Показательные уравнения

Учитель МБОУ «СОШ №31» г.Энгельса Волосожар М.И.

Показательные уравнения – это уравнения, содержащие переменную в показателе степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения вида $a^x = a^в$, где $a>0$, $a \neq 1$, x – неизвестное.

Эти уравнения решаются с помощью свойства степени: степени с одинаковыми основаниями $a>0$, $a \neq 1$ равны только тогда, когда равны их показатели.

Рассмотрим различные типы показательных уравнений и типы их решения.

1. **Решение уравнений с использованием свойств показательной функции:**

Пример 1. Решить уравнение

$$0{,}125 * 4^{2x-8} = \left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$$

Решение.

Так как 0,125=125/1000=1/8, 0,25=1/4 и $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, то уравнение примет вид:

$$\frac{1}{8} * \left(2^2\right)^{2x-8} = \left(\frac{1}{4} * 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x} \text{ или } 2^{-3} * 2^{4x-16} = \left(2^{-2} * 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x}$$

$$2^{-3+4x-16} = 2^{\frac{5}{2}x}$$

Т.к. 2>0, $2 \neq 1$, то –3+4x–16 =2,5x или 1,5x=19, 3x=38, x= $\frac{38}{3}$

ОТВЕТ: x= $\frac{38}{3}$

2. **Решение уравнений, сводящихся к квадратным**

Пример 2. Решить уравнение

$$2^{\sin^2 x} + 4 * 2^{\cos^2 x} = 6$$

Решение.

Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то уравнение запишется в виде

$$2^{\sin^2 x} + 4 * 2^{1-\sin^2 x} = 6 \quad \text{или} \quad 2^{\sin^2 x} + \frac{8}{2^{\sin^2 x}} = 6$$

Пусть $2^{\sin^2 x} = t$, $t > 0$, тогда получим $t + \frac{8}{t} = 6$ или $t^2 - 6t + 8 = 0$, откуда t=2, t=4. Имеем два уравнения:

1. $2^{\sin^2 x} = 2$, $\sin^2 x = 1$, $\cos^2 x = 0$, $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$
2. $2^{\sin^2 x} = 4$, $\sin^2 x = 2$, нет корней, так как $|\sin x| \le 1$

ОТВЕТ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$

3. **Решение уравнений вынесением общего множителя за скобку**

Пример 3. Решить уравнение

$$5^{2x+1} - 3 * 5^{2x-1} = 110$$

Решение.

Вынесем за скобку 5^{2x-1} - степень с наименьшим показателем.

$$5^{2x-1}\left(5^2 - 3\right) = 110, \quad 5^{2x-1} * 22 = 110, \quad 5^{2x-1} = 5 \text{ или } 2x - 1 = 1$$

2x– 1=1, x=1

ОТВЕТ: x=1

4. Решение показательных уравнений логарифмированием обеих частей

Пример 4. Решить уравнение

$$16^{\frac{x-1}{x}} * 5^{x} = 100$$

Решение.

Прологарифмируем данное уравнение по основанию 5 (или 2).

Следует заметить, что можно, вообще говоря, логарифмировать по любому основанию, но не совсем удачный выбор основания может привести к громоздким вычислениям.

Имеем:

$$x + 4 * \frac{x-1}{x} \log_5 2 = 2 + 2\log_5 2$$

или

$$x^2 + 4(x-1)\log_5 2 = 2x + 2x\log_5 2 \ ,$$

$$x^2 + 2x\log_5 2 - 2x - 4\log_5 2 = 0 \ ,$$

$$x^2 + 2(\log_5 2 - 1)x - 4\log_5 2 = 0 \ ,$$

$$\frac{D}{4} = (\log_5 2 - 1)^2 + 4\log_5 2 = (\log_5 2 + 1)^2 \ ,$$

$$x_{1.2} = 1 - \log_5 2 \pm (\log_5 2 + 1)$$, откуда

$$x_1 = 2 \ ; \qquad x_2 = -2\log_5 2$$

ОТВЕТ: $2; -2\log_5 2$

5. **Решение уравнений с использованием свойства монотонности показательной функции.**

При решении некоторых типов показательных уравнений используются следующие свойства:

1. Если функция f возрастает (или убывает) на некотором промежутке, то на этом промежутке уравнение $f(x)=0$ имеет не более одного корня.

2. Показательное уравнение вида $a^x + b^x = (a+b)^x$,

где $a>0$, $b>0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$

имеет единственный корень $x=1$.

3. Сумма монотонно возрастающих (или монотонно убывающих) функций есть также функция монотонно возрастающая (монотонно убывающая).

Пример 5. Решить уравнение.

а) $2^x + 3^x = 35^{\frac{x}{3}}$ б) $5^x - 2^x = 3$

Решение.

а) Данное уравнение можно привести к виду $a^x - b^x = (a+b)^x$

Так как $2^x = 8^{\frac{x}{3}}$ и $3^x = 27^{\frac{x}{3}}$, то получим $8^{\frac{x}{3}} + 27^{\frac{x}{3}} = 35^{\frac{x}{3}}$

Очевидно, что x=3 – корень уравнения.

б) $5^x = 2^x + 3$ или $1 = 3*\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x$

Пусть $f' = 3*\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1$

Найдем $f'(x) = 3\ln\frac{1}{5}*\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x \ln\frac{2}{5} < 0$

Так как $f'(x) < 0$, то функция f(x) – монотонно убывающая, значит x=1 – единственный корень исходного уравнения.

ОТВЕТ: а) 3; б) 1

Спасибо за внимание !