Особые приёмы решения логарифмических неравенств с переменной в основании

Занятие №2

Методическая разработка
учителя Поляковой Е. А.

Решение простейших логарифмических неравенств:

$$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ x_2 > x_1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x_1 > x_2 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

В предыдущем занятии было доказано:

выражения

$\log_a b$ **и** $(b - 1)(a - 1)$

имеют один знак

Решение логарифмических неравенств с применением доказанного свойства:

неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ **равносильно неравенству** $(f - g)(h - 1) > 0$ **на** **ОДЗ**

неравенство $\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x)$ **равносильно неравенству** $(f - g)(h - 1) < 0$ **на** **ОДЗ**

Алгоритм решения неравенства $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$

1) Находим область допустимых значений переменной (ОДЗ):

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$$

(Условимся далее две последние строки системы писать одной так: $0 < h(x) \neq 0$**)**

2) Решаем неравенство $(f(x) - g(x))(h(x) - 1) > 0.$

3) Для найденного решения учитываем ОДЗ.

4) Записываем ответ.

Решите неравенство: $\log_{x-3}(x-1)<2;$

1) ОДЗ: $\begin{cases} x-1>0, \\ 0<x-3\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x>1, \\ 3<x\neq 4; \end{cases}$ $3<x\neq 4.$

2) Переписываем неравенство в виде

$$\log_{x-3}(x-1)<\log_{x-3}(x-3)^2;$$

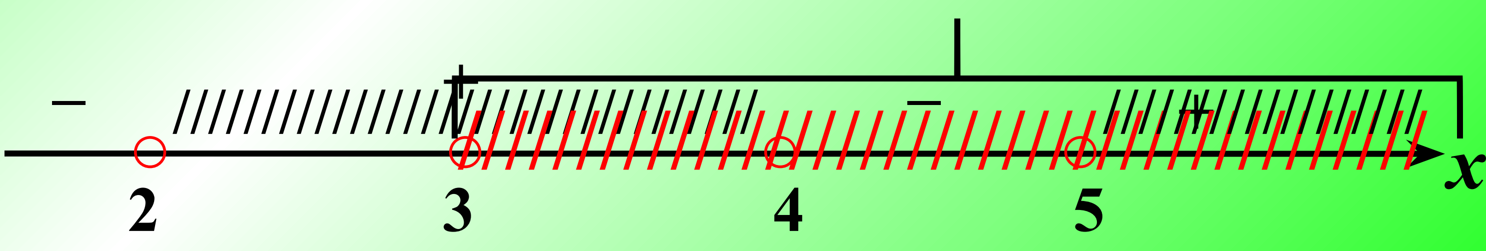
Решаем неравенство $(x-1-(x-3)^2)(x-3-1)<0;$

$(x-1-x^2+6x-9)(x-4)<0;$ $-(x^2-7x+10)(x-4)<0;$

$(x^2-7x+10)(x-4)>0;$ $(x-5)(x-2)(x-4)>0;$

ОДЗ

Ответ: $3<x<4;\ x>5$



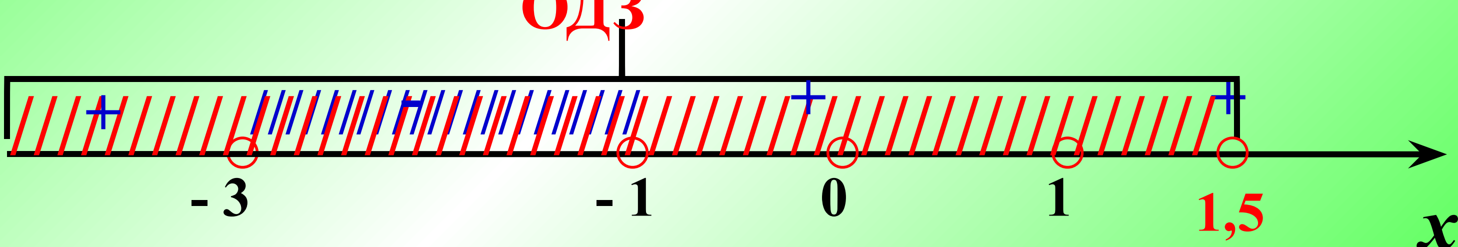
Решите неравенство: $\log_{x^2}\left(3-2x\right)>1$

1) ОДЗ: $\begin{cases} 3-2x>0, \\ 0<x^2\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x<1{,}5, \\ x\neq \pm 1, \\ x\neq 0; \end{cases}$

2) $\log_{x^2}\left(3-2x\right)>1 \Leftrightarrow \log_{x^2}\left(3-2x\right)>\log_{x^2} x^2$

$\left(3-2x-x^2\right)\left(x^2-1\right)>0;$ $\left(x^2+2x-3\right)\left(x-1\right)\left(\quad+1\right)<0;$

$\left(x+3\right)\left(x-1\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right)<0;$



Ответ: (- 3; - 1)

Решите неравенство: $\log_{x^2+3}(x+3)<1$

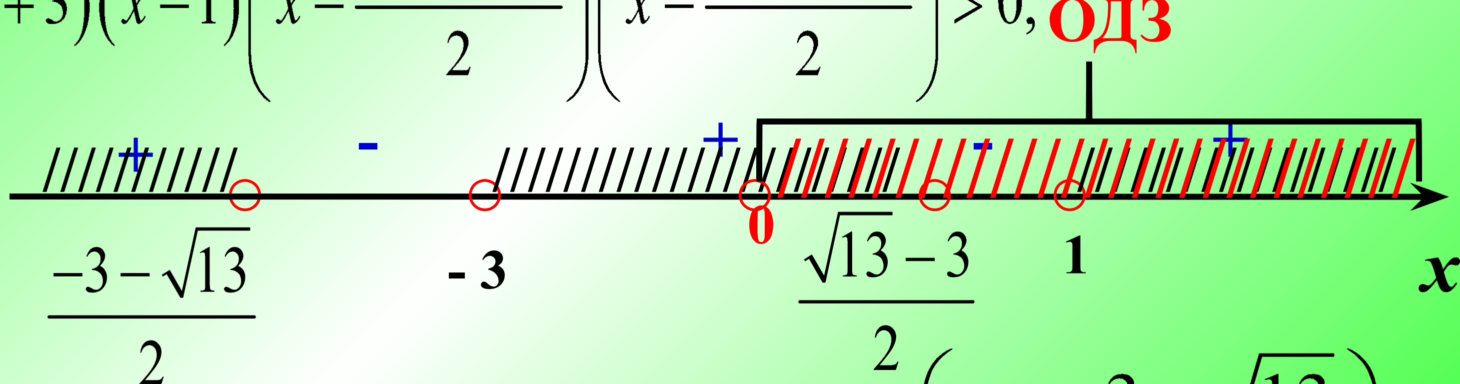
1) ОДЗ: $\begin{cases} x+3>0, \\ x^2+3x>0, \\ x^2+3x\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-3, \\ x(x+3)>0, \\ x^2+3x-1\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq \dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}, \\ x>-3, \\ x(x+3)>0; \end{cases}$ $0<x\neq\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}.$

2) $\log_{x^2+3}(x+3)<1 \Leftrightarrow \log_{x^2+3}(x+3)<\log_{x^2+3}(x^2+3x)$

$\left(x+3-x^2-3x\right)\left(x^2+3x-1\right)<0;\quad \left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+3\quad-1\right)>0;$

$(x+3)(x-1)\left(x-\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)>0;$

$\sqrt{13}\approx 3{,}6$



Ответ: $\left(0;\ \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(1;\ +\infty\right)$

Решите неравенство: $\log_x \frac{15}{1-2x} < -2$

1) ОДЗ: $\begin{cases} \frac{15}{1-2x} > 0, \\ 0 < x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 1-2x > 0, \\ 0 < x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0{,}5, \\ 0 < x \neq 1; \end{cases}$ $\underline{0 < x < 0{,}5.}$

2) $\log_x \frac{15}{1-2x} < -2$ $\Big|$ **· (- 1);** $-1 \cdot \log_x \frac{15}{1-2x} > 2;$

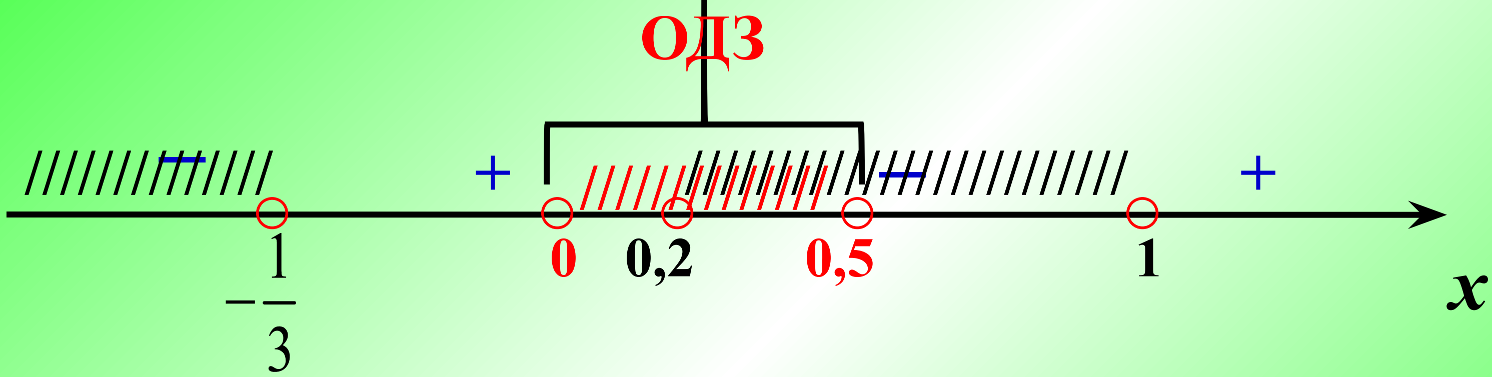
$\log_x \left(\frac{15}{1-2x}\right)^{-1} > \log_x x^2;$ $\log_x \frac{1-2x}{15} > \log_x x^2;$

$\left(\frac{1-2x}{15} - x^2\right)(x-1) > 0;$ $\frac{(1-2x-15x^2)(x-1)}{15} > 0$ $\Big|$ **· (- 15);**

$$\left(15x^2+2x-1\right)(x-1)<0;\quad 15\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)(x-1)<0 \quad \Big|\ \mathbf{:15;}$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-0,2)(x-1)<0;$$

ОДЗ: $0<x<0,5.$



<u>Ответ: 0,2 < *x* < 0,5</u>

1) Решите неравенство: $\log_{3-x}\dfrac{1}{|x|}>1$

Ответ: $\left(\dfrac{3-\sqrt{13}}{2};0\right)\cup\left(0;\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(2;\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

2) Решите неравенство: $\dfrac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2}-2^{11x}}\geq 0$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{2}{7}\right]\cup\left(\dfrac{1}{2};\ +\infty\right).$

Продолжение следует, до новых встреч