Особые приёмы решения логарифмических неравенств с переменной в основании

Занятие №1

Методическая разработка учителя Поляковой Е. А.

Неравенство, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим.

Например, неравенства вида:

$$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x) \quad \log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$$

При а > 0, а ≠ 1 являются логарифмическим

Решение простейших логарифмических неравенств:

$$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Решите неравенство: $\log_{2x-3} x > 1$

Решение традиционным способом

$$\log_{2x-3} x > 1 \Leftrightarrow \log_{2x-3} x > \log_{2x-3}(2x-3)$$

1) $\begin{cases} 2x-3>1 \\ x>2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{2<x<3}$

2) $\begin{cases} 2x-3<1 \\ 2x-3>0 \\ x<2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>1{,}5 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow$ **решений нет**

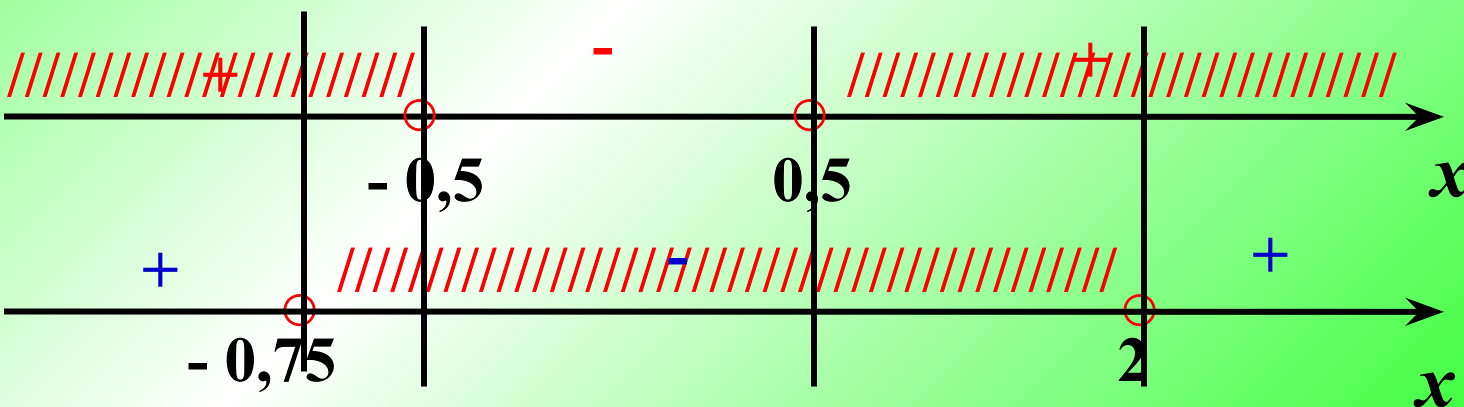
Ответ: (2; 3)

Решите неравенство: $\log_{4x^2}(5x+6)>1$

Решение традиционным способом

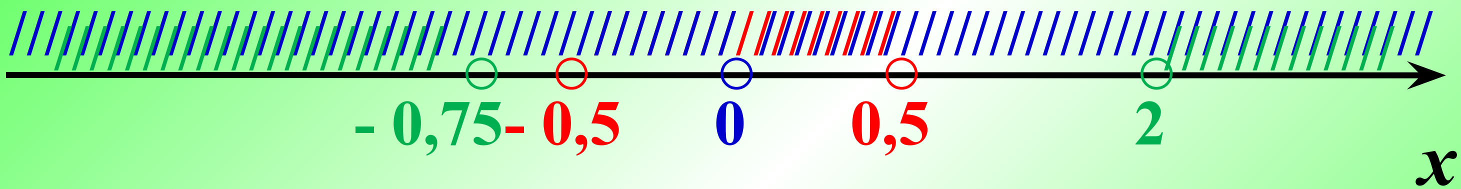
$$\log_{4x^2}(5x+6)>1 \Leftrightarrow \log_{4x^2}(5x+6)>\log_{4x^2}4x^2$$

1) $\begin{cases}4x^2>1\\5x+6>4x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x^2-1>0\\4x^2-5\quad-6<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x-1)(2x+1)>0\\4(x+0,75)(\quad-2)<0\end{cases}$



Решение системы: **- 0,75 < *x* < - 0,5;   0,5 < *x* < 2**

2) $\begin{cases} 4x^2 < 1 \\ 4x^2 > 0 \\ 5x - 6 < 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(2x+1) < 0 \\ x^2 > 0 \\ 4(x+0,75)(\quad -2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,5 < x < 0,5 \\ x \neq 0 \\ x < -0,75;\ x > 2 \end{cases}$



Очевидно, что у системы решений нет

Ответ: $-0,75 < x < -0,5$; $0,5 < x < 2$.

Интересное заключение о знаках двух выражений

Доказать, что выражения ***$\log_a b$*** **и** ***$(b-1)(a-1)$*** **одинаковых знаков.**

Доказательство. **Докажем, например, что** ***$\log_a b > 0$*** **и** ***$(b-1)(a-1) > 0$*** **1) Перейдём к основанию, например, 2**

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_2 b}{\log_2 a};}$$

2) Неравенство ***$\log_a b > 0$*** **перепишем в виде**

$$\frac{\log_2 b}{\log_2 a} > 0.$$

3) Дробь положительна, если числитель и знаменатель одинаковых знаков, тогда

а) $$\begin{cases}\log_2 b > 0\\ \log_2 a > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 b > \log_2 1\\ \log_2 a > \log_2 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b > 1\\ a > 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b-1 > 0\\ a-1 > 0\end{cases} \Rightarrow$$

Логарифмическая функция с основанием 2 возрастающая, тогда

$$\Rightarrow \boxed{(b-1)(a-1) > 0}$$

б) $\begin{cases}\log_2 b < 0\\ \log_2 a < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 b < \log_2 1\\ \log_2 a < \log_2 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 1\\ a < 1\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b-1 < 0\\ a-1 < 0\end{cases} \Rightarrow \boxed{(b-1)(a-1) > 0.}$

Доказано, что выражения ***$\log_a b$*** **и** ***(b – 1)(a – 1)***

одинаковых знаков.

Это свойство используется при решении логарифмических неравенств, где выражение ***$\log_a b$ можно заменить выражением (b – 1)(a – 1) того же знака***

Чтобы не возникало проблем, необходимо находить ОДЗ переменной, так как формальная замена приводит к расширению области определения неравенства

Доказать, что при всех допустимых значениях переменной *x*

неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ **равносильно**

неравенству $(f - g)(h - 1) > 0.$

Доказательство. 1) Перейдём к основанию, например, 2

$$\log_h f = \frac{\log_2 f}{\log_2 h};\qquad \log_h g = \frac{\log_2 g}{\log_2 h};$$

2) Неравенство $\log_h f(x) > \log_h g(x)$ **перепишем в виде**

$$\frac{\log_2 f}{\log_2 h} > \frac{\log_2 g}{\log_2 h} \Leftrightarrow \frac{\log_2 f - \log_2 g}{\log_2 h} > 0.$$

3) Дробь положительна, если числитель и знаменатель одинаковых знаков, тогда

а) $\begin{cases} \log_2 f - \log_2 g > 0 \\ \log_2 h > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 f > \log_2 g \\ \log_2 h > \log_2 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f > g \\ h > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

Логарифмическая функция с основанием 2 возрастающая, тогда

$\Leftrightarrow \begin{cases} f - g > 0 \\ h - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow (f - g)(h - 1) > 0$

б) $\begin{cases} \log_2 f - \log_2 g < 0 \\ \log_2 h < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 f < \log_2 g \\ \log_2 h < \log_2 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f < g \\ h < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f - g < 0 \\ h - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow (f - g)(h - 1) > 0$

Доказано - неравенство $\boldsymbol{\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)}$
равносильно неравенству $\boldsymbol{(f - g)(h - 1) > 0}$ **на** **ОДЗ**

Решение логарифмических неравенств с применением доказанного свойства

Неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ **равносильно неравенству** $(f - g)(h - 1) > 0$ **на** **<u>ОДЗ</u>**

Аналогично неравенство $\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x)$ **равносильно неравенству** $(f - g)(h - 1) < 0$ **на** **<u>ОДЗ</u>**

Алгоритм решения неравенства $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$

1) Находим область допустимых значений переменной (ОДЗ):

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$$

(Условимся далее две последние строки системы писать одной так: $0 < h(x) \neq 0$)

2) Решаем неравенство $(f(x) - g(x))(h(x) - 1) > 0$.

3) Для найденного решения учитываем ОДЗ.

4) Записываем ответ.

Решите неравенство: $\log_{2x-3} x > 1$

1) ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ 0 < 2x - 3 \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ 3 < 2x \neq 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ 1{,}5 < x \neq 2; \end{cases}$ $1{,}5 < x \neq 2.$

2) Переписываем неравенство в виде

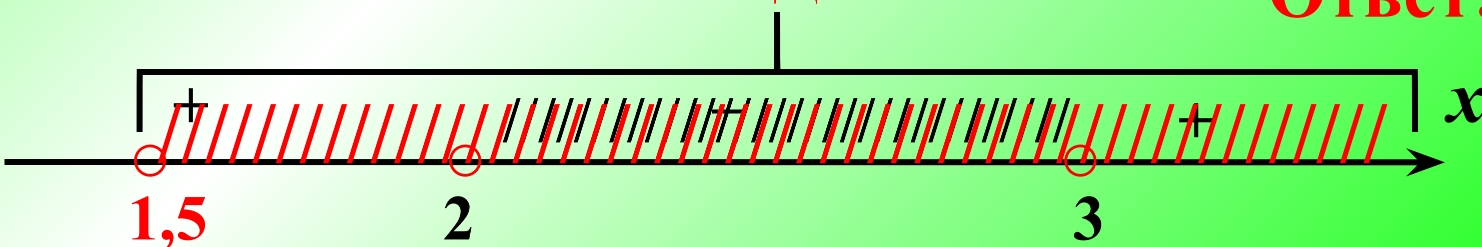
$$\log_{2x-3} x > \log_{2x-3}(2x-3)$$

Решаем неравенство $(x - (2x - 3))(2x - 3 - 1) > 0;$

$(x - 2x + 3)(2x - 4) > 0;$ $(-x + 3)2(x - 2) > 0;$

$-2(x - 3)(x - 2) > 0 \,|\, : (-2);$ $(x - 3)(x - 2) < 0,$

ОДЗ



Ответ: (2; 3)

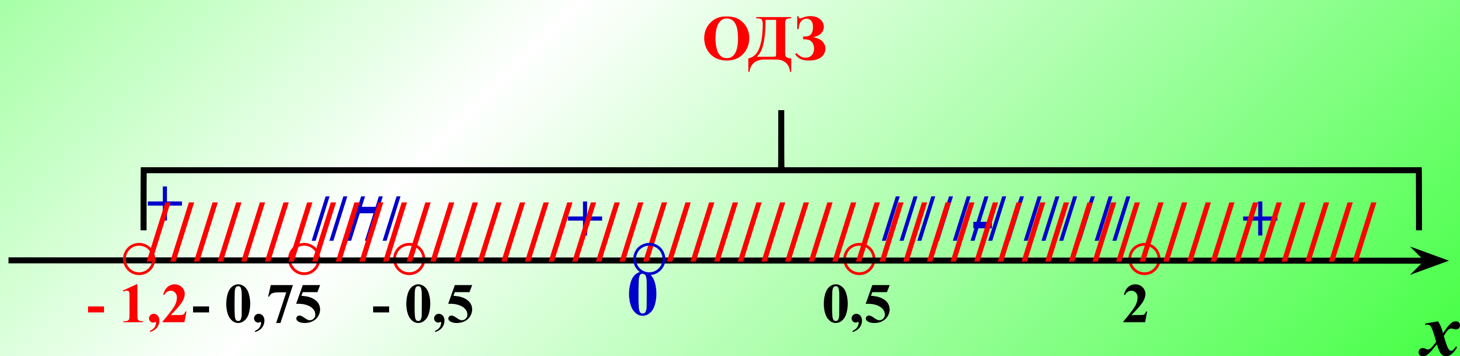
Решите неравенство: $\log_{4x^2}(5x+6) > 1$

1) ОДЗ: $\begin{cases} 5x+6>0, \\ 0<4x^2\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1{,}2, \\ x\neq \pm 0{,}5, \\ x\neq 0; \end{cases}$

2) $\log_{4x^2}(5x+6) > 1 \Leftrightarrow \log_{4x^2}(5x+6) > \log_{4x^2} 4x^2$

$(5x+6-4x^2)(4x^2-1)>0;$ $(4x^2-5x-6)(2x-1)(2x+1)<0;$

$4(x+0{,}75)(x-2)2(x-0{,}5)2(x+0{,}5)<0;$ $(x+0{,}75)(x-2)(x-0{,}5)(x+0{,}5)<0;$



Ответ: **- 0,75 < *x* < - 0,5; 0,5 < *x* < 2**

Решите рассмотренным способом неравенства

1) $\log_{x-3}(x-1) < 2;$

Ответ: $3 < x < 4; \quad x > 5.$

2) $\log_{x^2}(3-2x) > 1$

Ответ: (- 3; - 1)

3) $\log_{x^2+3}(x+3) < 1$

Решения – в материалах следующего занятия

Продолжение следует, до новых встреч