


# Показательная функция, ее свойства и применение.

Организация итогового повторения  
по алгебре и началам анализа  
в 11 классе





# Основная цель:



Актуализация базовых знаний и способов действий по теме.

# Показательная функция, ее свойства и применение.

- Степень с рациональным показателем.
- Показательная функция.
- Показательные уравнения.
- Показательные неравенства.
- Дополнительный справочный материал.

# Свойства степени с рациональным показателем

Если  $a > 0$ , то:

1.  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ;

2.  $a^n : a^m = a^{n-m}$ ;

3.  $(ab)^n = a^n b^n$ ;

4.  $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ ;

5.  $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ , где  $b \neq 0$

6.  $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ ;

7.  $a^1 = a$ ;

8.  $a^0 = 1$ ;

9.  $1^n = 1$ ;

10.  $0^n = 0$ , где  $n \neq 0$ ;

11. Если  $r \in \mathbb{Q}, 0 < a < b$ , то  $a^r < b^r$

при  $r > 0$  и  $a^r > b^r$  при  $r < 0$ ;

12. Если  $r, s \in \mathbb{Q}, r > s$ , то  $a^r > a^s$

При  $a > 1$  и  $a^r < a^s$  при  $0 < a < 1$ .

«Деятельность учителя неотделима от деятельности учащихся... Она должна состоять из трех основных этапов: *мотивационного, операционно-познавательного и рефлексивно-оценочного*».

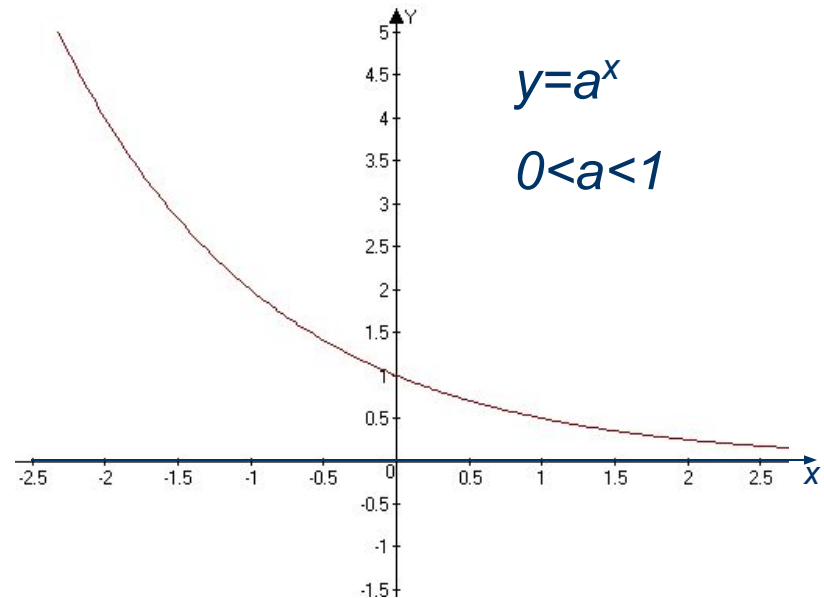
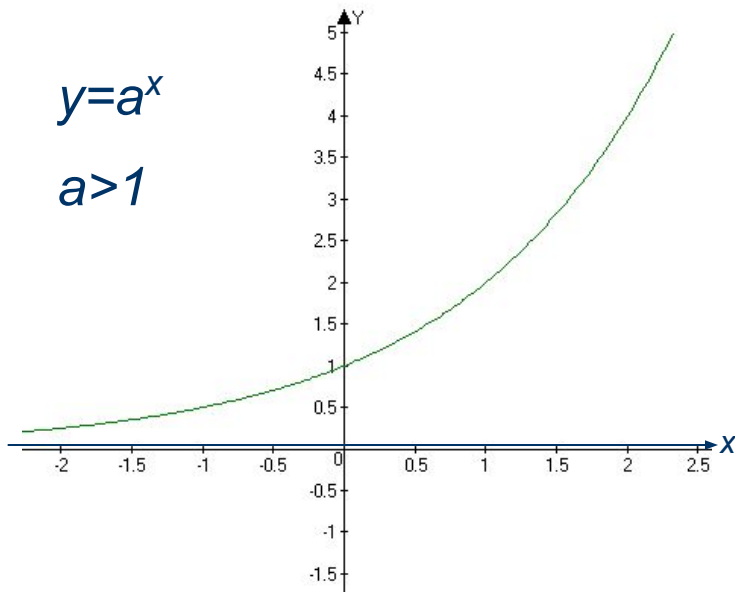
Фридман Л.М.

# ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

*СВОЙСТВА И ГРАФИК*

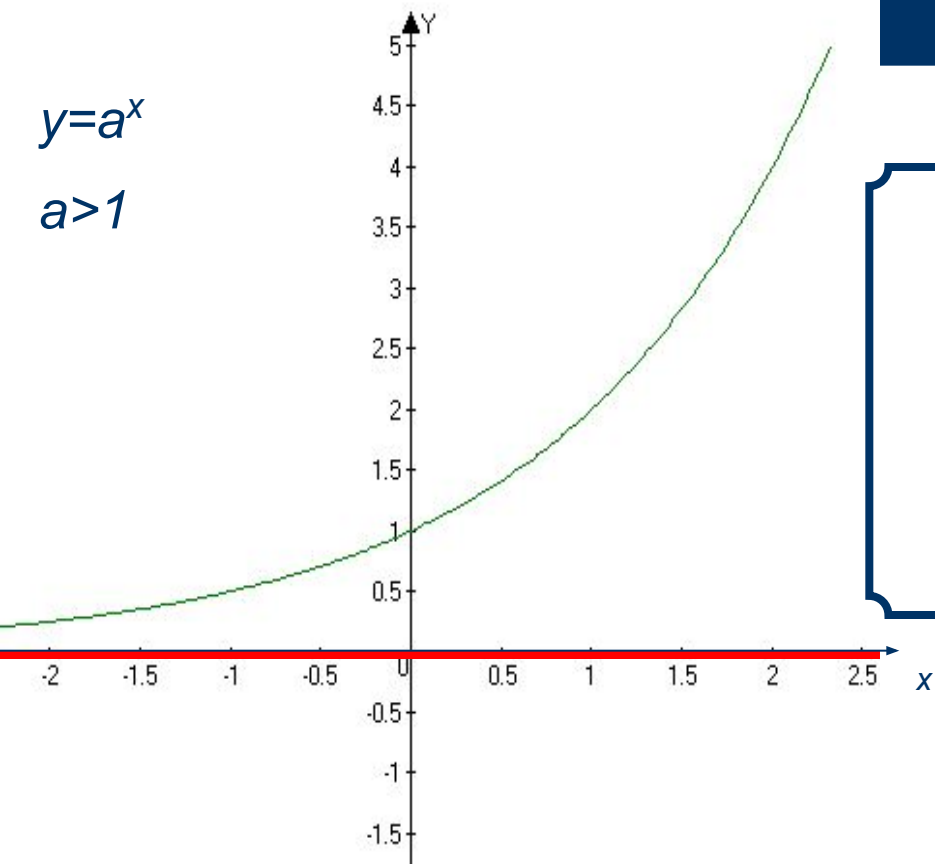
# Определение

- Функция, заданная формулой  $y=a^x$  (где  $a>0$ ,  $a\neq 1$ ), называется показательной функцией с основанием  $a$



# Свойства показательной функции $y=a^x$ при $a>1$

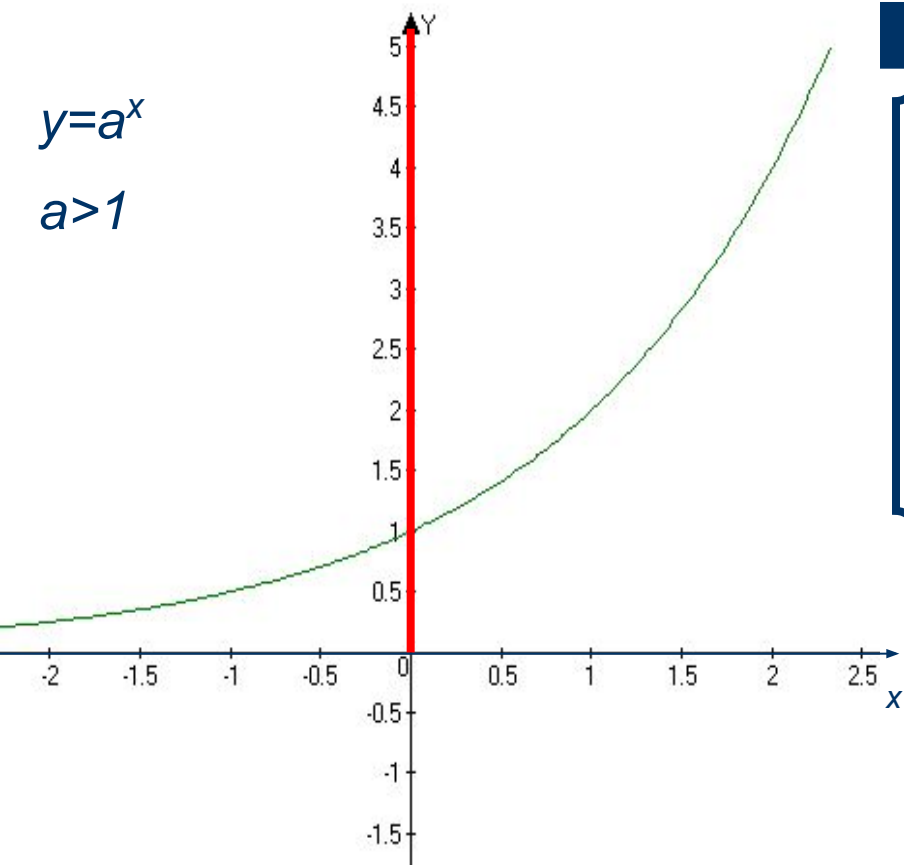
$$y=a^x$$
$$a>1$$



- Область определения – множество всех действительных чисел  
 $D(a^x) = \mathbf{R}$

# Свойства показательной функции $y=a^x$ при $a>1$

$$y=a^x$$
$$a>1$$

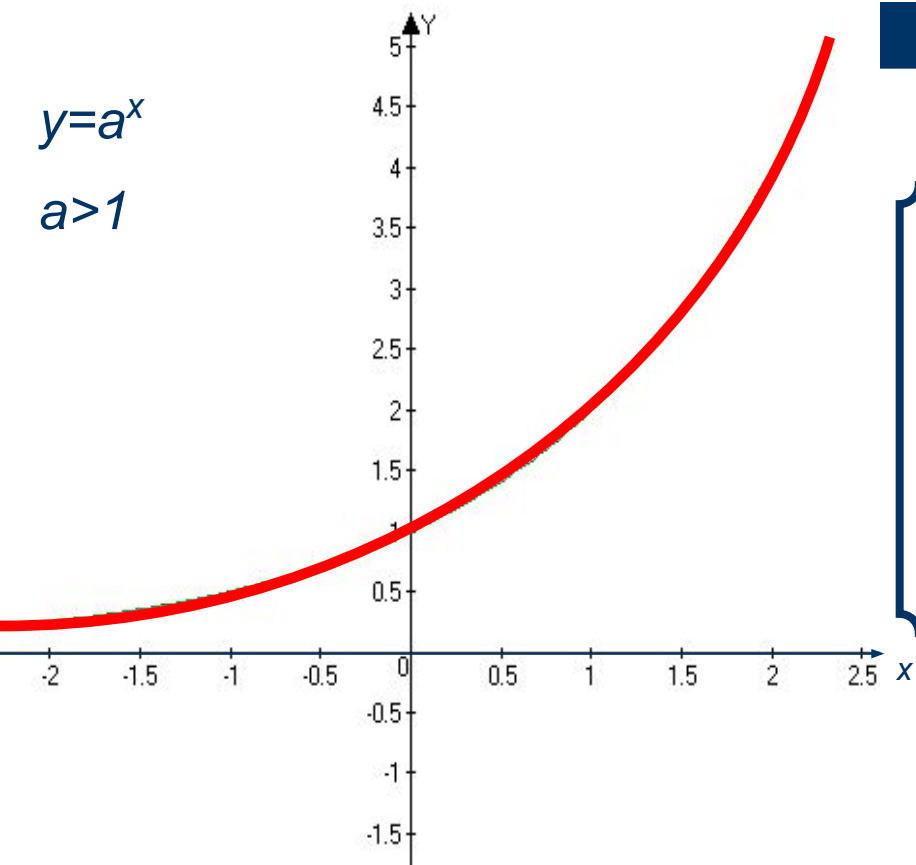


- Область значений – множество всех положительных чисел  
 $E(a^x) = \mathbf{R}_+$



# Свойства показательной функции $y=a^x$ при $a>1$

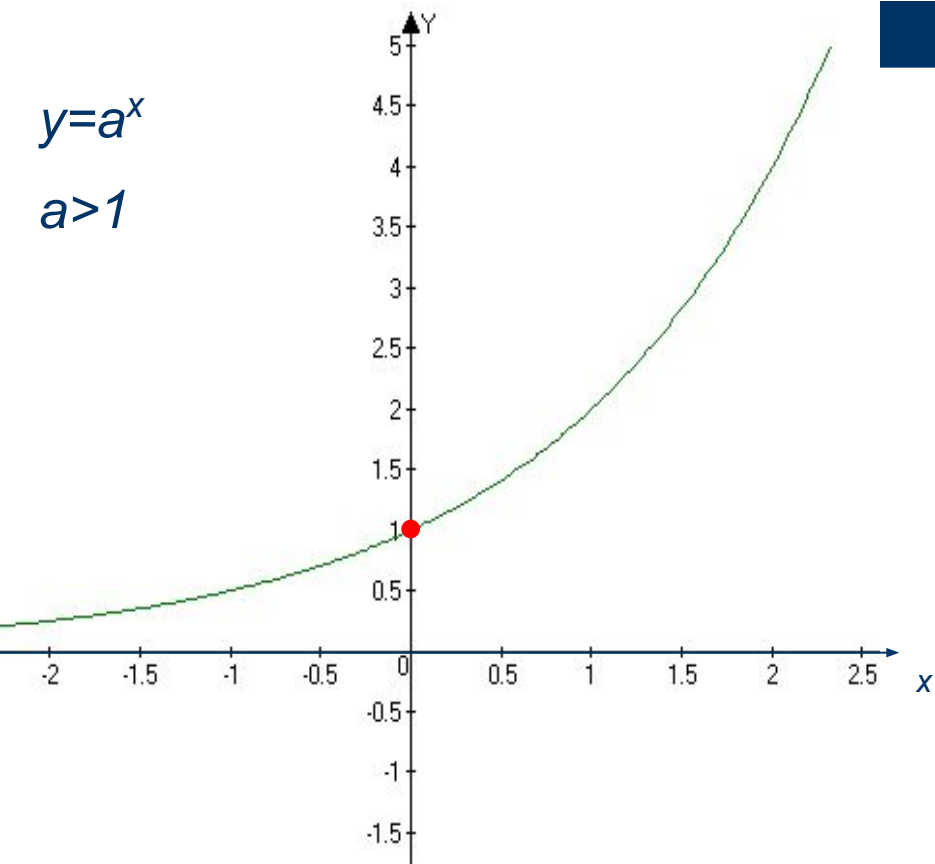
$$y=a^x$$
$$a>1$$



- Функция возрастает на всей области определения

# Свойства показательной функции $y=a^x$ при $a>1$

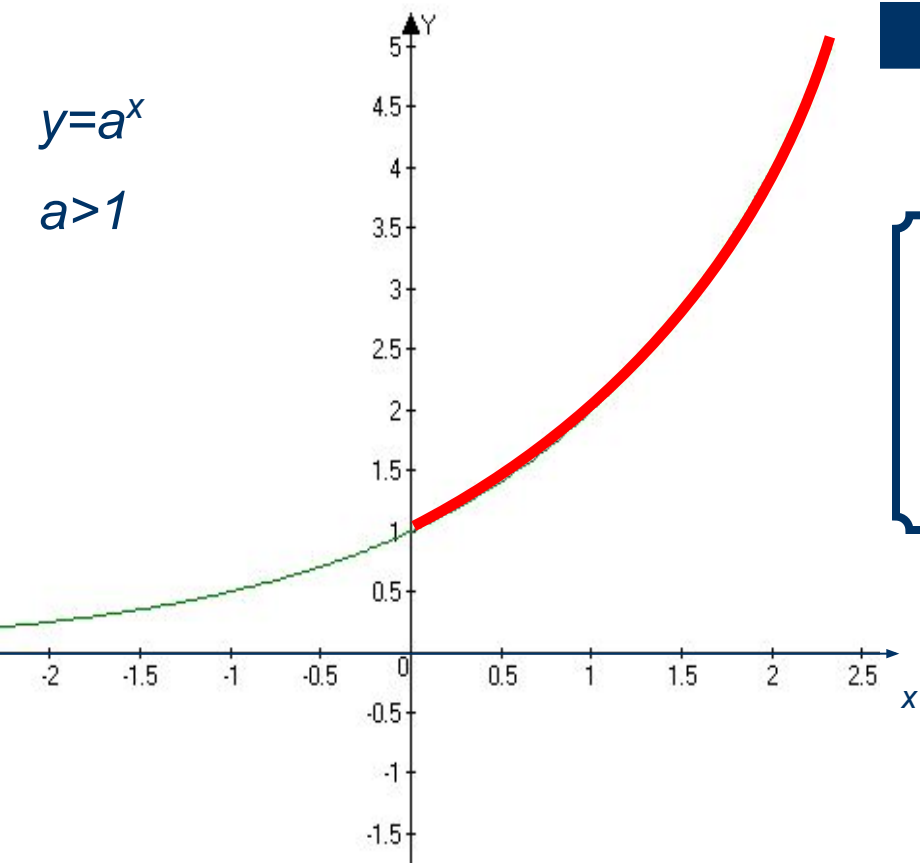
$$y=a^x$$
$$a>1$$



- При  $x=0$  значение функции равно 1

# Свойства показательной функции $y=a^x$ при $a>1$

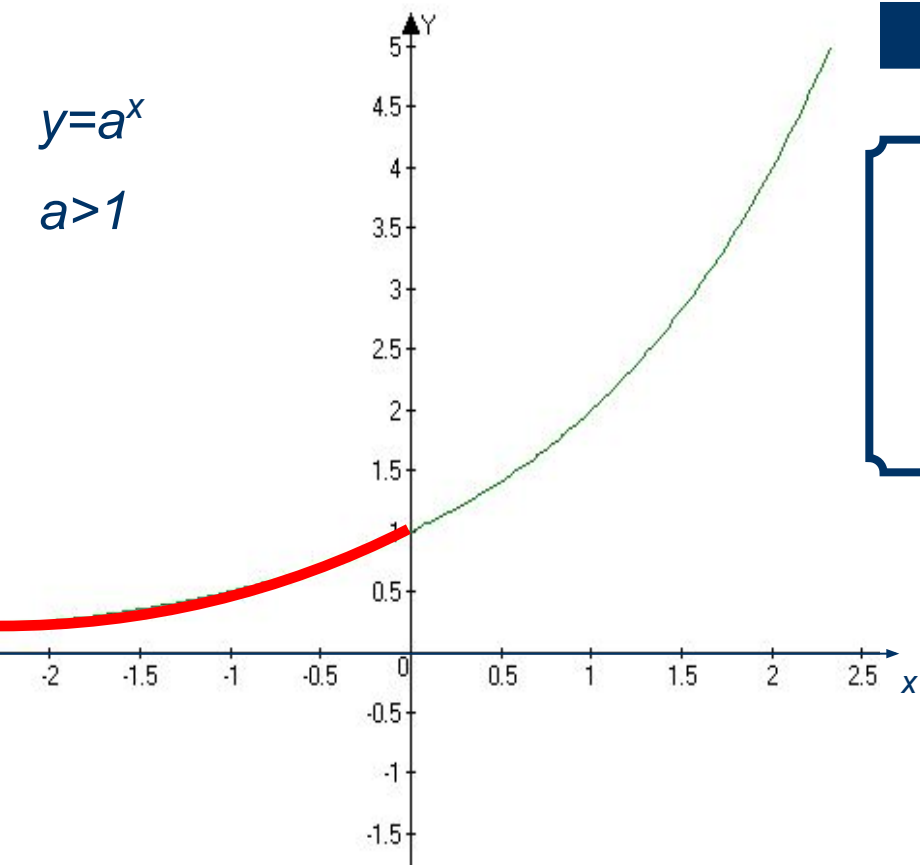
$y=a^x$   
 $a>1$



- Если  $x>0$ , то  $a^x>1$

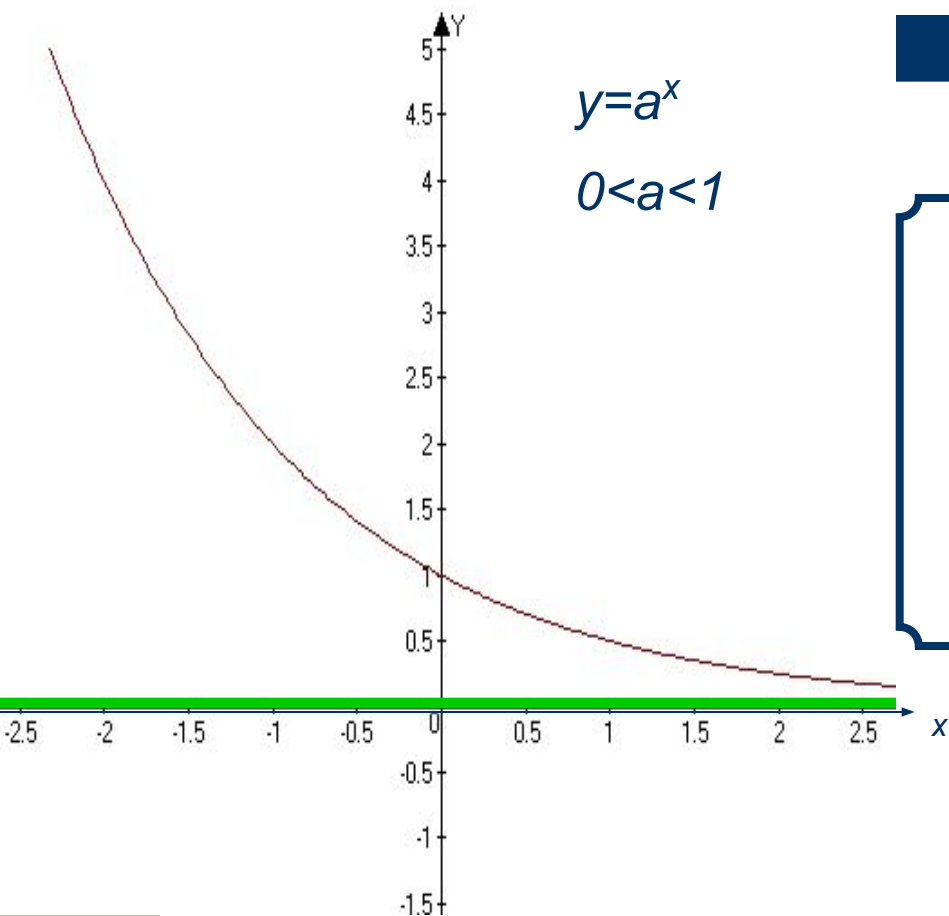
# Свойства показательной функции $y=a^x$ при $a>1$

$$y=a^x$$
$$a>1$$



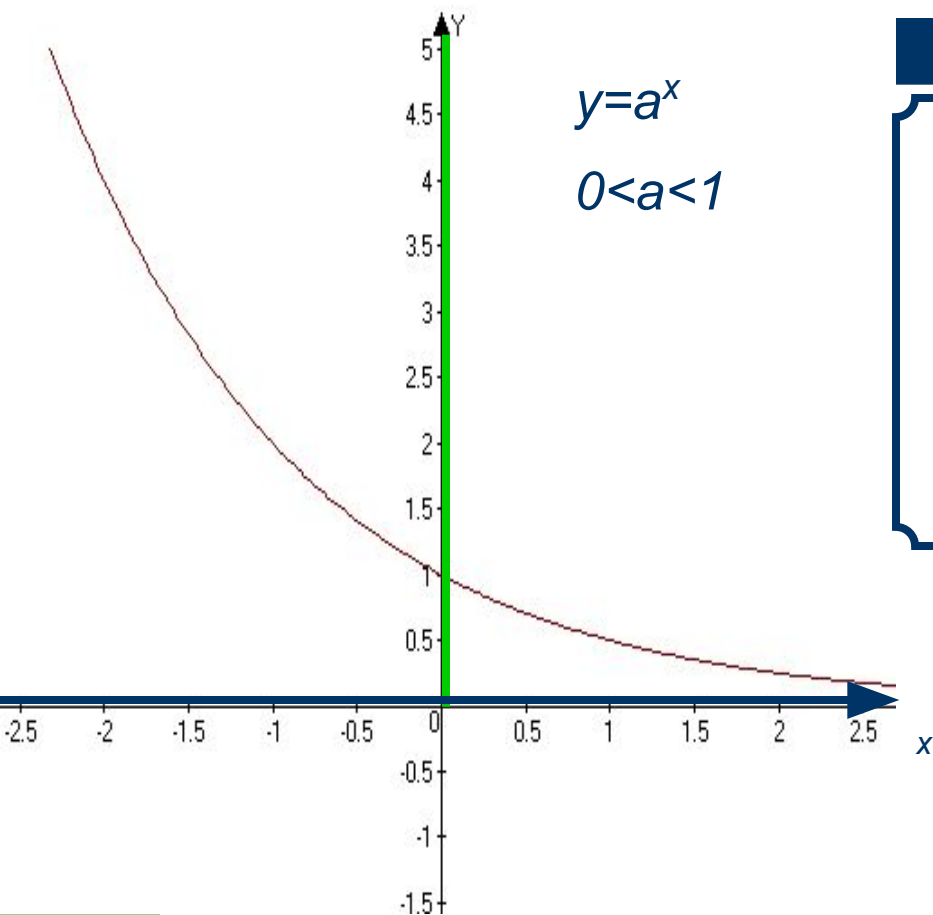
- Если  $x < 0$ , то  $0 < a^x < 1$

# Свойства показательной функции $y=a^x$ при $0 < a < 1$



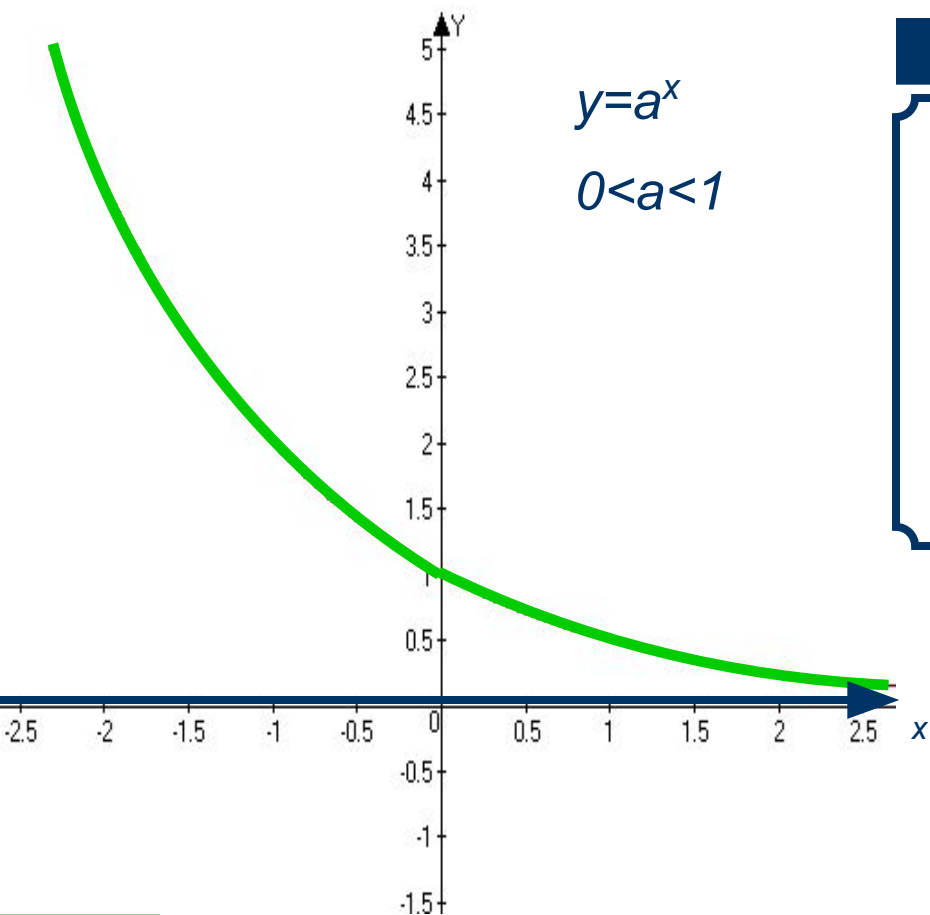
- Область определения – множество всех действительных чисел  
 $D(a^x) = \mathbf{R}$

# Свойства показательной функции $y=a^x$ при $0 < a < 1$



- Область значений – множество всех положительных чисел  
 $E(a^x) = \mathbf{R}_+$

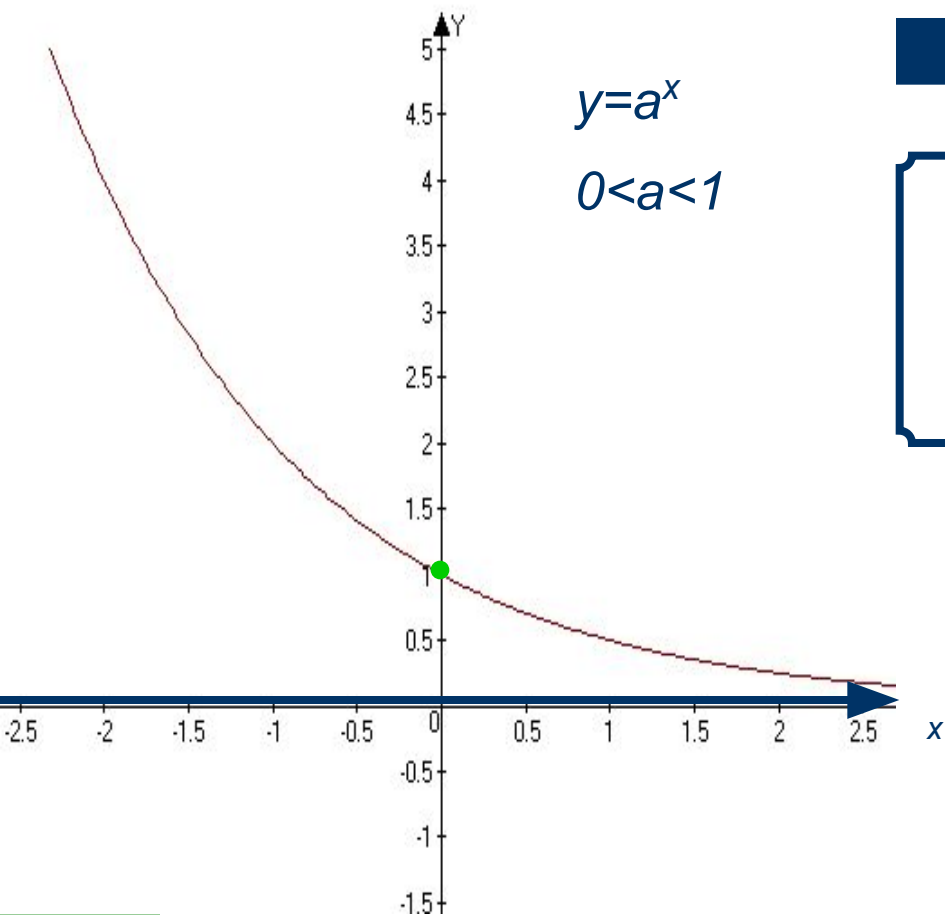
# Свойства показательной функции $y=a^x$ при $0 < a < 1$



$$y = a^x$$
$$0 < a < 1$$

- Функция убывает на всей области определения

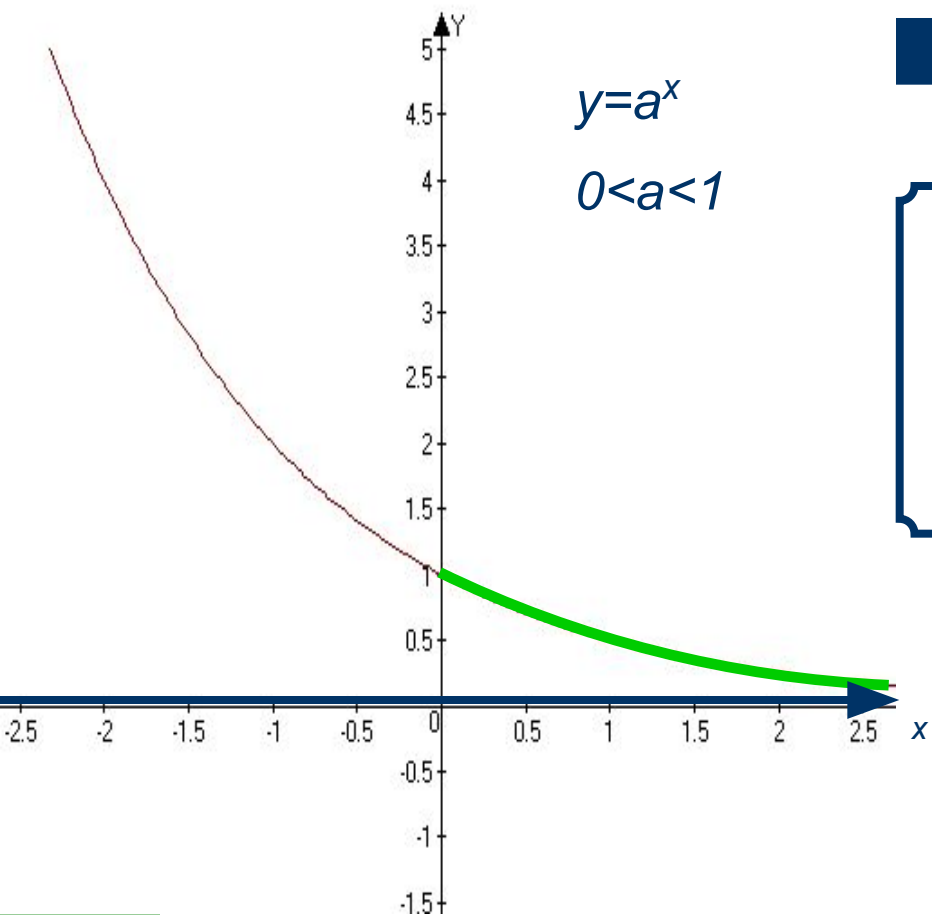
# Свойства показательной функции $y=a^x$ при $0 < a < 1$



- При  $x=0$  значение функции равно 1



# Свойства показательной функции $y=a^x$ при $0 < a < 1$

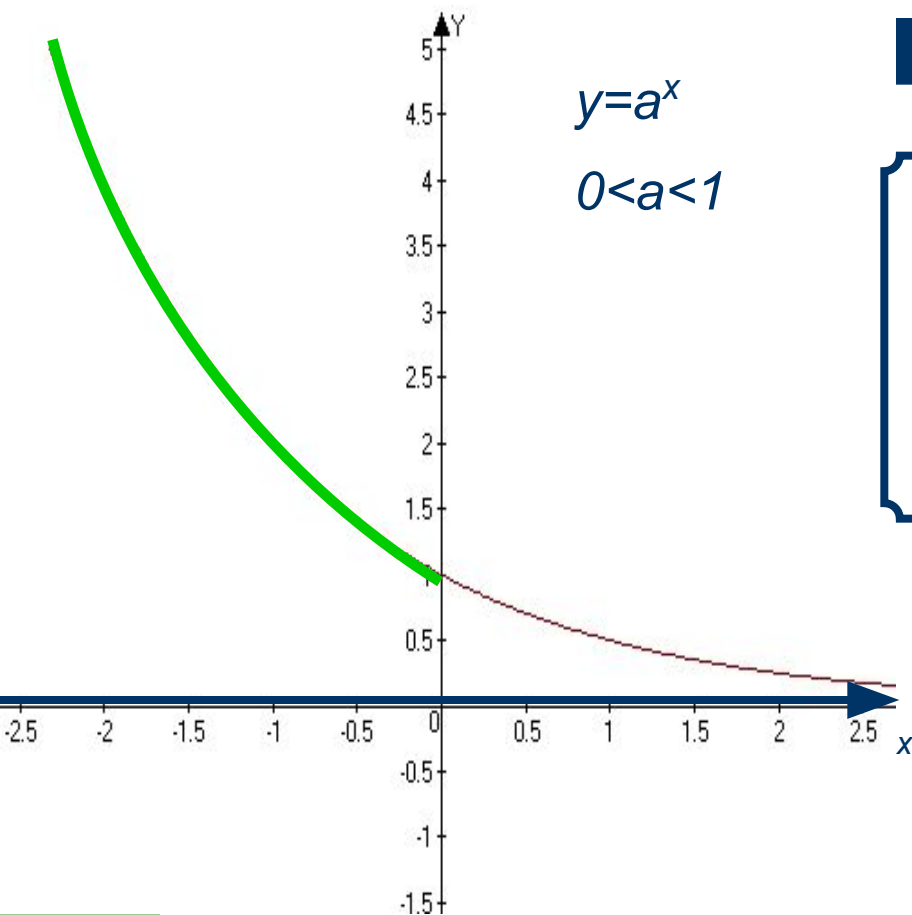


$$y = a^x$$

$$0 < a < 1$$

- Если  $x > 0$ , то  $0 < a^x < 1$

# Свойства показательной функции $y=a^x$ при $0 < a < 1$



$$y = a^x$$

$$0 < a < 1$$

- Если  $x < 0$ , то  $a^x > 1$

# Показательные уравнения

$$a^x = b$$

*Если*

$$b = a^m,$$

*то*

$$a^x = a^m$$

*и*

$$x = m$$

*Если*

$$b > 0,$$

*то*

$$a^x = b \Leftrightarrow$$

$$x = \log_a b$$

*Если*

$$b < 0,$$

*то*

$$a^x = b$$

**не  
имеет  
корней**

# Показательные неравенства

$$a^x \succ b; \quad a^x \geq b; \quad a^x \prec b; \quad a^x \leq b.$$

Если  $0 < a < 1$

1.  $a^x \succ b$ , где  $b = a^m \Leftrightarrow a^x \succ a^m \Leftrightarrow x \prec m$
2.  $a^x \leq b$ ,  $b \neq a^m$ ,  $b > 0 \Leftrightarrow x \geq \log_a b$
3.  $a^x \leq b$ , если  $b < 0$ , то **не имеет решения**
4.  $a^x \succ b$ , если  $b < 0$ , то  $x \in R$

Если  $a > 1$

1.  $a^x \succ b$ , где  $b = a^m \Leftrightarrow x \succ m$
2.  $a^x \leq b$ , где  $b \neq a^m$ ,  $b > 0 \Leftrightarrow x \leq \log_a b$

# Производная и первообразная

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

# Тест 1

Проверь себя!

- |     |      |          |
|-----|------|----------|
| 1.  | Да.  | 11. Да.  |
| 2.  | Нет. | 12. Да.  |
| 3.  | Нет. | 13. Да.  |
| 4.  | Да.  | 14. Нет. |
| 5.  | Да.  | 15. Да.  |
| 6.  | Да.  | 16. Да.  |
| 7.  | Да.  | 17. Да.  |
| 8.  | Нет. | 18. Да.  |
| 9.  | Нет. | 19. Нет. |
| 10. | Нет. | 20. Да.  |



# Тест 2

## Проверь себя !

- |        |         |         |
|--------|---------|---------|
| 1. «-» | 8. «-»  | 15. «+» |
| 2. «-» | 9. «+»  | 16. «-» |
| 3. «+» | 10. «-» | 17. «+» |
| 4. «-» | 11. «+» | 18. «-» |
| 5. «+» | 12. «+» | 19. «-» |
| 6. «-» | 13. «+» | 20. «-» |
| 7. «+» | 14. «+» | 21. «+» |

18-21 правильных ответов – «5», 14-17 – «4», 11-13 – «3»,  
меньше 11 – не владеете материалом

# Основные опорные сигналы

$$1. \quad A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ \exists A, B \end{cases}$$

$$2. \quad \frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$$

$$3. \quad A \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ A = 0 \end{cases} \quad A \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A < 0 \\ A = 0 \end{cases}$$

$$4. \quad A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$5. \quad \sqrt{A^2} = B \Leftrightarrow |A| = B$$

$$9. \quad A^B = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A = 1 \\ \exists B \end{cases}$$

$$6. \quad |A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$$

$$7. \quad \sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \\ A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases} \quad \text{и}$$

$$\sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases}$$

$$8. \quad \frac{A}{B} \leq \frac{A}{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq C \\ B \neq 0, C \neq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A < 0 \\ B \leq C < 0 \end{cases}$$



# Способы решения уравнений

- Разложение левой части на множители.
- Замена переменной.
- Функциональный (с помощью свойств функции).
- Однородные (делением обеих частей на выражение не равное нулю)
- Графический.
- Логарифмирование.

# Проверь себя! Тест 3, часть 1

1. Опора 9 , функциональный способ
2. Опора 1 , функциональный способ
3. Опора 8 , замена переменной, функциональный способ
4. Опора 3 , функциональный способ, метод интервалов
5. Опора 6 , однородные уравнения
6. Опора 2 , замена переменной, разложение на множители
7. - замена переменной, метод интервалов
8. Опора 7 , функциональный способ
9. Опора 2 , замена переменной, функциональный способ
10. Опора 5 ,  $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$
11. Опора 1 , функциональный способ
12. - , графический способ
13. Опора 5 , геометрическая прогрессия
14. Опора 4 , функциональный способ
15. - , замена переменной, метод интервалов

# Указания к заданиям 16 - 19

16. Используйте основное свойство дроби и исследование решений линейного уравнения.

17.  $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$

18. Базовые знания – производная и первообразная показательной функции.

19. Записать данную функцию в виде степени с основанием 2. опереться на свойства показательной и квадратичной функций.

# Решите. Тест 3 (часть 2)

## Вариант 1.

Решите уравнение, в ответ запишите наименьший корень  $\left| x \right|^{\frac{\sin x}{\sqrt{5-x^2-4x}}} = 1$

## Вариант 2.

Решите уравнение, в ответ запишите корень или сумму корней

$$(3^x + 81) \cdot \sqrt{3^{|x|} - 9} \cdot \lg(4 - 3^x) = 0$$

## Вариант 3.

Решите уравнение  $(2^{x^2-3x+2} - 4)^2 + (5^{x^2-x-6} - 1)^2 = 0$

# Проверь себя!

## Вариант 1

Решите уравнение. В ответ запишите наименьший корень  $\left| \tilde{0} \sqrt{\frac{\sin x}{5-x^2-4x}} = 1 \right.$ .

Решение.

$$\left| x \sqrt{\frac{\sin x}{5-x^2-4x}} = 1 \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x| = 1 \\ -x^2 - 4x + 5 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq \pm 1 \\ x^2 + 4x - 5 < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pm 1 \\ -5 < x < 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \\ \sin x = 0 \\ x^2 + 4x - 5 < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \\ x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -5 < x < 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\pi \end{array} \right.$$

$\pi$

Ответ: -

# Проверь себя!

## Вариант 2

Решите  
уравнение.

$$(3^x + 81) \cdot \sqrt{3^{|x|} - 9} \cdot \lg(4 - 3^x) = 0.$$

Решение. Так как  $3^x + 81 > 0$  при любых  $x$ ,  
то

$$(3^x + 81) \cdot \sqrt{3^{|x|} - 9} \cdot \lg(4 - 3^x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{|x|} - 9 = 0 \\ 4 - 3^x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ 3^x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$
  
$$\begin{cases} 4 - 3^x = 1 \\ 3^{|x|} - 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3 \\ 3^{|x|} \geq 3^2 \end{cases}$$

Ответ: -2

# Проверь себя!

## Вариант 3

Решите уравнение.  $(2^{x^2-3x+2} - 4)^2 + (5^{x^2-x-6} - 1)^2 = 0.$

Решение  $(2^{x^2-3x+2} - 4)^2 + (5^{x^2-x-6} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-3x+2} - 4 = 0 \\ 5^{x^2-x-6} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-3x+2} = 2^2 \\ 5^{x^2-x-6} = 5^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x^2 - x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -2 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Ответ:

3