Особые приёмы решения логарифмических неравенств с переменной в основании

Занятие №3

Методическая разработка
учителя Поляковой Е. А.

Решение простейших логарифмических неравенств:

$$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Свойство знаков двух выражений:

выражения

$\log_a b$ и $(b - 1)(a - 1)$

имеют один знак

Решение логарифмических неравенств с применением доказанного свойства

Неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно неравенству $(f - g)(h - 1) > 0$ на <u>ОДЗ</u>

Аналогично неравенство $\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x)$ равносильно неравенству $(f - g)(h - 1) < 0$ на <u>ОДЗ</u>

Алгоритм решения неравенства $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$

1) Находим область допустимых значений переменной (ОДЗ):

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$$

(<u>Условимся</u> далее две последние строки системы писать одной так: $0 < h(x) \neq 0$)

2) Решаем неравенство $(f(x) - g(x))(h(x) - 1) > 0$.

3) Для найденного решения учитываем ОДЗ.

4) Записываем ответ.

Решите неравенство: $\log_{3-x}\frac{1}{|x|}>1$

1) ОДЗ: $\begin{cases}\frac{1}{|x|}>0\\ 0<3-x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|>0\\ -3<-x\neq 1-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<0,\ \ x>0\\ 2<x\neq 3,\end{cases}$ *т. е.*

$x\in(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;3)$

2) $\log_{3-x}\frac{1}{|x|}>1 \Leftrightarrow \log_{3-x}\frac{1}{|x|}>\log_{3-x}(3-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{|x|}-(3-x)\right)(3-x-1)>0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{|x|}-3+x\right)(\ \ -2)<0$

а) $\begin{cases}x>0\\ \left(\frac{1}{x}-3+x\right)(\ \ -2)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ \frac{1-3x+x^2}{x}(x-2)<0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{\left(x^2 - 3x + 1\right)(\quad - 2)}{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{\left(x - \overset{\approx 2{,}24}{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}}\right)\left(x - \overset{\approx 2{,}24}{\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}}\right)(x - 2)}{x} < 0 \end{cases}$$

С учётом ОДЗ – все *x* из $\left(0; \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(2; \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$

***б*)** $$\begin{cases} x < 0 \\ \left(\dfrac{1}{-x} - 3 + x\right)(\quad - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{1 + 3x - x^2}{-x}(x - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{\left(x^2 - 3x - 1\right)(\quad - 2)}{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{\left(x - \overset{\approx 3{,}6}{\dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}}\right)\left(x - \overset{\approx 3{,}6}{\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}}\right)(x - 2)}{x} < 0 \end{cases}$$

Ответ: ∪

С учётом ОДЗ – все *x* из $\left(\dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}; 0\right)$

Решите неравенство: $$\frac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2}-2^{11x}} \geq 0$$

Ответ: $$\left(\frac{1}{5};\frac{2}{7}\right] \cup \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right).$$

В решении этого неравенства используем то, что

1) знак ***$log_{2x}(5x-1)$*** **совпадает со знаком** ***$(5x-1-1)(2x-1)$***

2) знак ***$log_{3x}(7x-1)$*** **совпадает со знаком** ***$(7x-1-1)(3x-1)$***

Интересно, а может знак выражения $2^{15x^2+2}-2^{11x}$

совпадает со знак выражения $(2-1)(15x^2+2-11x)$ **???**

Выражения $a^b - a^c$ и $(a-1)(b-c)$ $(a>0,\ a\neq 1)$ имеют один знак

Докажем, например, что $a^b - a^c > 0$ и $(a-1)(b-c) > 0$

Доказательство. 1) $a > 1$; $a - 1 > 0$. $a^b - a^c > 0$; $a^b > a^c$;

показательная функция с основанием $a > 1$ – возрастает, тогда

$b > c$; $b - c > 0$; получили: $\begin{cases} a-1>0 \\ b-c>0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(a-1)(b-c)>0}$

2) a – положительно, но $a < 1$; $a - 1 < 0$. $a^b - a^c > 0$; $a^b > a^c$;

показательная функция с основанием $0 < a < 1$ – убывает, тогда

$b < c$; $b - c < 0$; получили:

$\begin{cases} a-1<0 \\ b-c<0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(a-1)(b-c)>0}$

Доказано, что

Заключение о знаках двух выражений:

выражения

$$a^b - a^c \text{ и } (a-1)(b-c)$$

$$(a > 0,\ a \neq 1)$$

имеют один знак

Решите неравенство: $$\frac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2}-2^{11x}} \geq 0$$

1) знак $\log_{2x}(5x-1)$ совпадает со знаком $(5x-1-1)(2x-1)$

2) знак $\log_{3x}(7x-1)$ совпадает со знаком $(7x-1-1)(3x-1)$

3) знак выражения $2^{15x^2+2}-2^{11x}$ совпадает со знак выражения

$(2-1)(15x^2+2-11x) = 15x^2-11x+2 = (5x-2)(3x-1)$

В исходном неравенстве заменяем каждый множитель на выражение того же знака, получаем

$$\frac{(5x-2)(2x-1)(7x-2)(3x-1)}{(5x-2)(3x-1)} \geq 0,$$

обязательно учитывая при этом ОДЗ:

ОДЗ: $\begin{cases} 5x-1>0 \\ 7x-1>0 \\ 0<2x\neq 1 \\ 0<3x\neq 1 \\ 2^{15x^2+2}-2^{11x}\neq 0 \end{cases}$

$$x>\frac{1}{5};\ \ x\neq\frac{1}{3};\ \ x\neq\frac{2}{5};\ \ x\neq\frac{1}{2}.$$

Неравенство $\dfrac{(5x-2)(2x-1)(7x-2)(3x-1)}{(5x-2)(3x-1)}\geq 0$

имеет решение: $\left(-\infty;\frac{2}{7}\right]\cup\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right).$

С учётом ОДЗ, окончательно получим $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{7}\right]\cup\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right).$

Продолжение следует,
до новых встреч