа

1. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x - 2}$

а) $y = \sqrt{x^2 - 25}$

б) $y = 0,5 \cdot \cos x$

б) $y = 3 \cdot \sin x$

в) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

в) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

2. Найдите множество значений функции:

$y = (\cos x - \sin x)^2$

$y = (\cos x + \sin x)^2$

§ 39. «Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций».

Цель:

Знать: Определение четности и нечетности функции, периодичности тригонометрических функций.

Уметь: Находить период тригонометрических функций, исследовать их на четность и нечетность.

Справочный материал:

| Функция | Четность | Период |
|----------------------------|----------|--------|
| $y = \sin x$ | Нечетная | 2π |
| $y = \cos x$ | Четная | 2π |
| $y = \operatorname{tg} x$ | Нечетная | π |
| $y = \operatorname{ctg} x$ | Нечетная | π |

Тренировочный тест.

1. Какая из функций является четной?

А. $y = \sin x$ Б. $y = \operatorname{tg}(x)$ В. $y = \cos x$ Г. $y = \operatorname{ctg}(x)$

2. Какая из функций является нечетной?

А. $y = \cos x + 1$ Б. $y = 2 \cdot \operatorname{tg}(x - 3)$ В. $y = \sin^2 x$ Г. $y = \frac{1}{2} \sin 2x$

3. Какая из функций не является четной, не является нечетной?

А. $y = \sin x + 2$ Б. $y = \cos x \cdot \sin x$ В. $y = 2 \sin(\pi - x)$ Г. $y = |\operatorname{tg}(x)|$

4. Найдите наименьший положительный период функции $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

А. π Б. 2π В. $\frac{11\pi}{6}$ Г. $\frac{5\pi}{6}$

5. Какая из функций имеет период 2π ?

А. $y = \sin \frac{x}{2}$ Б. $y = \operatorname{tg}(x)$ В. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ Г. $y = 2 \cdot \operatorname{ctg}(x)$

Диктант

В – 1

1. Функция $f(x)$ периодическая с периодом 8. Запишите вытекающее отсюда равенство.
2. Каков наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg} x$?
3. Является ли число 3,14 периодом синуса?
4. Каков наименьший положительный период функции
$$y = \cos \frac{x}{2}$$
5. Каков наименьший положительный период функции
$$y = 5 + \sin x$$

В – 2

1. Функция $g(x)$ периодическая с периодом 6. Запишите вытекающее отсюда равенство.
2. Каков наименьший положительный период функции $y = \cos x$?
3. Является ли число 3,14 периодом котангенса?
4. Каков наименьший положительный период функции
$$y = 6 - \sin x$$
5. Каков наименьший положительный период функции
$$y = \cos 4x$$

Домашняя тренировочная работа

В – 1

В – 2

В – 3

1. Найдите значение $\sin \alpha$, если:

а) $\sin(\alpha + 2\pi) = 0,2$

а) $\sin(\alpha + 6\pi) = 0,6$

а) $\sin(4\pi - \alpha) = 0,3$

2. Найдите значение $\operatorname{tg} \alpha$, если:

а) $\operatorname{tg}(\alpha - \pi) = 0,5$

а) $\operatorname{tg}(\alpha + 5\pi) = -100$

а) $\operatorname{tg}(3\pi - \alpha) = 10$

3. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y = 2 \cdot \sin 2x$

а) $y = 2 \cdot \cos 4x$

а) $y = \sin(-2x)$

б) $y = \operatorname{tg}(2x)$

б) $y = \sin \frac{1}{2}x$

б) $y = \cos \frac{x}{3}$

4. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

а) $y = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

а) $y = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

б) $y = \sin \frac{x}{2} + \operatorname{tg}(x)$

б) $y = \sin 2x + \cos x$

б) $y = |\cos x|$

5. Является ли периодической функция:

а) $y = x - \sin x$

а) $y = \operatorname{tg}(x) + 2$

а) $y = 2x \cdot \cos x$

Тренажер №2

В – 1

В – 2

В – 3

В – 4

I. Периодичность тригонометрических функций.

1) Для данной функции найдите наименьший положительный период:

1. $y = \sin 3t$

1. $y = \cos 4t$

1. $y = \operatorname{tg} 5t$

1. $y = \operatorname{ctg} \frac{2}{3}t$

2. $y = \operatorname{tg} \frac{3t}{2}$

2. $y = 4 \cdot \sin \frac{t}{5}$

2. $y = \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$

2. $y = 3 \cdot \sin \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$

3. $y = \cos \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6} \right)$

3. $y = \sin \left(2t - \frac{\pi}{3} \right)$

3. $y = \sin \frac{x}{2} + \cos 2x$

3. $y = \sin 3x + 2 \cdot \cos 5x$

II. Четность тригонометрических функций.

2) Исследуйте функцию на четность:

1. $y = \cos 2t$

1. $y = -\sin t$

1. $y = \operatorname{ctg} 3t$

1. $y = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$

2. $y = 1 - \operatorname{tg}(t)$

2. $y = t - \sin t$

2. $y = 1 - \operatorname{tg}^2 t$

2. $y = \frac{\sin t}{t}$

3. $y = \sin t^2$

3. $y = 2t \cdot \cos 2t$

3. $y = \frac{1}{1 - 2 \cdot \sin t}$

3. $y = \cos(\sin t)$

III. Монотонность тригонометрических функций.

3) Вставьте пропущенный знак: <, > или = между значениями тригонометрических функций:

1. $\sin 25^\circ \dots \sin 75^\circ$

1. $\cos 40^\circ \dots \cos 80^\circ$

1. $\sin 20^\circ \dots \sin 166^\circ$

1. $\cos 20^\circ \dots \cos(-40^\circ)$

2. $\cos \frac{5\pi}{7} \dots \cos \frac{\pi}{7}$

2. $\sin \frac{3\pi}{7} \dots \sin \frac{4\pi}{7}$

2. $\sin \frac{3\pi}{7} \dots \sin \frac{8\pi}{7}$

2. $\cos \frac{\pi}{7} \dots \cos \frac{6\pi}{7}$

3. $\sin 150^\circ \dots \cos 150^\circ$

3. $\cos 130^\circ \dots \sin 130^\circ$

3. $\sin 3,14 \dots \sin 3$

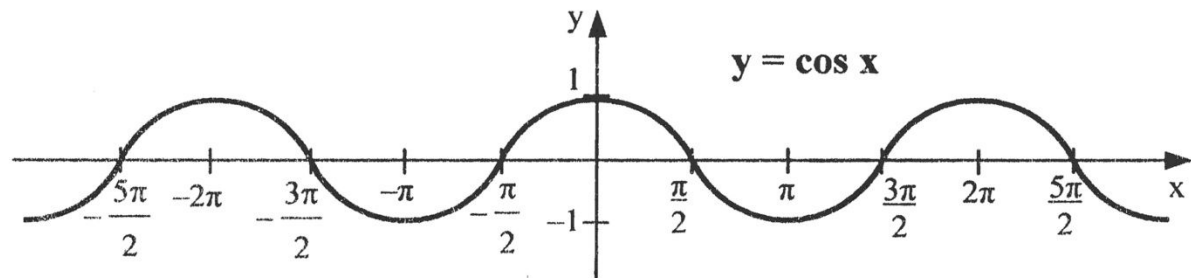
3. $\cos 5 \dots \cos 6$

§ 40. «Свойства функции $y = \cos x$ и её график».

График функции построить на двойном листочке в клеточку, приняв 2 клетки по оси Oy за 1, 3 клетки по оси Ox — $\frac{\pi}{2}$.

Знать: Понятие функции косинуса, схему исследования функции $y = \cos x$ (её свойства).

Уметь: Строить график функции $y = \cos x$, находить по графику промежутки возрастания и убывания, промежутки постоянных знаков, наибольшее и наименьшее значения функции.



Свойства функции $y = \cos x$.

1. Область определения — множество \mathbb{R} .
2. Множество значений — отрезок $[-1; 1]$.
3. Функция периодическая с периодом 2π .
4. Функция четная.
5. $y = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
6. $y > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
 $y < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
7. Наибольшее значение $y = 1$ при $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Наименьшее значение $y = -1$ при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
8. Функция возрастает при $x \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$;

Самостоятельная работа

В – 1.

1. Изобразите схематически график функции $y=3\cdot\cos(x)$. Отметьте на графике три точки, для которых $y=1,5$. Чему равны соответствующие значения x ?

2. Запишите наименьший положительный период функции $y = \cos \frac{3x}{2}$.

3. Запишите промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$.

4. Для функции $y = \frac{1}{2} \cos 2x$ найдите:

а) область определения; б) множество значений; в) нули функции.

В – 2.

1. Изобразите схематически график функции $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Отметьте на графике три точки, для которых $y=-0,5$. Чему равны соответствующие значения x ?

2. Запишите наименьший положительный период функции $y=0,5\cdot\cos(0,5x)$.

3. Найдите, в каких точках функция $y=3\cdot\cos(x) - 2$ достигает своего наибольшего значения?

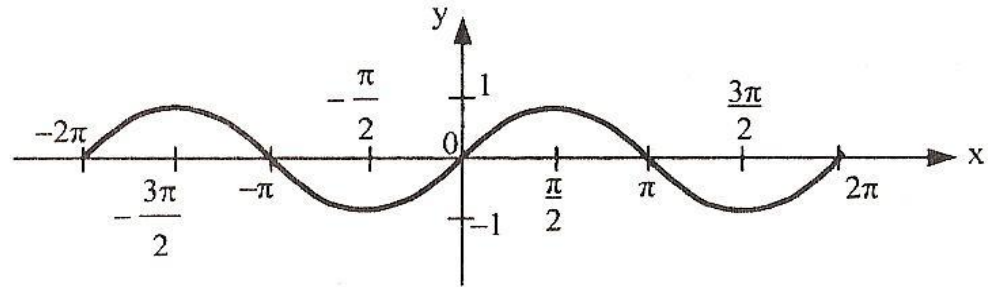
4. Начертите график функции $y=\cos(x)$ на отрезке $[-\pi; 2,5\pi]$. Отметьте на этом графике множество точек, для которых выполняются условия: а) $\cos(x) = 1$; б) $\cos(x) > 0,5$. Выпишите соответствующие значения x , при которых выполняется каждое из условий.

§ 41. «Свойства функции $y = \sin x$ и её график».

График функции $y = \sin x$

Знать: понятие функции синуса, схему исследования функции $y = \sin x$ (ее свойства).

Уметь: Строить график функции $y = \sin x$, находить по графику промежутки возрастания и убывания, промежутки постоянных знаков, наибольшее и наименьшее значения функции.



Свойства функции $y = \sin x$.

1. Область определения – множество \mathbb{R} .
2. Множество значений – отрезок $[-1; 1]$.
3. Функция периодическая с периодом 2π .
4. Функция нечетная.
5. $y = 0$ при $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
6. $y > 0$ при $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n); n \in \mathbb{Z}$.
 $y < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n); n \in \mathbb{Z}$.
7. Наибольшее значение $y = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$.
Наименьшее значение $y = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$.
8. Функция возрастает при $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$.
Функция убывает при $x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$.

Проверочная работа

В – 1.

1. Изобразите схематически график функции $y = \sin(x)$. Отметьте на графике три точки, для которых $y = 1$. Чему равны соответствующие значения x ?

2. Запишите промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{1}{2} \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

В – 2.

1. Запишите наименьший положительный период функции $y = \sin \frac{x}{3}$.

2. Найдите наибольшие и наименьшие значения функции $y = \frac{1}{3} \sin(x) - 1$.

3. Сравните числа $\sin 1$ и $\sin 3$.

В – 3.

Для функции $y = 2 \cdot \sin(3x)$ найдите:

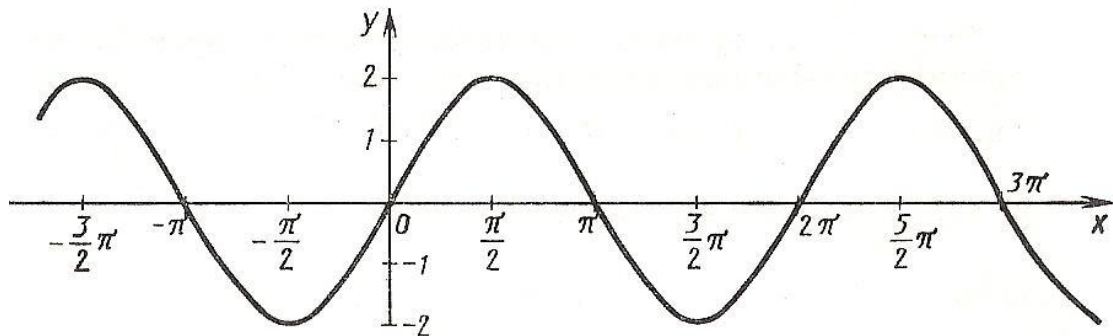
а) область определения; б) множество значений; в) нули функции; г) промежутки знакопостоянства; д) наибольшее и наименьшее значения; е) промежутки возрастания и убывания. Постройте этот график.

В – 4.

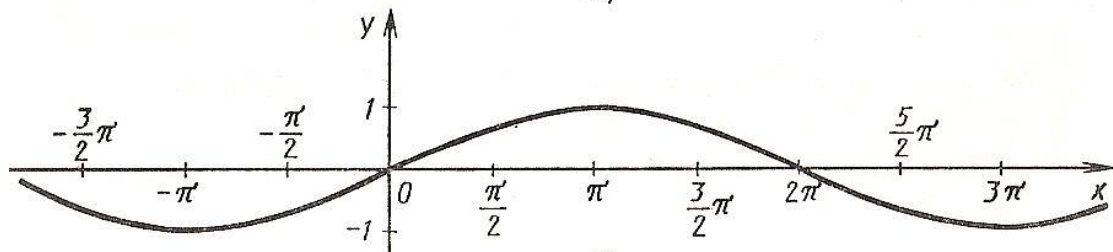
Начертите график функции $y = \sin(x)$ на отрезке $[-\pi; 2,5\pi]$. Отметьте на этом графике множество точек, для которых выполняются условия: а) $\sin(x) = 1$; б) $\sin(x) = 0,5$; в) $\sin(x) > 0,5$. Выпишите соответствующие значения x , при которых выполняется каждое из условий.

Работа в группах по графикам

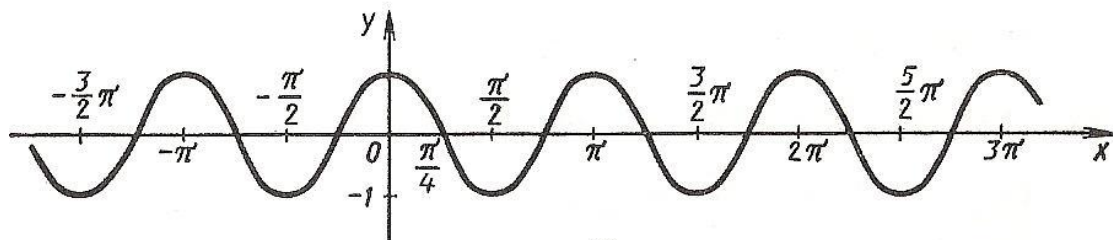
185. Определите, график какой тригонометрической функции изображен на рисунке 12, а – в.



а)



б)



в)

1. Каковы значения x , для которых $f(x) = 0$, $f(x) < 0$, $f(x) > 0$?
2. Каковы промежутки возрастания и убывания функции?
3. Укажите значения x , при которых функция имеет максимум или минимум.
4. Обратима ли функция на \mathbb{R} ?

Тренировочная работа

1. Для функции $y = \sin(x)$ укажите на отрезке $[0; 2\pi]$ промежутки, в которых эта функция: а) возрастает; б) убывает; в) положительна; г) отрицательна.
2. При каких значениях x на $[0; 2\pi)$ функция принимает наибольшее значение и чему оно равно:
а) $y = 3 + \cos(x)$; б) $y = 2 - \sin(x)$?
3. При каких значениях x на $[0; 2\pi)$ функция принимает наименьшее значение и чему оно равно:
а) $y = 3 + \cos(x)$; б) $y = 2 - \sin(x)$?
4. Существует ли такое значение x из интервала $(0; \pi)$, при котором функция $y = \operatorname{tg}(x)$ принимает своё наибольшее значение?

Диктант

В – 1 [В – 2].

1. Какова область определения [значений] синуса?
2. Какова область значений [определения] тангенса?
3. Является ли функция $y = \cos(x)$ [$y = \operatorname{tg}(x)$] нечетной?
4. Каков наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg}(x)$ [$y = \sin(x)$] ?
5. Укажите нули функции $y = \sin(x)$ [$y = \operatorname{tg}(x)$].
6. Укажите промежутки, на которых тангенс положителен [косинус отрицателен].
7. Выяснить возрастает или убывает функция $y = \cos(x)$ [$y = \sin(x)$] на промежутке $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Тренажер №3

Постройте график функции:

В – 1

1. $y = \cos 2x$

2. $y = 2 \sin \frac{x}{2}$

3. $y = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right)$

В – 2

1. $y = -\sin 2x$

2. $y = -2 \sin 2x$

3. $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$

В – 3

1. $y = 0,5 \cos x$

2. $y = \sin x - 2$

3. $y = 3 \sin 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$

§ 42. «Свойства функции $y = \operatorname{tg}(x)$ и её график».

Знать: понятие функции тангенса, схему исследования функции $y = \operatorname{tg}(x)$ (её свойства); понятие функции котангенса, схему исследования функции $y = \operatorname{ctg}(x)$ (её свойства).

Уметь: строить графики функций $y = \operatorname{tg}(x)$, $y = \operatorname{ctg}(x)$, находить по графику промежутки возрастания и убывания, промежутки знакопостоянства, наибольшие и наименьшие значения функции.

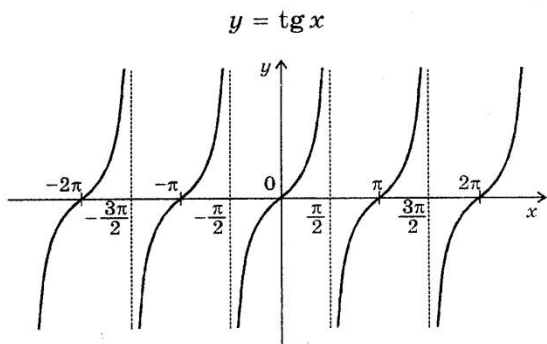


график — тангенсоида

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- Область определения: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$
- Область значений: $y \in \mathbb{R}$
- Нули: $y = 0$ при $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
- Промежутки знакопостоянства:
 - $\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$
 - $\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$
- Экстремумов нет
- Промежутки монотонности: функция возрастает на каждом интервале области определения
- Четность, нечетность: функция нечетная
- Асимптоты: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

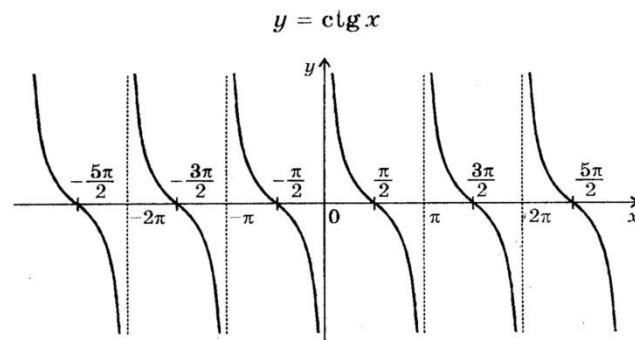


График — котангенсоида

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- Область определения: $x \in (\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
- Область значений: $y \in \mathbb{R}$
- Нули: $y = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
- Промежутки знакопостоянства:
 - $\operatorname{ctg} x > 0$ при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$
 - $\operatorname{ctg} x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$
- Экстремумов нет
- Промежутки монотонности: функция убывает на каждом интервале области определения
- Четность, нечетность: функция нечетная
- Асимптоты: $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Тренировочная работа

В – 1

В – 2

В – 3

1) Выяснить, является ли функция $y = \operatorname{tg}(x)$ возрастающей на промежутке:

$$\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right]$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8} \right)$$

[2; 3]

2) Используя свойство возрастания функции $y = \operatorname{tg}(x)$ сравните числа:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} \dots \operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$$

$$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} \dots \operatorname{tg} \frac{8\pi}{9}$$

$$\operatorname{tg} \left(-\frac{7\pi}{8} \right) \dots \operatorname{tg} \left(-\frac{8\pi}{9} \right)$$

3) Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $(-\pi; 2\pi)$.

$$\operatorname{tg}(x) = 1$$

$$\operatorname{tg}(x) = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}(x) = -1$$

4) Найдите все решения, принадлежащие промежутку $(-\pi; 2\pi)$.

$$\operatorname{tg}(x) \geq 1$$

$$\operatorname{tg}(x) < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}(x) \geq -\sqrt{3}$$

Работа в группах

В – 1

В – 2

В – 3

В – 4

1) Найдите значение:

а) $\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3})$ а) $\operatorname{arccctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ а) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ а) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

б) $\arcsin\frac{1}{2} + \arccos 1 - \operatorname{arctg}(0)$ б) $\arccos\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}(1)$ б) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ б) $\operatorname{tg}(2 \arccos(-1))$

2) Найдите область определения:

а) $\operatorname{arctg}(\sqrt{x})$ а) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ а) $\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{x^2 - 9}\right)$ а) $\operatorname{arctg}(1 - x^2)$

3) Постройте график функции:

а) $y = \operatorname{tg}(2x)$ а) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)$ а) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ а) $y = \operatorname{ctg}\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$

§ 43. «Обратные тригонометрические функции».

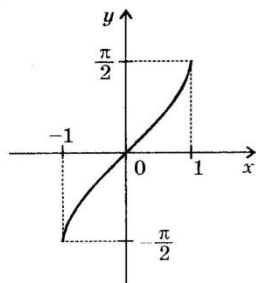
Знать: какие функции являются обратными тригонометрическими, иметь представление об их графиках, свойствах.

Уметь: решать задачи с использованием свойств обратных тригонометрических функций.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

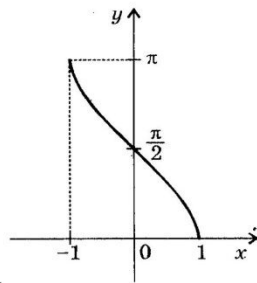
$$y = \arcsin x$$

функция, обратная функции
 $y = \sin x, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$



$$y = \arccos x$$

функция, обратная функции
 $y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$



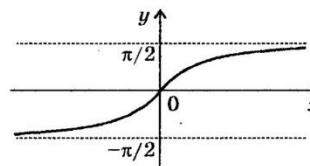
СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

| | $y = \arcsin x$ | $y = \arccos x$ |
|--------------------------------|---|-------------------------------------|
| • Область определения: | $x \in [-1; 1]$ | $x \in [-1; 1]$ |
| • Область значений: | $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ | $y \in [0; \pi]$ |
| • Нули: | $y = 0$ при $x = 0$ | $y = 0$ при $x = 1$ |
| • Промежутки знакопостоянства: | $y > 0$ при $x \in (0; 1]$ $y < 0$ при $x \in [-1; 0)$ | $y > 0$ при $x \in [-1; 1)$ |
| • Экстремумы: | нет | нет |
| • Промежутки монотонности: | возрастает во всей области определения | убывает во всей области определения |
| • Четность, нечетность: | нечетная | ни четная, ни нечетная |

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2$$

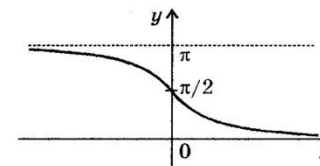
$$y = \operatorname{arctg} x$$

функция, обратная функции
 $y = \operatorname{tg} x, -\pi/2 < x < \pi/2$



$$y = \operatorname{arccctg} x$$

функция, обратная функции
 $y = \operatorname{ctg} x, 0 < x < \pi$



СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

| | $y = \operatorname{arctg} x$ | $y = \operatorname{arccctg} x$ |
|--------------------------------|---|--------------------------------|
| • Область определения: | $x \in \mathbb{R}$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| • Область значений: | $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ | $y \in (0; \pi)$ |
| • Нули: | $y = 0$ при $x = 0$ | нулей нет |
| • Промежутки знакопостоянства: | $y > 0$ при $x \in (0; \infty)$ $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$ | $y > 0$ при $x \in \mathbb{R}$ |
| • Экстремумы: | нет | нет |
| • Промежутки монотонности: | возрастает при $x \in \mathbb{R}$ | убывает при $x \in \mathbb{R}$ |
| • Четность, нечетность: | нечетная | ни четная, ни нечетная |
| • Асимптоты | $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$ | $y = 0$ и $y = \pi$ |

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccctg} x = \pi/2$$

Работа в группах

В – 1

В – 2

В – 3

1) Задайте с помощью формулы функцию, обратную функции $f(x)$. Укажите область определения и область значений полученной функции. Найдите промежутки её возрастания и убывания.

$$f(x) = x + 2$$

$$f(x) = -x + 2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

2) Заполните таблицу (учащимся предлагается таблица с заполненной первой строкой).

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|----|-----------------------|-----------------------|----------------|---|---------------|----------------------|----------------------|---|--|----|-----------------------|-----------------------|----------------|---|---------------|----------------------|----------------------|---|--|-------------|----|-----------------------|---|----------------------|----|------------|
| a | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | a | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | a | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | -1 | $\sqrt{3}$ |
| <i>a</i> <i>r</i> <i>c</i> <i>s</i> <i>i</i> <i>n</i> (<i>a</i>) | | | | | | | | | | <i>a</i> <i>r</i> <i>c</i> <i>c</i> <i>o</i> <i>s</i> (<i>a</i>) | | | | | | | | | | <i>a</i> <i>r</i> <i>c</i> <i>t</i> <i>g</i> (<i>a</i>) | | | | | | | |

Диктант

В – 1

В – 2

1) Поставьте знак равенства или неравенства так, чтобы получилось истинное высказывание:

а) $\arcsin 1 \dots \arccos 1$

б) $\arcsin(-1) \dots \arctg(-1)$

в) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \dots \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$

а) $\arcsin(1) \dots \arctg(1)$

б) $\arcsin \frac{1}{2} \dots \arccos \frac{1}{2}$

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \dots \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2) Найдите:

а) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) =$

б) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

а) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) =$

б) $\arctg\left(\tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

3) Найдите значение выражения $x + \arccos(x)$, при следующих значениях x :

а) -1 ; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$

Свойства и графики тригонометрических функций

Вариант I

1. Найдите область значений функции

$$y = 2 - 3\sin x.$$

- а) $[-1; 5]$; б) $[-4; 2]$; в) $[-5; 1]$; г) $[-2; 4]$.

2. Найдите «нули» функции $y = \frac{1}{3} \cos 2x$ на промежутке

ке $[-\frac{\pi}{2}; 2\pi]$ и запишите их сумму.

- а) $1,5\pi$; б) 2π ; в) $3,75\pi$; г) $2,25\pi$.

3. Для функции $y = \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})$ найдите точку минимума на промежутке $[0; 4\pi]$.

- а) $\frac{7\pi}{2}$; б) $\frac{7\pi}{6}$; в) $\frac{10\pi}{3}$; г) $\frac{5\pi}{3}$.

4. Найдите промежутки убывания для функции

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}x\right).$$

а) $[-\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi n], n \in \mathbf{Z}$;

б) $[-\frac{\pi}{2} + 3\pi n; \pi + 3\pi n], n \in \mathbf{Z}$;

в) $[\frac{\pi}{2} + 3\pi n; 2\pi + 3\pi n], n \in \mathbf{Z}$;

г) $(-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n), n \in \mathbf{Z}$.

5. Расположите в порядке возрастания числа

$\sin 1, \sin(-5)$ и $\cos 1$.

- а) $\sin(-5), \sin 1, \cos 1$; в) $\sin(-5), \cos 1, \sin 1$;
б) $\sin 1, \sin(-5), \cos 1$; г) $\cos 1, \sin 1, \sin(-5)$.

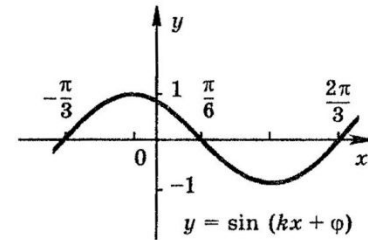
6. По графику некоторой функции запишите формулу, которой она задана.

а) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$;

в) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

г) $y = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.



7. Найдите значение выражения

$$\frac{\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

- а) $3,5$; б) $-4,5\pi$; в) $-5,5$; г) $-3,5$.

8. Вычислите $\cos(\arcsin(-0,6))$.

- а) $-0,36$; б) $0,6$; в) $-0,8$; г) $0,8$.

9. Найдите $\arcsin x$, если $\arccos x = \frac{\pi}{5}$.

- а) $\frac{9\pi}{5}$; б) $0,3\pi$; в) $0,8\pi$; г) $-\frac{\pi}{5}$.

10. Найдите сумму координат точки пересечения графиков функций

$$y = \arccos x \text{ и } y = \frac{\pi}{2} + x.$$

- а) $\frac{\pi}{2}$; б) 1 ; в) $\frac{\pi}{2} + 1$; г) $\pi + 1$.

Свойства и графики тригонометрических функций

Вариант II

1. Найдите область значений функции $y = 3 - 5\cos x$.

- а) $[-2; 2]$; б) $[-3; 5]$; в) $[-5; 3]$; г) $[-2; 8]$.

2. Найдите «нули» функции $y = 0,5\sin 3x$ на промежутке $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$ и запишите их сумму.

- а) $\frac{5\pi}{6}$; б) $-\frac{5\pi}{3}$; в) $\frac{4\pi}{3}$; г) $-\frac{8\pi}{3}$.

3. Для функции $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ найдите точку максимума на промежутке $[0; 6\pi]$.

- а) $3,75\pi$; б) $4,5\pi$; в) $3,25\pi$; г) $5,25\pi$.

4. Найдите промежутки возрастания для функции

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{3}\right).$$

а) $\left[-\pi + \frac{2\pi}{3}; 2\pi + \frac{2\pi}{3}\right], n \in \mathbf{Z}$;

б) $\left[-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right], n \in \mathbf{Z}$;

в) $[-2\pi + 6\pi n; \pi + 6\pi n], n \in \mathbf{Z}$;

г) $\left(-\frac{\pi}{2} + 6\pi n; 2\pi + 6\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$.

5. Расположите в порядке убывания числа

$$\cos 2, \quad \cos(-4) \quad \text{и} \quad \sin 2.$$

а) $\cos(-4), \sin 2, \cos 2$; б) $\sin 2, \cos 2, \cos(-4)$;

в) $\cos 2, \sin 2, \cos(-4)$; г) $\cos(-4), \cos 2, \sin 2$.

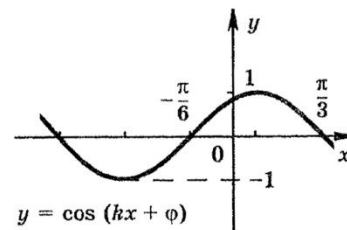
6. По графику некоторой функции запишите формулу, которой она задана.

а) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$;

в) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$;

г) $y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$.



7. Найдите значение выражения

$$\frac{\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \operatorname{arctg}\sqrt{3}}{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

а) $-\frac{8}{9}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $-\frac{5}{6}$.

8. Вычислите $\sin\left(\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$.

а) $-\frac{1}{13}$; б) $\frac{5}{13}$; в) $-\frac{5}{13}$; г) $\frac{1}{13}$.

9. Найдите $\arccos x$, если $\arcsin x = \frac{\pi}{7}$.

а) $\frac{13\pi}{7}$; б) $\frac{6\pi}{7}$; в) $-\frac{\pi}{7}$; г) $\frac{5\pi}{14}$.

10. Найти сумму координат точки пересечения графиков функций $y = \arcsin x$ и $y = x + \frac{\pi}{2} - 1$.

а) $\frac{\pi}{2}$; б) $1 + \frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{2} - 1$; г) $1 - \frac{\pi}{2}$.

Контрольная работа

Тема: «Тригонометрические функции».

В – 1

1) Постройте график функции на отрезке $[-\pi; \pi]$ и опишите свойства функции, используя её график.

$$y = \cos(x)$$

2) Для функции:

$$y = \frac{1}{3} \sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{7}\right)$$

Найдите: а) наименьший положительный период; б) наименьшее и наибольшее значения.

3) Сравните числа:

а) $\sin \frac{\pi}{7}$ и $\sin \frac{\pi}{9}$

б) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ и $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$

в) $\cos \frac{5\pi}{7}$ и $\sin \frac{5\pi}{7}$

В – 2

$$y = \sin(x)$$

$$y = -\frac{2}{5} \cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{5}\right)$$

а) $\cos \frac{\pi}{5}$ и $\cos \frac{\pi}{6}$

б) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{8}$ и $\operatorname{tg} \frac{8\pi}{9}$

в) $\sin \frac{\pi}{7}$ и $\cos \frac{\pi}{7}$

4) Найдите область определения функции:

$$y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

5) Изобразите схематически график функции:

$$y = 4 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \frac{1}{4} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Отметьте на графике две точки, для которых

$$y = 4$$

$$y = -0,25$$

Чему равны соответствующие значения x ?

Список использованной литературы

1. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала анализа 10 – 11 классы. [Текст]: учебник, Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров. – М.: Просвещение, 2003.
2. Вопросы преподавания алгебры и начала анализа в средней школе. [Текст]: / – М.: Просвещение, 1981.
3. Гусев, В.А. Математика (справочные материалы). [Текст]: / В.А. Гусев, А.Г. Мордкович. – М.: Просвещение.
4. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала анализа 10 – 11 классы. [Текст]: учебник, А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын. М.: Просвещение, 1990.
5. Лукин, Р.Д. Устные упражнения по алгебре и началам анализа. [Текст]: / Р.Д. Лукин, Т.К. Лукина, М.С. Якунина. – М.: Просвещение, 1999.
6. Алтынов, П.И. Алгебра и начала анализа 10 – 11 классы. Тесты. [Текст]: / П.И. Алтынов. – М.: Дрофа, 2003.
7. Аверьянов, Д.И. Математика для школьников и поступающих в ВУЗы. [Текст]: / Д.И. Аверьянов, П.И. Алтынов, И.И. Баврин. – М.: Дрофа, 2000.