

Остовные деревья

Лекция 4

Задача «Минимальное остовное дерево»

- *Дано:* Граф G , веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.
- *Найти* остовное дерево в G наименьшего веса или определить, что G — несвязный.

Задача «Максимальный взвешенный лес»

Дано: Граф G , веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.

Найти лес в G наибольшего веса.

Эквивалентные задачи

- Будем говорить, что задача P **линейно сводится** к задаче Q , если существуют функции f и g , вычисляемые за линейное время, такие что f преобразует частную задачу x из P в частную задачу y из Q , и g преобразует решение $f(x)$ в решение x .
- Если P линейно сводится к Q и Q линейно сводится к P , то обе задачи называются **эквивалентными**.

Эквивалентность

Предложение 4.1

Задача «Минимальное остовное дерево» и задача «Максимальный взвешенный лес» эквивалентны.

Доказательство

- (G, c) — исходный пример задачи «Максимальный взвешенный лес».
- Удалим все ребра отрицательного веса.
- Положим $c'(e) = -c(e)$.
- Добавим минимальное множество ребер F , так чтобы полученный граф G' стал связным. (Весы можно взять любые.)
- Решим задачу «Минимальное остовное дерево» на примере (G', c') .
- Удалив из решения множество ребер F , получим решение исходной задачи.
- (G, c) — исходный пример задачи «Минимальное остовное дерево».
- Положим $c'(e) = K - c(e)$, где $K = 1 + \max_{e \in E(G)} c(e)$.
- Решение задачи «Максимальный взвешенный лес» на примере (G', c') дает решение задачи «Минимальное остовное дерево» на исходном примере.

Условия оптимальности

Теорема 4.2

Пусть (G, c) — пример задачи «Минимальное остовное дерево», и пусть T — остовное дерево в G .

Тогда следующие условия эквивалентны:

- a) T — оптимум.
- b) Для любого $e = \{x, y\} \in E(G) \setminus E(T)$, все ребра из x - y -пути в T не дороже чем e .
- Для любого $e \in E(T)$, e — ребро наименьшей стоимости из $\delta(V(C))$, где C — связная компонента на $T - e$.

(c) \Rightarrow (a)

- (c) Пусть T такое, что для любого $e \in E(T)$, e — ребро наименьшей стоимости из $\delta(V(C))$, где C — связная компонента на $T - e$.
- Пусть T^* оптимальное решение, такое что $E(T) \cap E(T^*)$ максимально возможное. Покажем, что $T = T^*$.
- Пусть $e = \{x, y\} \in E(T) \setminus E(T^*)$.
- Пусть C — связная компонента на $T - e$.
- $T^* + e$ содержит цикл D . Так как $e \in E(D) \cap \delta(C)$, то существует $f \neq e, f \in E(D) \cap \delta(C)$.
- Тогда $(T^* + e) - f$ является остовным деревом.
- T^* оптимум $\Rightarrow c(e) \geq c(f)$ и (c) $\Rightarrow c(f) \geq c(e)$.
- $c(f) = c(e)$ и $(T^* + e) - f$ является оптимальным остовным деревом.
- Противоречие, так как в $(T^* + e) - f$ больше на одно общее ребро с T , чем в T^* .

Алгоритм Краскала (1956)

Input: Связный граф G , веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.

Output: Остовное дерево T наименьшего веса.

- 1) Сортируем ребра так, что $c(e_1) \leq c(e_2) \leq \dots \leq c(e_m)$.
- 2) **Set** $T := (V(G), \emptyset)$.
- 3) **For** $i := 1$ **to** m **do**:
 If $T + e_i$ не содержит цикла **then** $T := T + e_i$.

Алгоритм Краскала (2)

Теорема 4.3

Алгоритм Краскала находит оптимальное решение за $O(mn)$.

Алгоритм Краскала (3)

Теорема 4.4

Алгоритм Краскала можно реализовать за $O(m \log n)$.

Алгоритм Краскала (1956)

Input: Связный граф G , веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.

Output: Остовное дерево T наименьшего веса.

- 1) Сортируем ребра так, что $c(e_1) \leq c(e_2) \leq \dots \leq c(e_m)$.
- 2) **Set** $T := (V(G), \emptyset)$.
- 3) **For** $i := 1$ **to** m **do**:
 If $T + e_i$ не содержит цикла **then** $T := T + e_i$.

Как улучшить шаг 3

- Основная цель шага 3 проверить не приведет ли добавление ребра $e_i = \{v, w\}$ к образованию цикла.
- Это эквивалентно проверки лежат ли v и w в одной связной компоненте.
- По ходу алгоритма будем строить дополнительный орлес B с $V(B) = V(G)$, такой что связные компоненты B индуцированы на тех же вершинах, что и связные компоненты T .

Проверка

- Первоначально, $B = (V(G), \emptyset)$ и $h(v) = 0$, для всех $v \in V(G)$, где $h(v)$ длина максимального пути из v в B .
- 3.1 Для ребра $e_i = \{v, w\}$ находим корни r_v и r_w ордеревьев в B , содержащих v и w .
- 3.2 Если $r_v = r_w$, то переходим к следующему ребру и идем на 3.1.
- 3.3 Если $r_v \neq r_w$, то добавляем e_i к T .
- 3.4. Если $h(r_v) \geq h(r_w)$, то добавляем дугу (r_v, r_w) к B , иначе добавляем дугу (r_w, r_v) к B .

Время работы шага 3

- Время работы пропорционально длине r_v -пути в B .
- Покажем, что любое ордеререво в B с корнем r имеет по крайней мере $2^{h(r)}$ вершин.
- Когда $B = (V(G), \emptyset)$ утверждение очевидно.
- Пусть алгоритм добавляет дугу (x, y) в B . Получаем новое ордеререво с корнем в x и числом вершин $\geq 2^{h(x)} + 2^{h(y)}$.
- Если $h(x) > h(y)$, то значение $h(x)$ не меняется и утверждение справедливо.
- Если $h(x) = h(y)$, то значение $h(x)$ увеличивается на 1. Число вершин в новом ордереве $\geq 2^{h(x)} + 2^{h(y)} = 2^{h(x)+1}$.
- $h(r) \leq \log n$, и трудоемкость шага 3 $\leq m \log n$.

Алгоритм Прима (1957)

Input: Связный граф G , веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.

Output: Остовное дерево T минимального веса.

- 1) Выбрать $v \in V(G)$. $T := (\{v\}, \emptyset)$.
- 2) **While** $V(T) \neq V(G)$ **do:**
Выбрать ребро $e \in \delta_G(V(T))$ минимальной стоимости. $T := T + e$.

Алгоритм Прима (2)

Теорема 4.5

Алгоритм Прима находит решение за $O(n^2)$ элементарных операций.

Как реализовать шаг 2

While $V(T) \neq V(G)$ **do**:

Выбрать ребро $e \in \delta_G(V(T))$ минимальной стоимости. $T := T + e$.

- Для каждой вершины $v \notin V(T)$ будем хранить самое дешевое ребро (кандидата) из v в $V(T)$.
- Тогда выбор ребра минимальной стоимости и замена кандидатов может быть выполнена за $O(n)$ элементарных операций.

Задача «Максимальный взвешенный ориентированный лес»

- *Дано:* Орграф G ,
веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.
- *Найти* ориентированный лес в G наибольшего веса.

Задача «Минимальное остовное ориентированное дерево»

- *Дано:* Орграф G ,
веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.
- *Найти* остовное ориентированное дерево в G наименьшего веса или определить, что оно не существует.

Задача «Минимальное остовное корневое ориентированное дерево»

- *Дано:* Орграф G , вершина $r \in V(G)$,
веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.
- *Найти* остовное ориентированное
дерево с корнем r в G наименьшего веса
или определить, что оно не существует.

Эквивалентность трех задач

Предложение 4.6.

Задачи «Максимальный взвешенный ориентированный лес», «Минимальное остовное ориентированное дерево» и «Минимальное остовное корневое ориентированное дерево» эквивалентны.

Упражнение 4.1

Доказать предложение 4.6 .

Ориентированный лес

Орграф называется **ориентированным лесом**, если соответствующий ему граф является лесом и каждая вершина v имеет не более одного входящего ребра.

Ориентированный лес и циклы

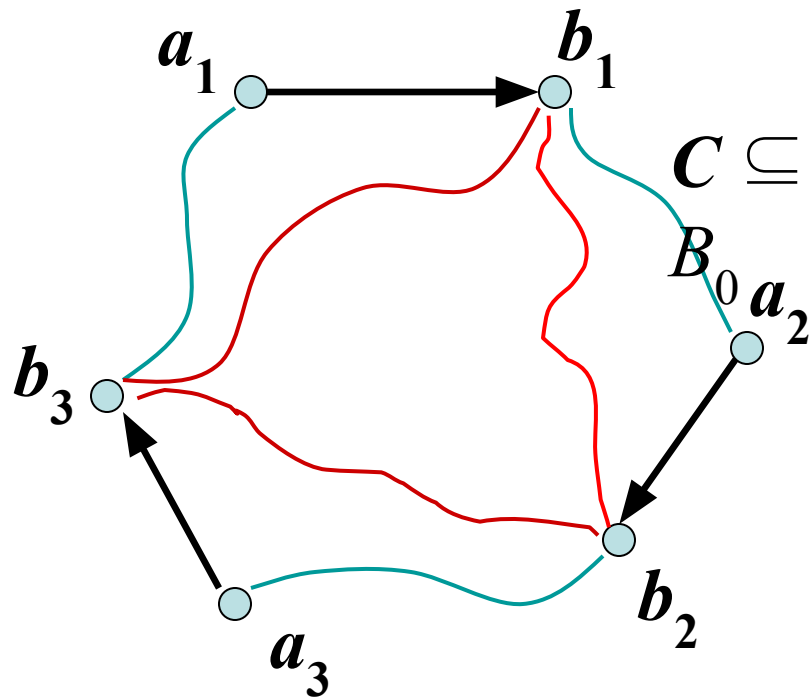
Предложение 4.7.

Пусть B — орграф с $|\delta_B^-(x)| \leq 1$ для всех $x \in V(B)$. Тогда B имеет цикл тогда и только тогда, когда соответствующий ему граф имеет цикл.

Лемма 4.8. (Карп [1972])

Пусть B_0 — подграф G максимального веса с $|\delta_{B_0}^-(v)| \leq 1$ для всех $v \in V(B_0)$. Тогда существует оптимальный ориентированный лес B в G такой, что для каждого цикла C в B_0 , $|E(C) \setminus E(B)| = 1$.

Доказательство леммы

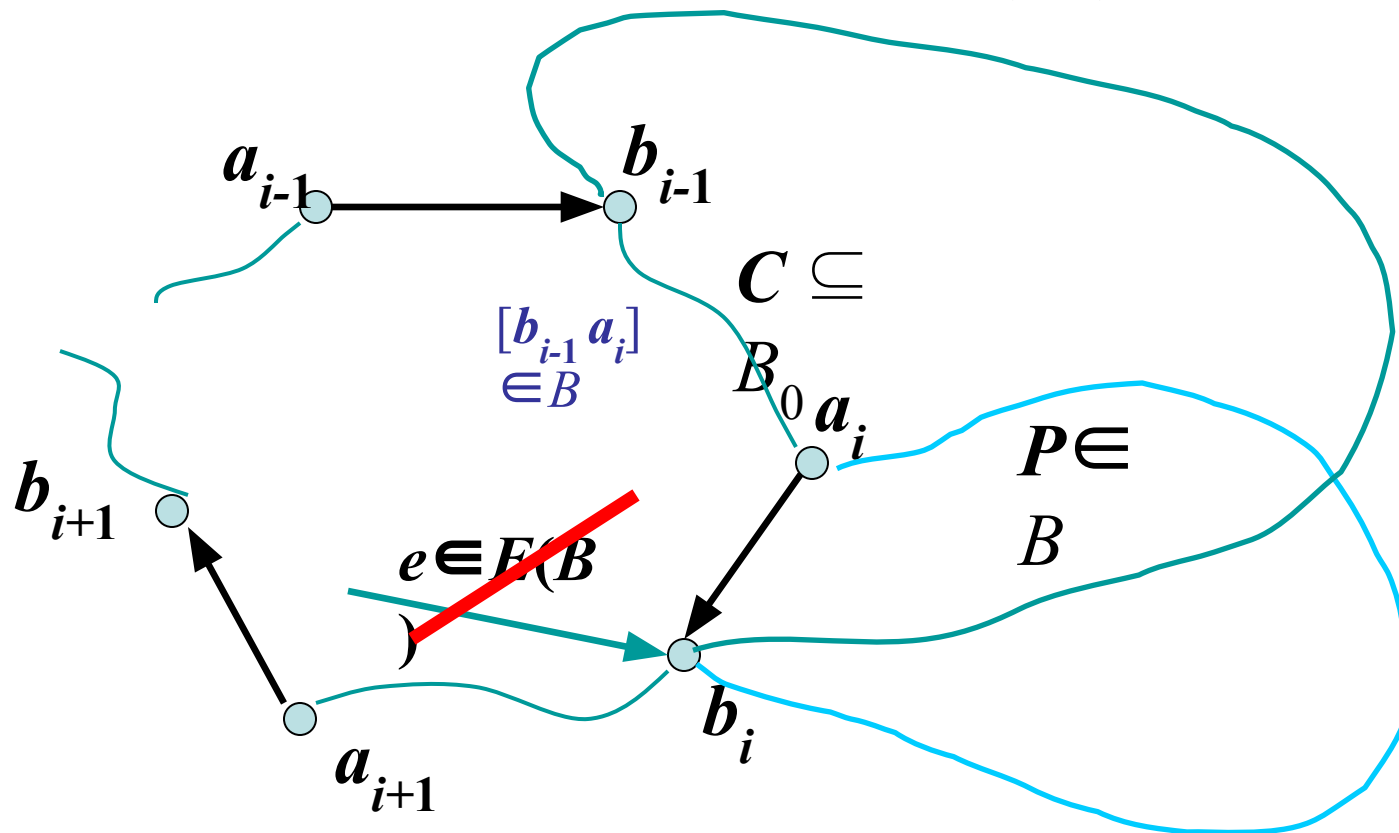


Пусть B – оптимальный орлес в G имеющий максимум много ребер из B_0 .

$$E(C) \setminus E(B) = \{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)\}$$

Покажем, что в B есть b_i - b_{i-1} -путь для всех i .

Покажем, что в B есть b_i - b_{i-1} -путь для всех i .



$E(B') := \{(x, y) \in E(B)\} \setminus \{e\} \cup \{(a_i, b_i)\}$ не орлес.

Основная идея

- Найти V_0 ориентированный подграф G максимального веса, в котором в каждую вершину входит не больше одной дуги.
- Стянуть каждый цикл в V_0 в вершину.
- Перераспределить веса в новом графе G_1 , так чтобы любой оптимальный орлес в G_1 соответствовал оптимальному орлесу в G .

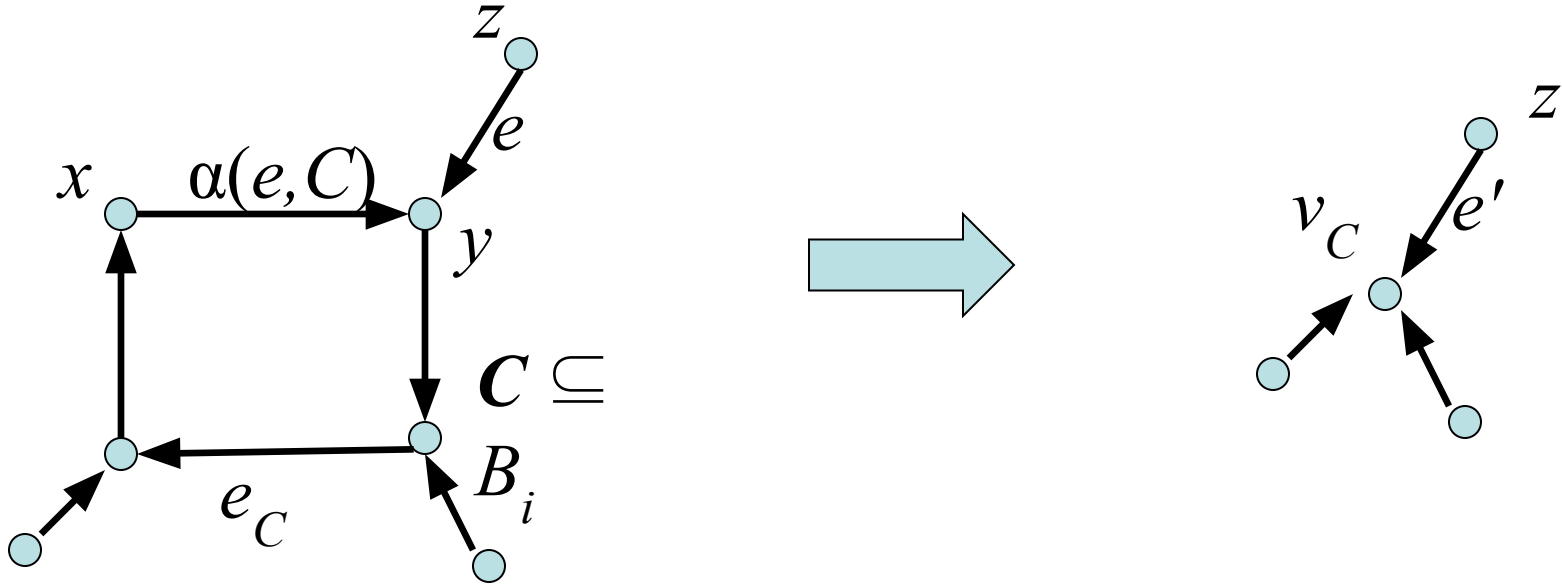
Алгоритм Эдмондса построения ориентированного леса максимального веса (1967)

Input: оргграф G , веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}_+$.

Output: орлес максимального веса B of G .

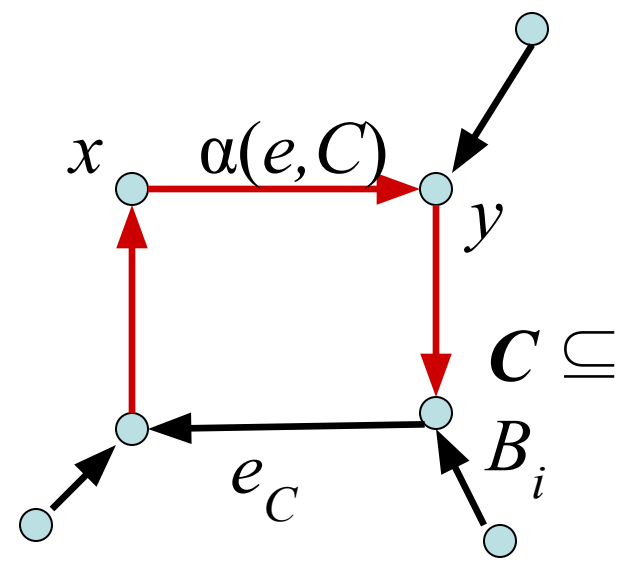
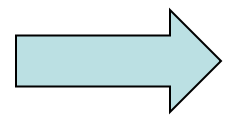
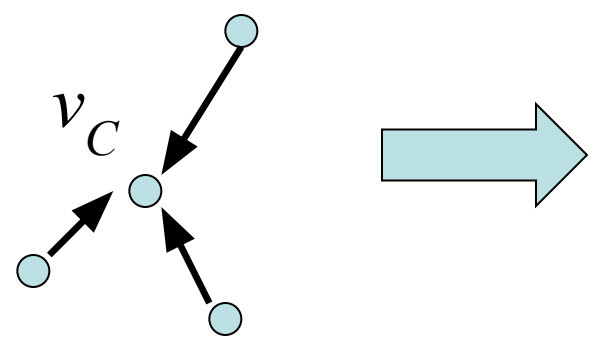
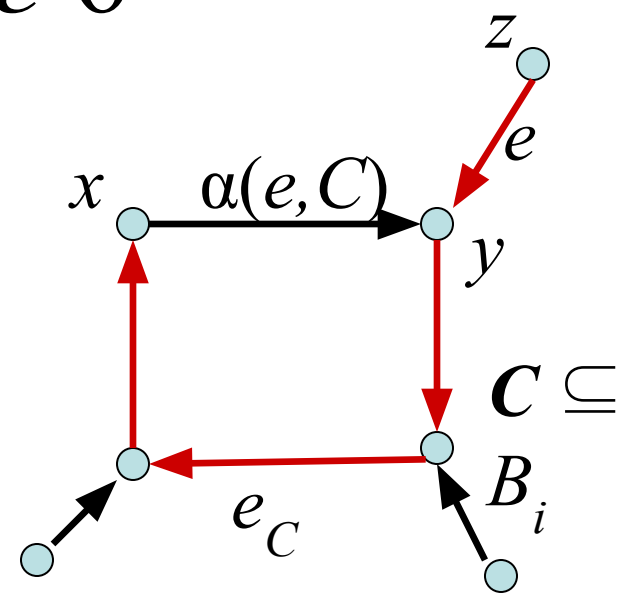
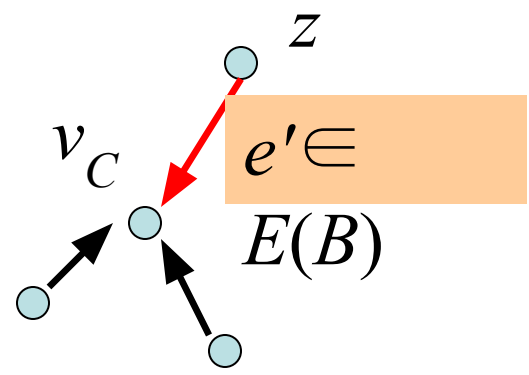
- 1) **Set** $i := 0$, $G_0 := G$, и $c_0 := c$.
 - 2) Пусть B_i подграф G максимального веса с $|\delta_{B_i}^-(v)| \leq 1$ для всех $v \in B_i$.
 - 3) **If** B_i не содержит циклов **then** $B := B_i$ и **go to** (5).
 - 4) Построим (G_{i+1}, c_{i+1}) из (G_i, c_i) : **do** для каждого цикла C из B_i .
Стянем C к одной вершине v_C в G_{i+1} .
For каждого ребра $e = (z, y) \in E(G_i)$ с $z \notin V(C), y \in V(C)$ **do**:
Set $c_{i+1}(e') := c_i(e) - c_i(\alpha(e, C)) + c_i(e_C)$ и $\Phi(e') := e$,
где $e' := (z, v_C)$, $\alpha(e, C) = (x, y) \in E(C)$, и e_C самое дешевое ребро C .
- 1) **If** $i = 0$ **then stop**.
 - 2) **For** каждого цикла C из B_{i-1} **do**:
If есть ребро $e' = (z, v_C) \in E(B)$
then $E(B) := (E(B) \setminus \{e'\}) \cup \Phi(e') \cup (E(C) \setminus \{\alpha(\Phi(e'), C)\})$
else $E(B) := E(B) \cup (E(C) \setminus \{e_C\})$.
Set $V(B) := V(G_{i-1})$, $i := i-1$ и **go to** (5).

Шаг 4



- **For** каждого ребра $e = (z, y) \in E(G_i)$ с $z \notin V(C)$, $y \in V(C)$ **do**:
Set $c_{i+1}(e') := c_i(e) - c_i(\alpha(e, C)) + c_i(e_C)$ и $\Phi(e') := e$,
 где $e' := (z, v_C)$, $\alpha(e, C) = (x, y) \in E(C)$, и e_C самое дешевое ребро C .

Шаг 6



Алгоритм Эдмондса

Теорема 4.9

Алгоритм Эдмондса находит оптимальное решение.

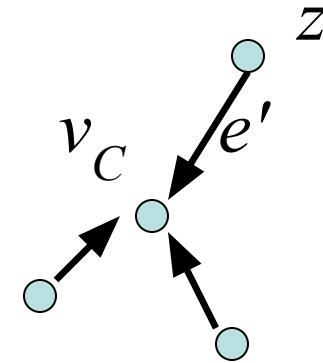
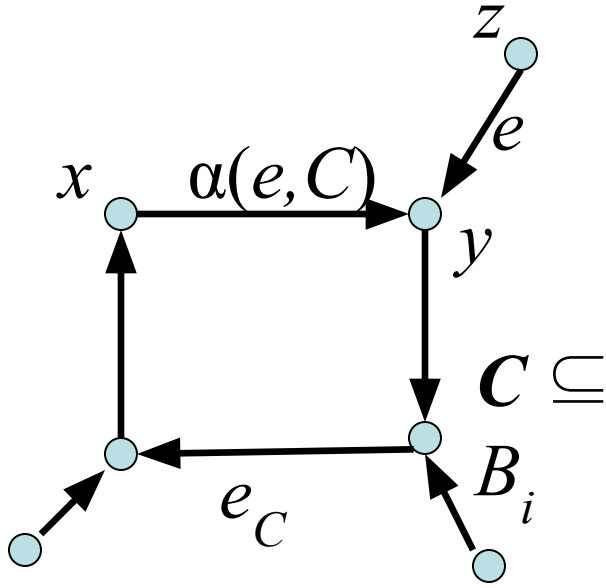
Доказательство

- Последовательно применяя шаг 4 алгоритма, мы получили последовательность (G_i, c_i) , $i = 0, \dots, k$.
- Ясно, что полученный на последнем применении шага 4 орлес V является оптимальным для (G_k, c_k) .
- Покажем, что на шаге 6 мы последовательно строим оптимальные решения для (G_i, c_i) , $i = k-1, \dots, 0$.
- Мы хотим показать, что шаг 6 переводит ориентированный лес наибольшего веса V для G_i в ориентированный лес наибольшего веса V^* для G_{i-1} .

Доказательство (2)

- Пусть B'_{i-1} — произвольный орлес в G_{i-1} , такой что $|E(C) \setminus E(B'_{i-1})| = 1$ для любого C из B_{i-1} .
- Пусть B'_i получается из B'_{i-1} стягиванием циклов в B_{i-1} .
- Тогда B'_i орлес в G_i .

Шаг 4



Set $c_{i+1}(e') := c_i(e) - c_i(\alpha(e, C)) + c_i(e_c)$

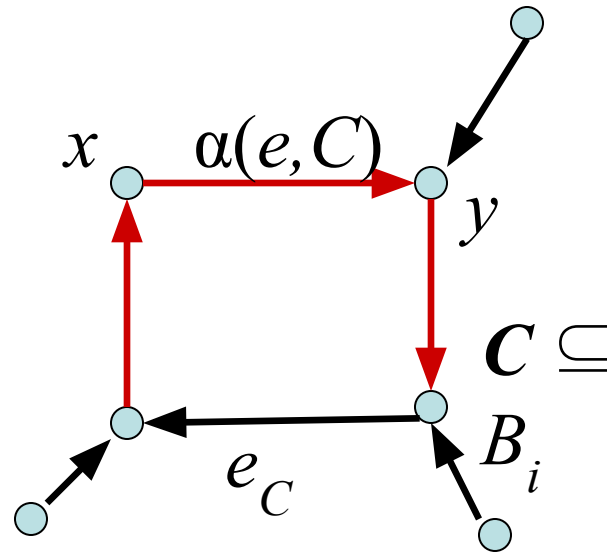
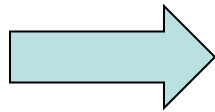
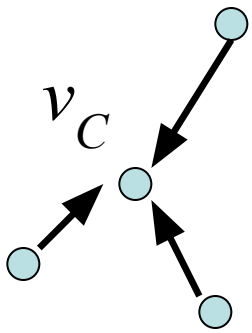
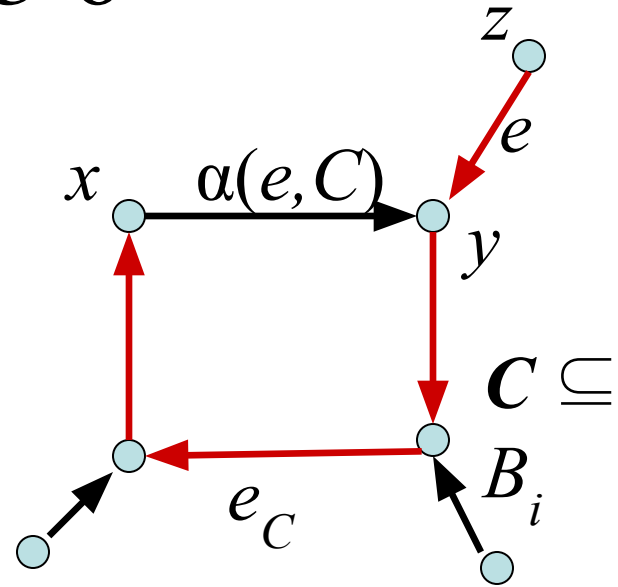
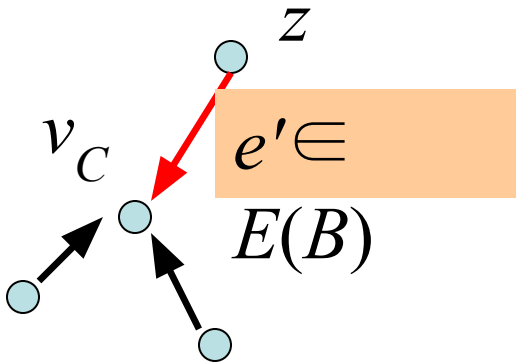
$$c_{i-1}(B'_{i-1}) \leq c_i(B'_i) + \sum_{C \in B_{i-1}} (c_{i-1}(C) - c_{i-1}(e_C))$$

Индукция

- По индукции, B — ориентированный лес наибольшего веса в G_i .
- $c_i(B) \geq c_i(B')$

$$\begin{aligned} c_{i-1}(B'_{i-1}) &\leq c_i(B'_i) + \sum_{C \in B_{i-1}} (c_{i-1}(C) - c_{i-1}(e_C)) \\ &\leq c_i(B) + \sum_{C \in B_{i-1}} (c_{i-1}(C) - c_{i-1}(e_C)) = c_{i-1}(B^*) \end{aligned}$$

Шаг 6



Упражнение 4.2

- Пусть (V, T_1) и (V, T_2) два дерева на одном множестве вершин V . Доказать, что для любого ребра $e \in T_1$ существует ребро $f \in T_2$ такое, что $(V, (T_1 \setminus \{e\}) \cup \{f\})$ и $(V, (T_2 \setminus \{f\}) \cup \{e\})$ — деревья.

Упражнение 4.3

- Дан граф G с произвольными весами $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.
- Найти остовный подграф в G наименьшего веса.

Упражнение 4.4

- Дан граф G с произвольными весами $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.
- Найти остовное дерево T в G , такое что вес максимального ребра в T наименьший ($\max \{c(e) | e \in T\} \rightarrow \min$).