# ПОГРЕШНОСТИ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА

**Кафедра Информационных технологий и управляющих систем**

Предмет «Вычислительные методы и их применение в ЭВМ»

***Лекция***

***Доцент Стрельцова Г. А.***

# Введение

**При выполнении массовых вычислений важно придерживаться определенных простых правил, выработанных практикой, которые позволяют экономить труд вычислителя и рационально использовать вычислительную технику. Одно из таких правил – разработка подробной вычислительной схемы.**

# Повестка дня

- Список изучаемых разделов:
- **Приближенные числа и правила приближений.**
- **Погрешности арифметических операций.**
- **Основные свойства решений.**

- Время, отводимое на каждый раздел: 5-10 минут.

# Обзор

Разделы лекции

**Приближенные числа и правила приближений**

**Погрешности арифметических операций**

**Основные свойства решений**

# Словарь терминов

**Приближенным числом $a^*$ называется число, отличающееся от точного $a$ и заменяющее последнее в вычислениях. Если известно, что $a^* < a$ , то $a^*$ называют приближенным значением числа $a$ по недостатку; если же $a^* > a$, то - по избытку.**

# Приближенные числа и правила приближений

**Значащими цифрами числа $a^*$** называются все цифры его записи, начиная с первой ненулевой слева.

**Значащую цифру числа $a^*$** называют **верной**, если абсолютная погрешность числа не превышает единицу разряда, соответствующего этой цифре.

**Пример:** **Δ (a*) =0, 000002, a* =0, 0<u>1030</u>00 – 4 верных цифры.**

# Приближенные числа и правила приближений

**Округление числа** – замена его другим числом с меньшим числом значащих цифр.

Погрешность такой замены называется погрешностью округления.

**Виды округления:**

- **Усечение** – отбрасывание всех цифр, расположенных слева от значащей цифры. Абсолютная погрешность не превышает единицы разряда.
- **Округление по дополнению** – при разряде, меньшим 5, остается та же цифра, при большем или равном 5 добавляется 1. Абсолютная погрешность не превышает ½ разряда последней оставляемой цифре.

Границы погрешностей всегда округляют в сторону увеличения.

# Приближенные числа и правила приближений

## Относительная погрешность (%) чисел с n верными знаками. Начало таблицы.

| Первые значащие цифры | n=2 | n-=3 | n=4 |
|---|---|---|---|
| 10-11 | 10 | 1 | 0,1 |
| 12-13 | 8,3 | 0,83 | 0,083 |
| 14,…,16 | 7,1 | 0,71 | 0,071 |
| 17,…,19 | 5,9 | 0,59 | 0,059 |
| 20,…,22 | 5 | 0,5 | 0,05 |
| 23,…,26 | 4,3 | 0,43 | 0,043 |
| 26,…,29 | 3,8 | 0,38 | 0,038 |
| 30,…,34 | 3,3 | 0,33 | 0,033 |

# Приближенные числа и правила приближений

## Относительная погрешность (%) чисел с n верными знаками.

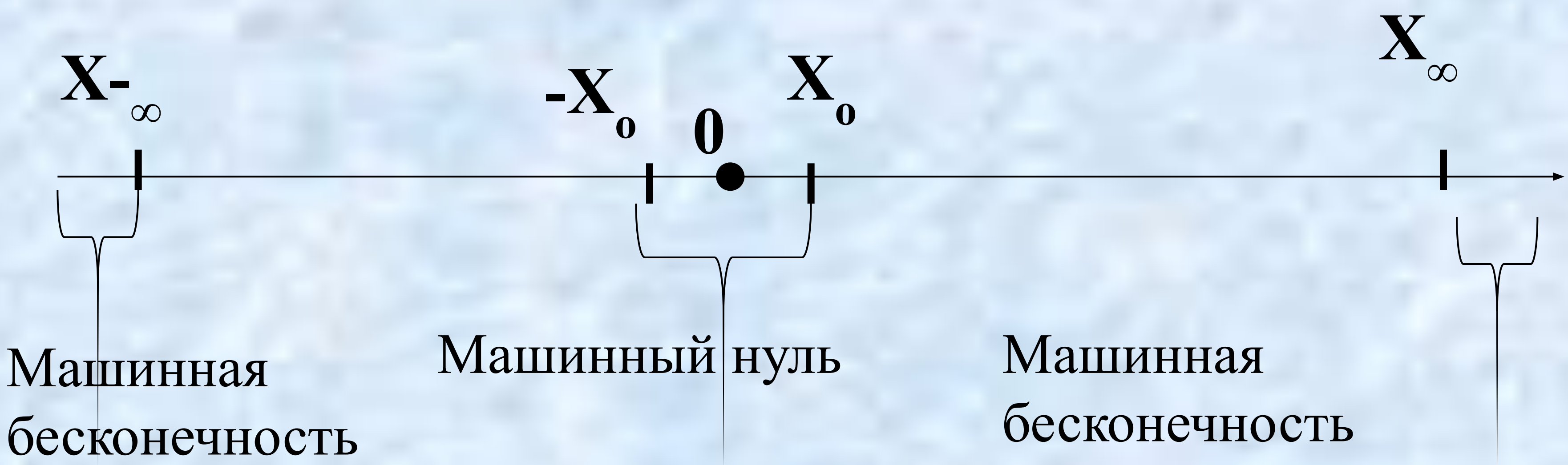
## Окончание таблицы.

| Первые значащие цифры | n=2 | n-=3 | n=4 |
|---|---|---|---|
| 35,…,39 | 2,9 | 0,29 | 0,029 |
| 40,…,44 | 2,5 | 0,25 | 0,025 |
| 45,…,49 | 2,2 | 0,22 | 0,022 |
| 50,…,59 | 2 | 0,2 | 0,02 |
| 60,…,69 | 1,7 | 0,17 | 0,017 |
| 70,…,79 | 1,4 | 0,14 | 0,014 |
| 80,…,89 | 1,2 | 0,12 | 0,012 |
| 90,…,99 | 1,1 | 0,11 | 0,011 |
| Пример: 0,00354 | 35,…,39 | 3 | $\delta$= 0,29% |

# Приближенные числа и правила приближений

**Для двоичных чисел существуют понятия:**

- **Машинный нуль.**
- **Машинная бесконечность.**
- **Переполнение.**
- **Исчезновение порядка.**



# Приближенные числа и правила приближений

Числа, большие по модулю, чем $X\infty$, рассматриваются, как машинная бесконечность, и попытка получить такое число приводит к аварийному останову по переполнению. Числа, меньшие по модулю, чем $Xo$ представляются машинным нулем. При получении таких чисел возможно исчезновение порядка (или антипереполнение).

**Для двоичных чисел при потери точности вычислений используют так называемую удвоенную точность.**

# Приближенные числа и правила приближений

**Пример:** Имеется гипотетическая машина с 6 двоичными разрядами мантиссы, в которой округление происходит только по дополнению.

Выполнить арифметические действия для двух чисел в двоичном коде:

a=20.5D=10100.1B; b=1.75D=1.11B

a+b=22.25D;       a*b=35,785D

a+b=10100.1+1.11=101101.01B ≈10110.1B =22.5D

a*b=10100.1*1.11=1100011.111B ≈100100.1B =36D

# Приближенные числа и правила приближений

**Проверка точности вычислений проводится по так называемому машинному эпсилону $\varepsilon_м$. Машинный эпсилон $\varepsilon_м$ – это минимальное из представленных чисел $\varepsilon$, для которых $1 \quad \varepsilon_м > 1 \oplus$**

**Алгоритм проверки (вставка в фрагмент программы):**

1. Задается шаг $\varepsilon^{(o)}=1$, проводится вычисление,
2. Задается шаг $\varepsilon^{(1)}=0.5 \quad \varepsilon^{(o)}$ проводится вычисление и проверяется неравенство $\mathbf{1 \oplus \varepsilon > 1}$

**……………………………………………………………………………**

n. Задается шаг $\varepsilon^{(n)}=0.5 \quad \varepsilon^{(n-1)}$ проводится вычисление и проверяется неравенство $\mathbf{1 \quad \oplus > 1}$

**Если неравенство выполняется, то принимается $\varepsilon_м = \varepsilon^{(n-1)}$** и переходят к следующему этапу вычислений.

# Приближенные числа и правила приближений

В представленном примере $\varepsilon_м = 0.000001$,

т. к. $1+ \varepsilon_м =1.000001$, тогда $1 \oplus \varepsilon_м =1.00001$

Если же к 1 добавить любое положительное число $\varepsilon < \varepsilon_м$ , то в седьмом разряде результата будет стоять нуль, и после округления получается:

$1 \oplus \varepsilon = 1$

# Приближенные числа и правила приближений

В современной мировой практике используется ошибка вычислений приближенного числа:

$$Error = |a-a^{*}|/(1+a)$$

**Error→ Δ (a*) при |a|<<1**

**Error→ δ(a*) при |a|>>1**

# Погрешности арифметических операций

**Погрешности суммы и разности:**

$$\Delta\,(a^* \pm b^*) \leq \Delta\,(a^*) + \Delta\,(b^*)$$

$$\delta\,(a^* + b^*) \leq \delta_{max}\ ;\ \delta\,(a^* - b^*) \leq v^*\delta_{max}$$

$$\delta_{max} = \max\{\delta\,(a^*),\ \delta\,(b^*)\},\ v = |a+b|/|a-b|$$

**Относительные погрешности произведения и частного:** $\Delta\,(a^* + b^*) \leq \Delta\,(a^*) + \Delta\,(b^*)$

$$\delta(a^*\, b^*) \leq \delta\,(a^*) + \delta\,(b^*) + \delta\,(a^*) * \delta\,(b^*)$$

$$\delta(a^*/\, b^*) \leq (\delta\,(a^*) + \delta\,(b^*))/(1 - \delta\,(b^*))$$

**Границы относительных погрешностей:**

□δ□(a* b*) ≈ δ□ (a*) + δ□ (b*) ≈ δ□(a*/ b*)

# Основные свойства решений

**Корректность вычислительной задачи.**

Это выполнение условий: 1) ее решение y, принадлежащих Y, существует при всех входных x, принадлежащих X. 2) это решение единственное 3) решение устойчиво по отношению к малым возмущениям входных величин.

**Единственность вычислительной задачи.** Задача должна иметь единственное решение.

**Устойчивость вычислительной задачи.** Задача устойчива по входным данным, если для любого $\varepsilon>0$ существует

$\delta= \delta(\varepsilon)>0$ такое, что всякому исходному $x^*$ при котором $\Delta(x^*) < \delta$ , соответствует y*, для которого $\Delta(y^*) < \varepsilon$ .

Т. е. решение y зависит от входного x непрерывным образом.

**Относительная устойчивость решения – замена Δ на** δ.

# ВЫВОДЫ

Рассмотренные вопросы

- **Приближенные числа и правила приближений.**
- **Погрешности арифметических операций.**
- **Основные свойства решений.**

Практические работы

1. Примеры вычислений.