

*Особые приёмы решения  
логарифмических  
неравенств с переменной  
в основании*

*Занятие №3*

*Методическая разработка  
учителя Поляковой Е. А.*

# Решение простейших логарифмических неравенств:

$$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{l} a > 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \\ 0 < a < 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{array} \right.$$

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{l} a > 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \\ 0 < a < 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{array} \right.$$

*Свойство знаков  
двух выражений:*

*выражения*

*$\log_a b$  и  $(b - 1)(a - 1)$*

*имеют один знак*

# Решение логарифмических неравенств с применением доказанного свойства

Неравенство  $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$  равносильно  
неравенству  $(f - g)(h - 1) > 0$  на ОДЗ

Аналогично неравенство  $\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x)$   
равносильно неравенству  $(f - g)(h - 1) < 0$  на ОДЗ

Алгоритм решения неравенства  $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$

1) Находим область допустимых значений переменной (ОДЗ):

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$$

**(Условимся** далее две последние строки системы писать одной так:  $0 < h(x) \neq 0$ )

2) Решаем неравенство  $(f(x) - g(x))(h(x) - 1) > 0$ .

3) Для найденного решения учитываем ОДЗ.

4) Записываем ответ.

**Решите неравенство:**

$$\log_{3-x} \frac{1}{|x|} > 1$$

**1) ОДЗ:**

$$\begin{cases} \frac{1}{|x|} > 0 \\ 0 < 3-x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 0 \\ -3 < -x \neq 1-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, & x > 0 \\ 2 < x \neq 3, \end{cases} \text{ т. е.}$$

$$x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 3)$$

**2)**

$$\log_{3-x} \frac{1}{|x|} > 1 \Leftrightarrow \log_{3-x} \frac{1}{|x|} > \log_{3-x} (3-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1}{|x|} - (3-x) \right) (3-x-1) > 0 \Leftrightarrow \left( \frac{1}{|x|} - 3+x \right) (-2) < 0$$

**a)**

$$\begin{cases} x > 0 \\ \left( \frac{1}{x} - 3+x \right) (-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1-3x+x^2}{x} (x-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{(x^2 - 3x + 1)(-2)}{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{\left(x - \frac{3 - \sqrt{5} \approx 2,24}{2}\right) \left(x - \frac{3 + \sqrt{5} \approx 2,24}{2}\right) (x - 2)}{x} < 0 \end{cases}$$

**С учётом ОДЗ – все  $x$  из**

$$\left(0; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(2; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

**б)** 
$$\begin{cases} x < 0 \\ \left(\frac{1}{-x} - 3 + x\right)(-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1 + 3x - x^2}{-x}(x - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{(x^2 - 3x - 1)(-2)}{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{\left(x - \frac{3 - \sqrt{13} \approx 3,6}{2}\right) \left(x - \frac{3 + \sqrt{13} \approx 3,6}{2}\right) (x - 2)}{x} < 0 \end{cases}$$

**С учётом ОДЗ – все  $x$  из**

$$\left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}; 0\right)$$

Решите неравенство: 
$$\frac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2} - 2^{11x}} \geq 0$$

**Ответ:**  $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{7}\right] \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

В решении этого неравенства используем то, что

1) знак  $\log_{2x}(5x-1)$  совпадает со знаком  $(5x-1-1)(2x-1)$

2) знак  $\log_{3x}(7x-1)$  совпадает со знаком  $(7x-1-1)(3x-1)$

Интересно, а может знак выражения

$$2^{15x^2+2} - 2^{11x}$$

совпадает со знаком выражения

$$(2-1)(15x^2+2-11x) ???$$



Выражения  $a^b - a^c$  и  $(a - 1)(b - c)$  ( $a > 0, a \neq 1$ )

ИМЕЮТ ОДИН ЗНАК

Докажем, например, что  $a^b - a^c > 0$  и  $(a - 1)(b - c) > 0$

Доказательство. 1)  $a > 1; a - 1 > 0$ .  $a^b - a^c > 0; a^b > a^c$ ;

показательная функция с основанием  $a > 1$  – возрастает, тогда

$b > c; b - c > 0$ ; получили:  $\begin{cases} a - 1 > 0 \\ b - c > 0 \end{cases} \Rightarrow (a - 1)(b - c) > 0$

2)  $a$  – положительно, но  $a < 1; a - 1 < 0$ .  $a^b - a^c > 0; a^b > a^c$ ;

показательная функция с основанием  $0 < a < 1$  – убывает, тогда

$b < c; b - c < 0$ ; получили:

$\begin{cases} a - 1 < 0 \\ b - c < 0 \end{cases} \Rightarrow (a - 1)(b - c) > 0$

Доказано, что

*Заключение о знаках  
двух выражений:*

*выражения*

$$a^b - a^c \text{ и } (a - 1)(b - c)$$

$$(a > 0, a \neq 1)$$

*имеют один знак*

Решите неравенство:  $\frac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2} - 2^{11x}} \geq 0$

1) знак  $\log_{2x}(5x-1)$  совпадает со знаком  $(5x-1-1)(2x-1)$

2) знак  $\log_{3x}(7x-1)$  совпадает со знаком  $(7x-1-1)(3x-1)$

3) знак выражения  $2^{15x^2+2} - 2^{11x}$  совпадает со знаком выражения

$$(2-1)(15x^2+2-11x) = 15x^2 - 11x + 2 = (5x-2)(3x-1)$$

В исходном неравенстве заменяем каждый множитель на выражение того же знака, получаем

$$\frac{(5x-2)(2x-1)(7x-2)(3x-1)}{(5x-2)(3x-1)} \geq 0,$$

**обязательно  
учитывая при  
этом ОДЗ:**

**ОДЗ:** 
$$\begin{cases} 5x - 1 > 0 \\ 7x - 1 > 0 \\ 0 < 2x \neq 1 \\ 0 < 3x \neq 1 \\ 2^{15x^2+2} - 2^{11x} \neq 0 \end{cases} \quad \underline{x > \frac{1}{5}; \quad x \neq \frac{1}{3}; \quad x \neq \frac{2}{5}; \quad x \neq \frac{1}{2}.}$$

**Неравенство** 
$$\frac{(5x - 2)(2x - 1)(7x - 2)(3x - 1)}{(5x - 2)(3x - 1)} \geq 0$$

**имеет решение:** 
$$\left(-\infty; \frac{2}{7}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

**С учётом ОДЗ, окончательно получим** 
$$\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{7}\right] \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

**Продолжение следует,  
до новых встреч**