Лекции по алгебре и началам анализа

11 класс

Лекция №5

Показательные и логарифмические неравенства

1. Показательные неравенства

1.1. Решение простейших показательных неравенств

Простейшими показательными неравенствами называются неравенства вида

$$a^x > b,\ a^x \geq b,\ a^x < b,\ a^x \leq b, \quad где\ a > 0, a \neq 1$$

Рассмотрим решение неравенства

$$a^x > b, \quad где\ a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a)\ a > 1, b > 0 \quad x \in (\log_a b; +\infty)$$

$$b)\ 1 < a < 0, b > 0 \quad x \in (-\infty; \log_a b)$$

$$c)\ a > 0, b < 0 \quad x \in R$$

Рассмотрим решение неравенства

$$a^x < b, \quad где\ a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a)\ a > 1, b > 0 \quad x \in (-\infty; \log_a b)$$

$$b)\ 1 < a < 0, b > 0 \quad x \in (\log_a b; +\infty)$$

$$c)\ a > 0, b < 0 \quad x \in \varnothing$$

1.2. Решение показательных неравенств вида

$$a^{f(x)} \vee a^{g(x)}, \quad где\ a > 0, a \neq 1$$

Рассмотрим решение неравенства

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}, \quad где\ a > 0, a \neq 1$$

Решение: $a)\ a > 1, \quad f(x) < g(x)$

$$b)\ 1 < a < 0, \quad f(x) > g(x)$$

Рассмотрим решение неравенства

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \quad где\ a > 0, a \neq 1$$

Решение: $a)\ a > 1, \quad f(x) > g(x)$

$$b)\ 1 < a < 0, \quad f(x) < g(x)$$

1.3. Решение показательных неравенств с помощью замены переменных

1.4. Решение сложных показательных неравенств

Сложными показательными неравенствами называются неравенства вида

$$f(x)^{g_1(x)} \vee f(x)^{g_2(x)}$$

Рассмотрим решение неравенства

$$f(x)^{g_1(x)} > f(x)^{g_2(x)}$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1 \\ g_1(x) > g_2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) < g_2(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (f(x)-1)\cdot(g_1(x)-g_2(x)) > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим решение неравенства

$$f(x)^{g_1(x)} \geq f(x)^{g_2(x)}$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 1 \\ g_1(x) \geq g_2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) \leq 1 \\ g_1(x) \leq g_2(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (f(x)-1)\cdot(g_1(x)-g_2(x)) \geq 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим решение неравенства

$$f(x)^{g_1(x)} < f(x)^{g_2(x)}$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1 \\ g_1(x) < g_2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) > g_2(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (f(x)-1)\cdot(g_1(x)-g_2(x)) < 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим решение неравенства

$$f(x)^{g_1(x)} \le f(x)^{g_2(x)}$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 1 \\ g_1(x) \le g_2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) \le 1 \\ g_1(x) \ge g_2(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (f(x)-1)\cdot(g_1(x)-g_2(x)) \le 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

2. Логарифмические неравенства

2.1. Решение простейших логарифмических неравенств

Простейшими логарифмическими неравенствами называются неравенства вида

$$\log_a x > b, \log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$$

$$где\ a > 0, a \neq 1$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_a x > b, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a)\ a > 1, \quad x \in (a^b; +\infty)$$

$$b)\ 1 < a < 0, \quad x \in (0; a^b)$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_a x < b, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a)\ a > 1, \quad x \in (0; a^b)$$

$$b)\ 1 < a < 0, \quad x \in (a^b; +\infty)$$

2.2. Решение логарифмических неравенств вида

$$\log_a f(x) \vee \log_a g(x), \quad где\ a > 0, a \neq 1$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \quad где\ a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a)\ a > 1, \quad \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$b)\ 1 < a < 0, \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_a f(x) < \log_a g(x), \quad где\ a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a)\ a > 1, \quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$b)\ 1 < a < 0, \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

2.3. Решение логарифмических неравенств с помощью замены переменных

2.4. Решение сложных логарифмических неравенств

Сложными логарифмическими неравенствами называются неравенства вида

$$\log_{f(x)} g_1(x) \vee \log_{f(x)} g_2(x)$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_{f(x)} g_1(x) < \log_{f(x)} g_2(x)$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1 \\ g_1(x) < g_2(x) \\ g_1(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) > g_2(x) \\ g_2(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_{f(x)} g_1(x) \le \log_{f(x)} g_2(x)$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1 \\ g_1(x) \le g_2(x) \\ g_1(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) \ge g_2(x) \\ g_2(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_{f(x)} g_1(x) > \log_{f(x)} g_2(x)$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1 \\ g_1(x) > g_2(x) \\ g_2(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) < g_2(x) \\ g_1(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_{f(x)} g_1(x) \geq \log_{f(x)} g_2(x)$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1 \\ g_1(x) \geq g_2(x) \\ g_2(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) \leq g_2(x) \\ g_1(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$