# Особые приёмы решения логарифмических неравенств с переменной в основании

## Занятие №3

*Методическая разработка учителя Поляковой Е. А.*

# Решение простейших логарифмических неравенств:

$$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

# Свойство знаков двух выражений:

**выражения**

**$\log_a b$ и $(b - 1)(a - 1)$**

**имеют один знак**

# Решение логарифмических неравенств с применением доказанного свойства

**Неравенство** $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ **равносильно неравенству** $(f - g)(h - 1) > 0$ **на <u>ОДЗ</u>**

**Аналогично неравенство** $\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x)$ **равносильно неравенству** $(f - g)(h - 1) < 0$ **на <u>ОДЗ</u>**

**Алгоритм решения неравенства $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$**

**1) Находим область допустимых значений переменной (ОДЗ):**

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$$

**(<u>Условимся</u> далее две последние строки системы писать одной так: $0 < h(x) \neq 0$)**

**2) Решаем неравенство $(f(x) - g(x))(h(x) - 1) > 0.$**

**3) Для найденного решения учитываем ОДЗ.**

**4) Записываем ответ.**

**Решите неравенство:** $\log_{3-x}\frac{1}{|x|} > 1$

**1) ОДЗ:** $\begin{cases} \frac{1}{|x|} > 0 \\ 0 < 3 - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 0 \\ -3 < -x \neq 1 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \;\; x > 0 \\ 2 < x \neq 3, \end{cases}$ т. е.

$x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 3)$

**2)** $\log_{3-x}\frac{1}{|x|} > 1 \Leftrightarrow \log_{3-x}\frac{1}{|x|} > \log_{3-x}(3-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{|x|} - (3-x)\right)(3 - x - 1) > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{|x|} - 3 + x\right)(\quad - 2) < 0$

**а)** $\begin{cases} x > 0 \\ \left(\frac{1}{x} - 3 + x\right)(\quad - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1 - 3x + x^2}{x}(x - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \dfrac{\left(x^2-3\ x+1\right)(\quad -2)}{x}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \dfrac{\left(x-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\approx 2{,}24}\left(x-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\approx 2{,}24}(x-2)}{x}<0 \end{cases}$$

**С учётом ОДЗ – все *x* из** $\boxed{\left(0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(2;\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$

***б*)** $$\begin{cases} x<0 \\ \left(\dfrac{1}{-x}-3+x\right)(\quad -2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ \dfrac{1+3x-x^2}{-x}(x-2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ \dfrac{\left(x^2-3\ x-1\right)(\quad -2)}{x}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ \dfrac{\left(x-\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^{\approx 3{,}6}\left(x-\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{\approx 3{,}6}(x-2)}{x}<0 \end{cases}$$

**С учётом ОДЗ – все *x* из** $\boxed{\left(\dfrac{3-\sqrt{13}}{2};0\right)}$

**Ответ:** $\cup$

**Решите неравенство:** $$\frac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2}-2^{11x}}\geq 0$$

**Ответ:** $$\left(\frac{1}{5};\frac{2}{7}\right]\cup\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right).$$

**В решении этого неравенства используем то, что**

**1) знак *$log_{2x}(5x-1)$* совпадает со знаком *$(5x-1-1)(2x-1)$***

**2) знак *$log_{3x}(7x-1)$* совпадает со знаком *$(7x-1-1)(3x-1)$***

**Интересно, а может знак выражения** $2^{15x^2+2}-2^{11x}$

**совпадает со знак выражения** $(2-1)(15x^2+2-11x)$ **???**

## Выражения $a^b - a^c$ и $(a-1)(b-c)$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ имеют один знак

Докажем, например, что $a^b - a^c > 0$ и $(a-1)(b-c) > 0$

Доказательство. 1) $a > 1;\ a - 1 > 0.$ $\quad a^b - a^c > 0; \quad a^b > a^c;$

показательная функция с основанием $a > 1$ – возрастает, тогда

$b > c; \quad b - c > 0;$ получили: $\begin{cases} a - 1 > 0 \\ b - c > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(a-1)(b-c) > 0}$

2) $a$ – положительно, но $a < 1;\ a - 1 < 0.$ $\quad a^b - a^c > 0; \quad a^b > a^c;$

показательная функция с основанием $0 < a < 1$ – убывает, тогда

$b < c; \quad b - c < 0;$ получили:

$\begin{cases} a - 1 < 0 \\ b - c < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(a-1)(b-c) > 0}$

Доказано, что

# Заключение о знаках двух выражений:

**выражения**

$$a^b - a^c \text{ и } (a-1)(b-c)$$

$$(a > 0,\ a \neq 1)$$

**имеют один знак**

**Решите неравенство:** $\dfrac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2}-2^{11x}} \geq 0$

**1) знак $log_{2x}(5x-1)$ совпадает со знаком $(5x-1-1)(2x-1)$**

**2) знак $log_{3x}(7x-1)$ совпадает со знаком $(7x-1-1)(3x-1)$**

**3) знак выражения $2^{15x^2+2}-2^{11x}$ совпадает со знак выражения**

**$(2-1)(15x^2+2-11x) = 15x^2-11x+2 = (5x-2)(3x-1)$**

**В исходном неравенстве заменяем каждый множитель на выражение того же знака, получаем**

$$\frac{(5x-2)(2x-1)(7x-2)(3x-1)}{(5x-2)(3x-1)} \geq 0,$$

**обязательно учитывая при этом ОДЗ:**

**ОДЗ:** $\begin{cases} 5x-1>0 \\ 7x-1>0 \\ 0<2x\neq 1 \\ 0<3x\neq 1 \\ 2^{15x^2+2}-2^{11x}\neq 0 \end{cases}$

$$x>\frac{1}{5};\ \ x\neq\frac{1}{3};\ \ x\neq\frac{2}{5};\ \ x\neq\frac{1}{2}.$$

**Неравенство** $\dfrac{(5x-2)(2x-1)(7x-2)(3x-1)}{(5x-2)(3x-1)}\geq 0$

**имеет решение:** $\left(-\infty;\frac{2}{7}\right]\cup\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right).$

**С учётом ОДЗ, окончательно получим** $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{7}\right]\cup\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right).$

**Продолжение следует,**
**до новых встреч**