

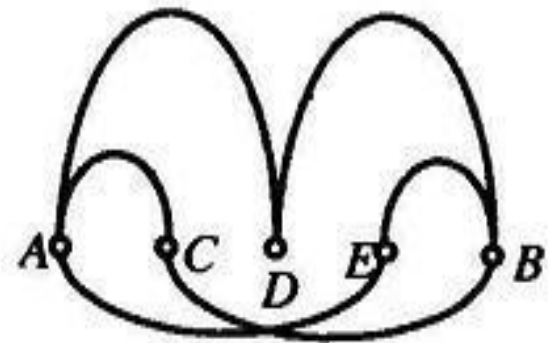
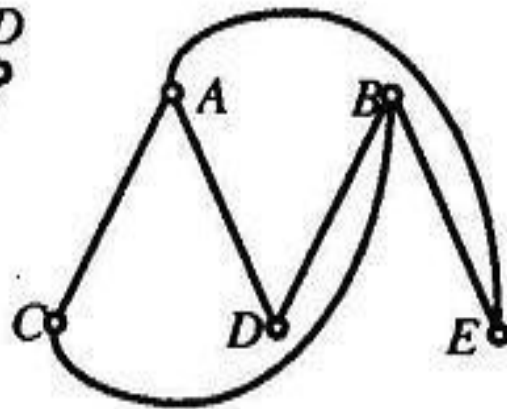
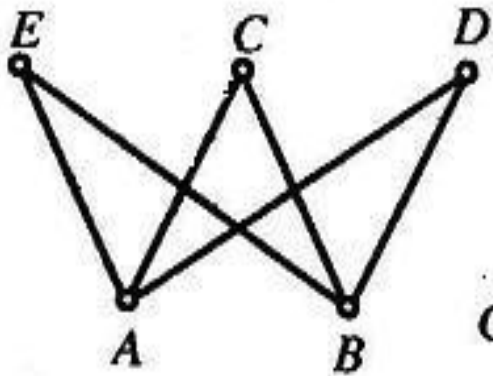
# Основы теории графов

$V$ -множество вершин,

$E$ - множество ребер

Граф -  $G(V, E)$ .

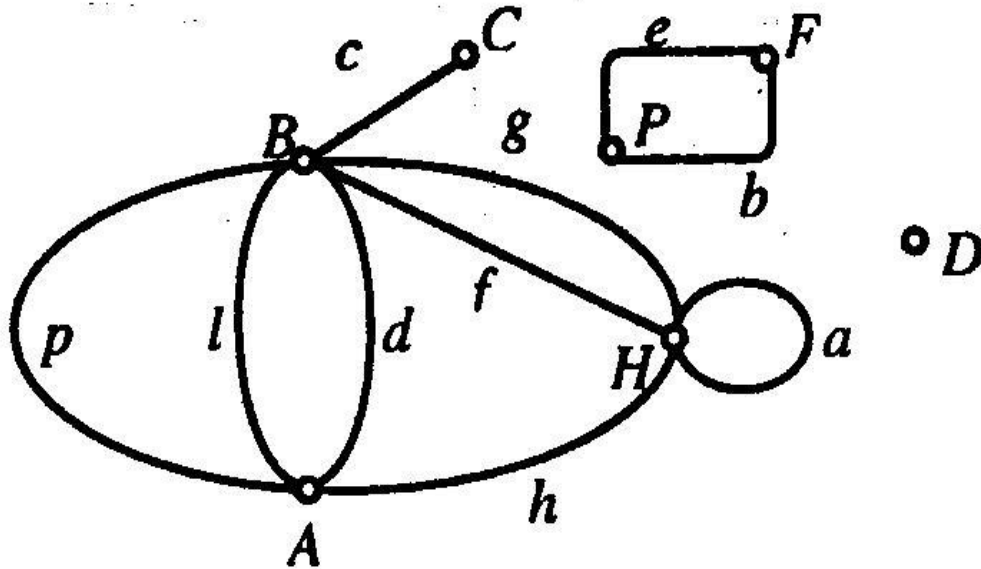
*Л. Эйлер 1736 г.*



$G(V, E, f)$   $V, E$  – множества,

отображение инциденции  $f: E \rightarrow V \times V$  множества  $E$  в  $V \times V$

# Основы теории графов



$V = \{A, B, C, D, F, H, P\}$  – множество точек,

$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, p, l\}$  – множество линий

$f: E \rightarrow V \& V$ , определяется по закону

$f: a \rightarrow (H \& H), b \rightarrow (P \& F), c \rightarrow (B \& C), d \rightarrow (A \& B), e \rightarrow (P \& F),$

$f \rightarrow (B \& H), g \rightarrow (B \& H), h \rightarrow (A \& H), p \rightarrow (A \& B), l \rightarrow (A \& B)$

# Основы теории графов

## **Определение инцидентности.**

*Пусть задан абстрактный граф  $G(V, E, f)$ .*

*Если отображение  $f$  сопоставляет ребру  $e$  пару вершин  $(x_1 \& x_2)$ , т.е.  $f(e) = (x_1 \& x_2)$ , то ребро  $e$  инцидентно вершинам  $x_1$  и  $x_2$ .*

*«ребро  $e$  соединяет вершины  $x_1$  и  $x_2$ »*

*«вершины  $x_1$  и  $x_2$  являются граничными точками ребра  $e$ ».*

*Если  $f(e) = (x \& x)$ , то ребро называется петлей в вершине  $x$ .*

## **Определение смежности.**

*Две вершины  $x_1$  и  $x_2$  графа  $G(V, E, f)$  называются смежными, если в графе существует ребро  $e$ , инцидентное этим вершинам.*

*Два ребра графа называются смежными, если существует вершина, инцидентная обоим этим ребрам.*

# Основы теории графов

**Степенью вершины** графа называется количество инцидентных ей ребер (для петли степень подсчитывается дважды).

Вершины графа называются *четными* или *нечетными* в зависимости от четности их степеней.

*Теорема 1.* В любом конечном графе  $G(V, E)$  количество нечетных вершин — четно.

Сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер графа:

$$\sum Q(x) = 2|E|$$

# Основы теории графов

*Операции разборки графа:*

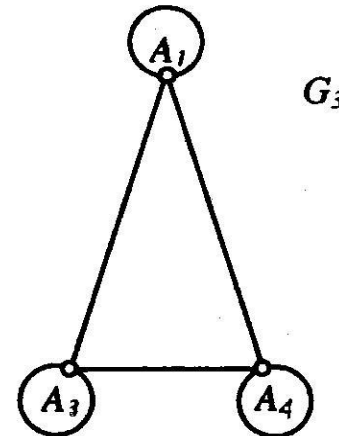
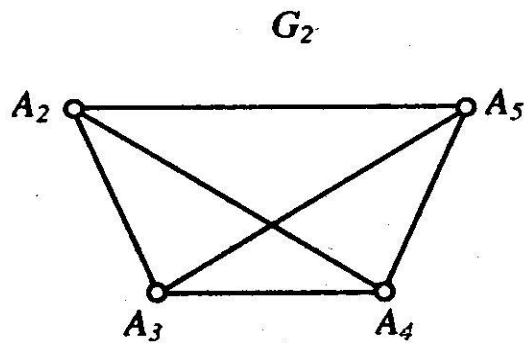
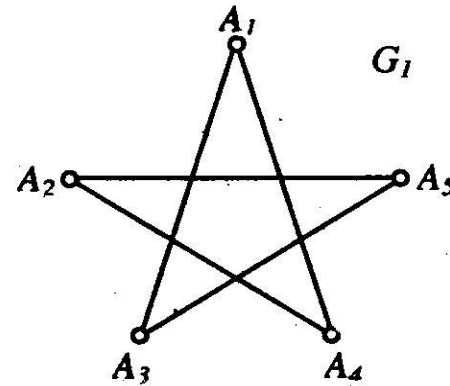
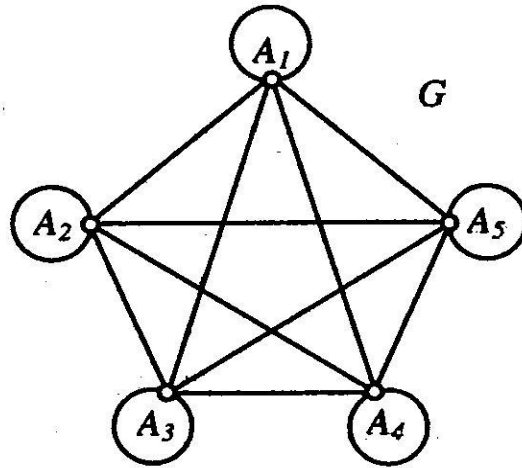
- 1) *удаление ребра между двумя вершинами графа.*
- 2) *удаление вершины графа вместе со всеми инцидентными ребрами.*

*Подграфом* графа  $G$  называется такая его часть  $G_1$ , которая получается из графа  $G$  при помощи конечного числа операций разборки вида 2.

*Суграфом* графа  $G$  называется такая его часть  $G_1$ , которая получается из графа  $G$  при помощи конечного числа операций разборки вида 1.

# Основы теории графов

## Пример операций разборки



# Основы теории графов

$G(V, E, f) \quad V = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \quad E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

Конечная последовательность ребер графа  $a_1, a_2, \dots, a_k$  (не обязательно различных) называется *маршрутом* длины  $k$ , если граничные точки двух соседних ребер последовательности совпадают.

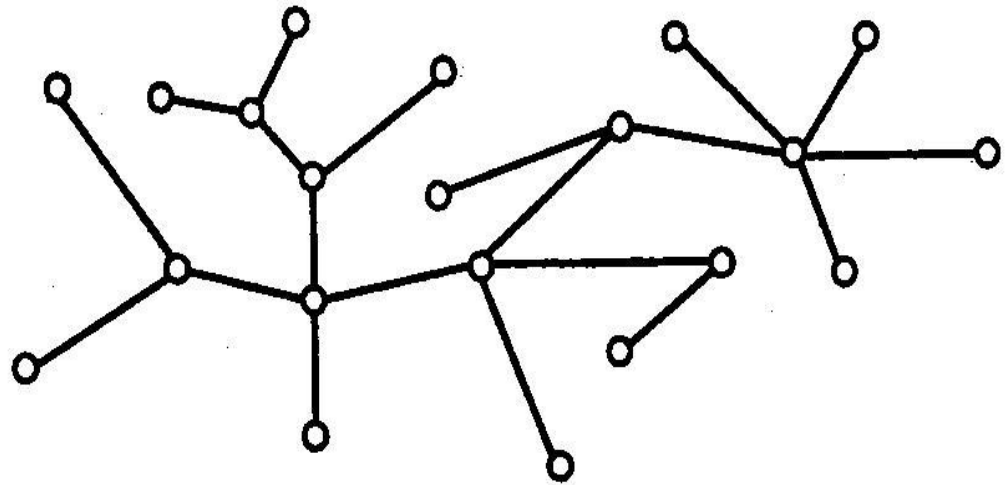
Маршрут называется *замкнутым*, если его начальная и конечная вершины совпадают. В противном случае маршрут *незамкнутый*.

*Цепь* - незамкнутый маршрут, состоящий из последовательности различных ребер. *Простая цепь* - маршрут, который не проходит дважды через одну и ту же вершину.

*Цикл* - замкнутый маршрут, состоящий из последовательности различных ребер. *Простой цикл* - маршрут, в котором начальная и конечная вершины совпадают, а все остальные вершины различны.

# Основы теории графов

## Древоподобные графы



### ***Определение 1.***

*Деревом* называется конечный связный граф без циклов.

***Определение 2.*** Деревом называется конечный граф, любые две вершины которого соединяются единственной цепью.

***Определение 3.*** Деревом называется конечный связный граф, для которого количество ребер на единицу меньше количества вершин.

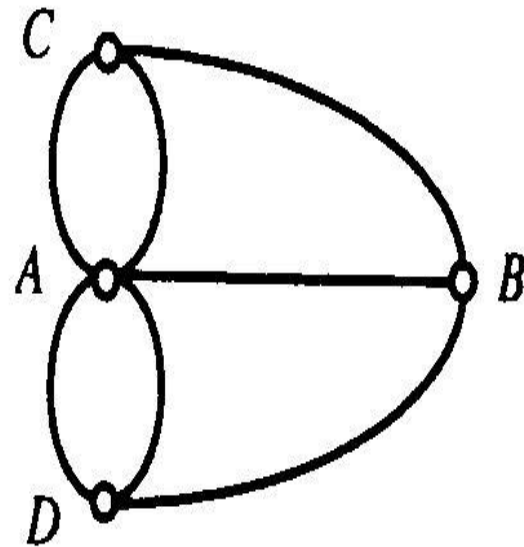
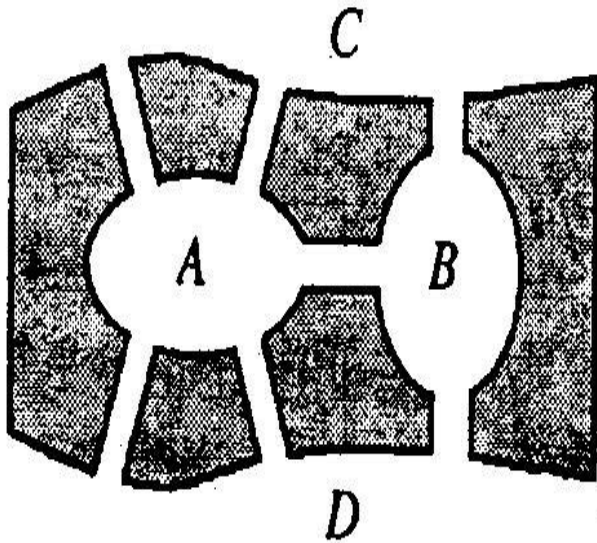
***Определение 4.*** Деревом называется конечный граф, обладающий свойством: граф не содержит циклов, но добавление ребра между любыми не смежными вершинами приводит к появлению цикла.



## Уникурсальные графы

### *Задача Эйлера о кенигсбергских мостах*

*Можно ли пройти по всем мостам, изображенным на рисунке, так, чтобы на каждом из них побывать лишь один раз и вернуться к тому месту, откуда началась прогулка?*



# Основы теории графов

## Уникурсальные графы

Граф называется *уникурсальным графом* (или *эйлеровой линией*), если все его ребра можно включить либо в простой цикл, либо в простую цепь.

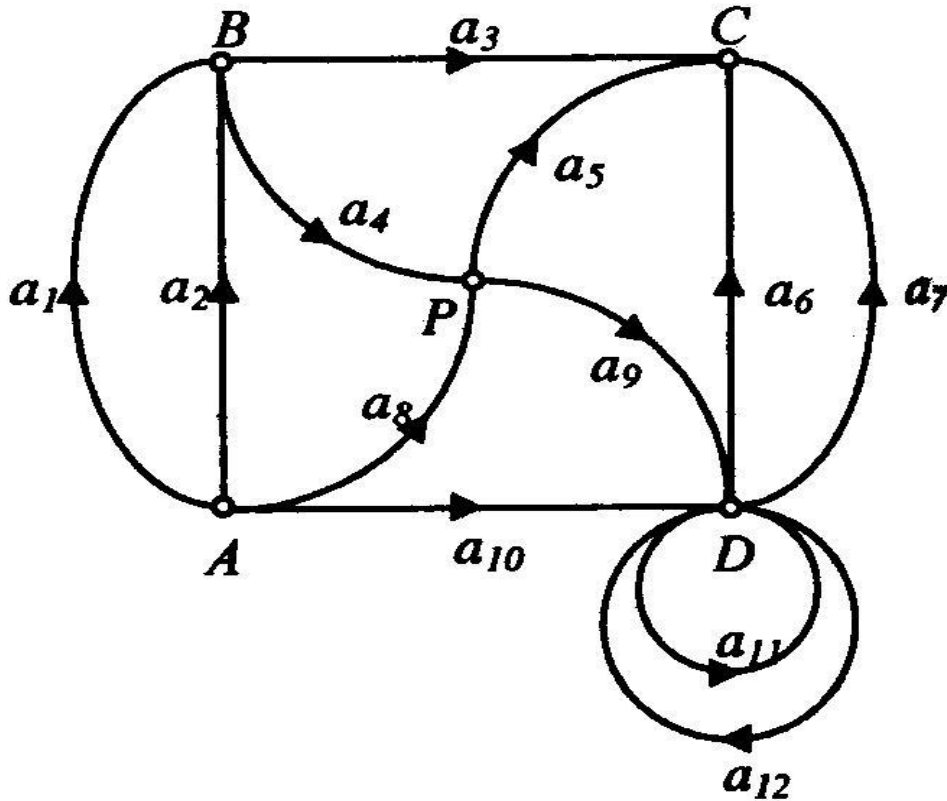
### *Признаки уникурсальных графов:*

*Лемма.* Если связный граф имеет более двух нечетных вершин, то он не уникурсален.

**Теорема 1.** *Связный граф является эйлеровым циклом тогда и только тогда, когда он имеет только четные вершины. При этом начало и конец уникурсального пути совпадают и могут находиться в любой вершине графа.*

**Теорема 2.** *Связный граф является эйлеровой цепью тогда и только тогда, когда он имеет ровно две нечетные вершины, а остальные вершины этого графа четны. При этом начало и конец уникурсального пути находятся в нечетных вершинах.*

## Оrientированные графы



$G(V, E, f)$

$V = \{A, B, C, D, P\}$

$E = \{a_1, a_2, \dots, a_{12}\}$ .

*Отображение инциденции:*

$f: a_1 \rightarrow (A, B); a_2 \rightarrow (A, B);$

$a_3 \rightarrow (B, C); a_4 \rightarrow (B, P);$

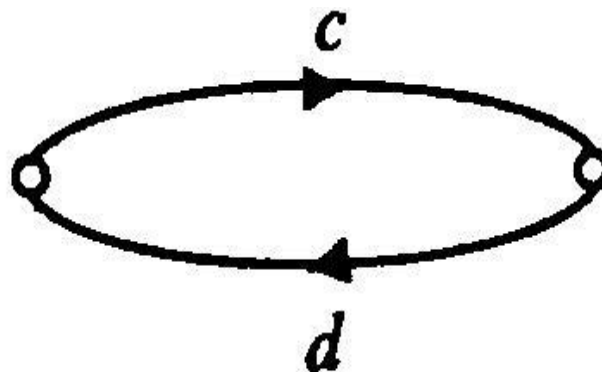
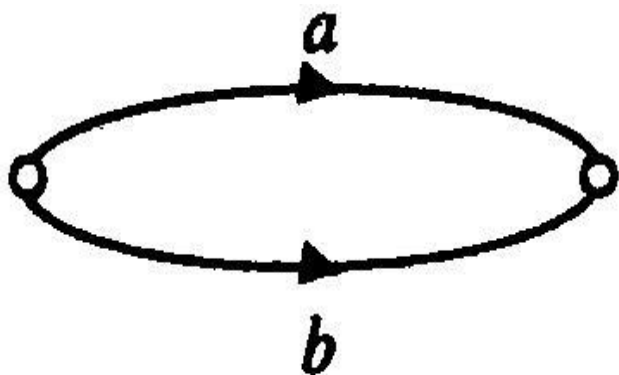
$a_5 \rightarrow (P, C); a_6 \rightarrow (D, C);$

$a_7 \rightarrow (D, C); a_8 \rightarrow (A, P);$

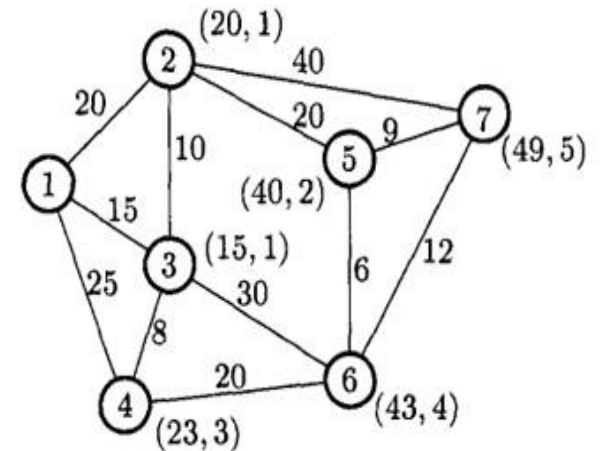
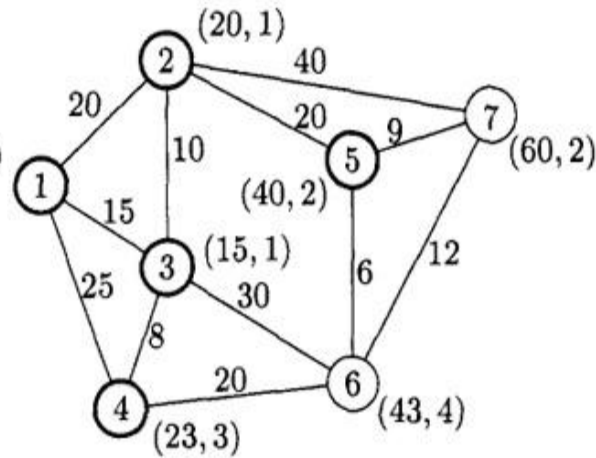
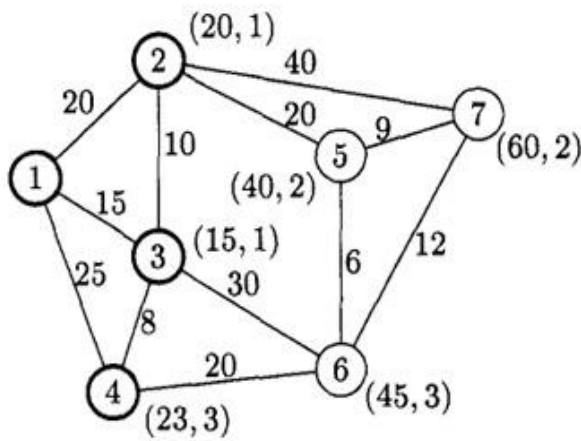
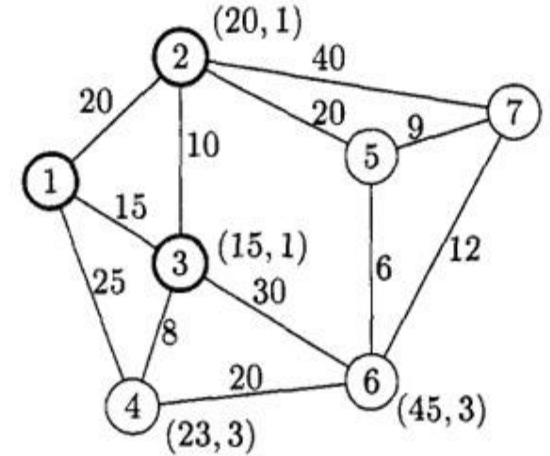
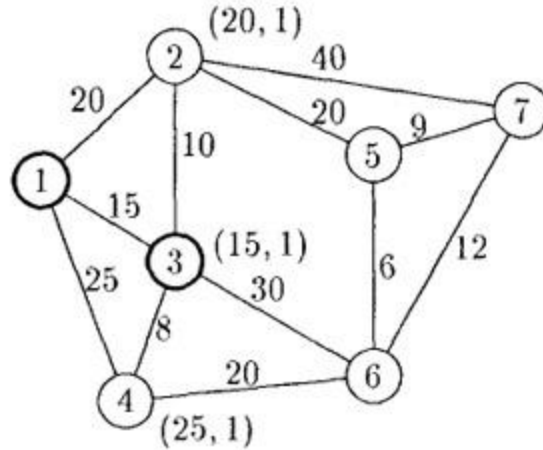
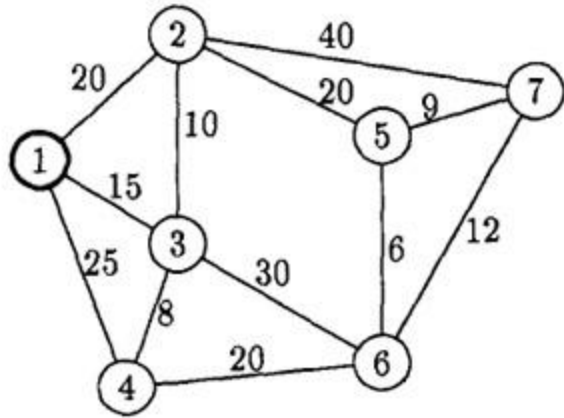
$a_9 \rightarrow (P, D); a_{10} \rightarrow (A, D);$

$a_{11} \rightarrow (D, D); a_{12} \rightarrow (D, D).$

В ориентированном графе параллельные дуги бывают двух типов:  
*строго параллельные* (одинаково ориентированные)  
*нестрого параллельные* (ориентированные по-разному).



## Задача выбора кратчайшего маршрута



Ответ: 2 1-2 20      5 1-2-5 40  
           3 1-3 15      6 1-3-4-6 43  
           4 1-3-4 23     7 1-2-5-7 49

# Графовая модель образовательного учреждения

**Пользователи образовательных услуг (П).**  
**Преподаватели и сотрудники (работники) (Р).**  
**Инфраструктура (Б).**  
**Комплекс нормативно-правовых актов (Н).**  
**Информационные технологии (И).**

