Понятие бесконечной интегральной суммы. Интеграл.

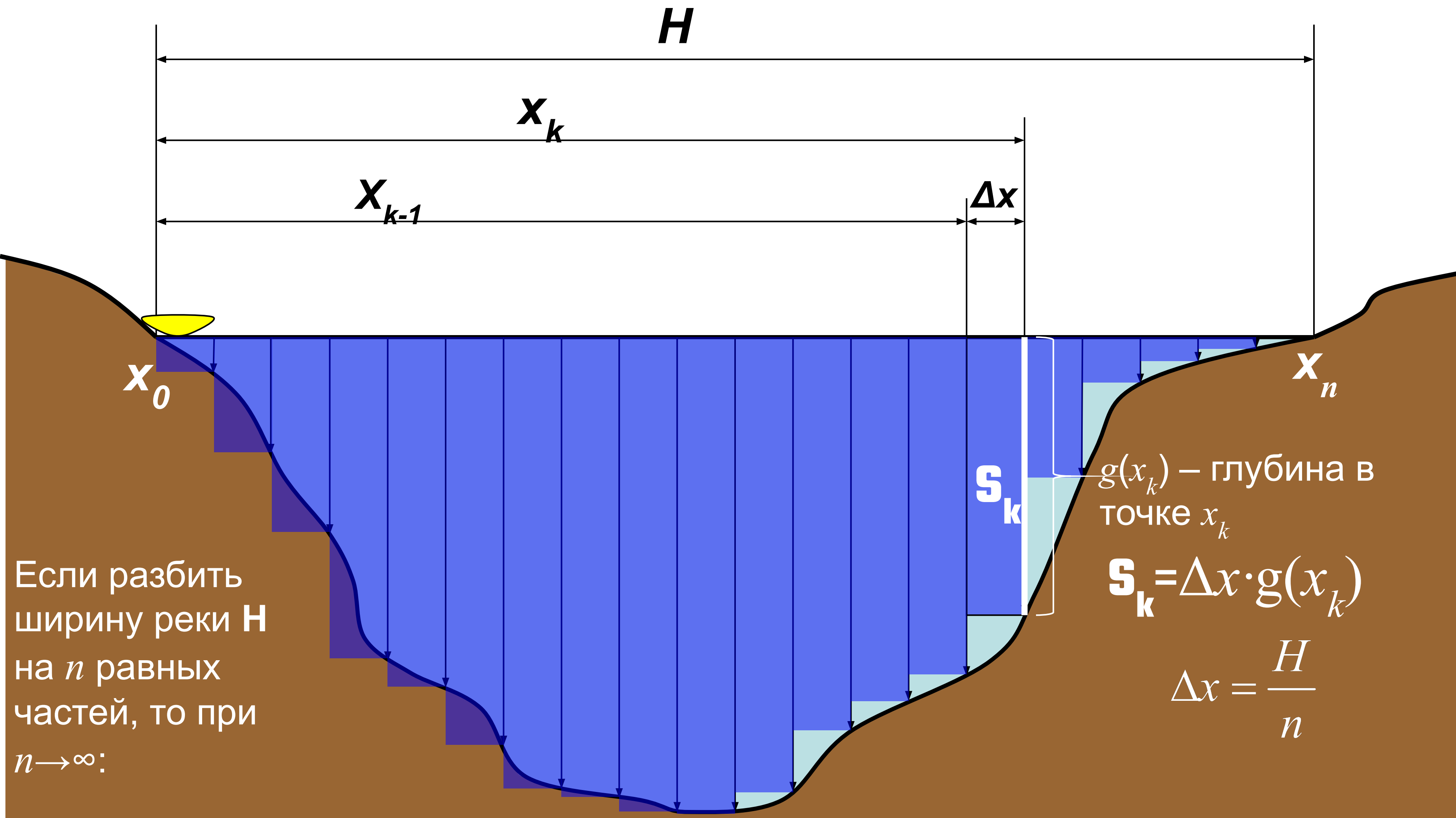
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$ – формула Ньютона-Лейбница

ãäå $F'(x) = f(x)$

Алгебра и начала анализа, 11 класс

Воробьев Леонид Альбертович , г.Минск

Вычисление площади сечения реки.



$g(x_k)$ – глубина в точке x_k

$$S_k = \Delta x \cdot g(x_k)$$

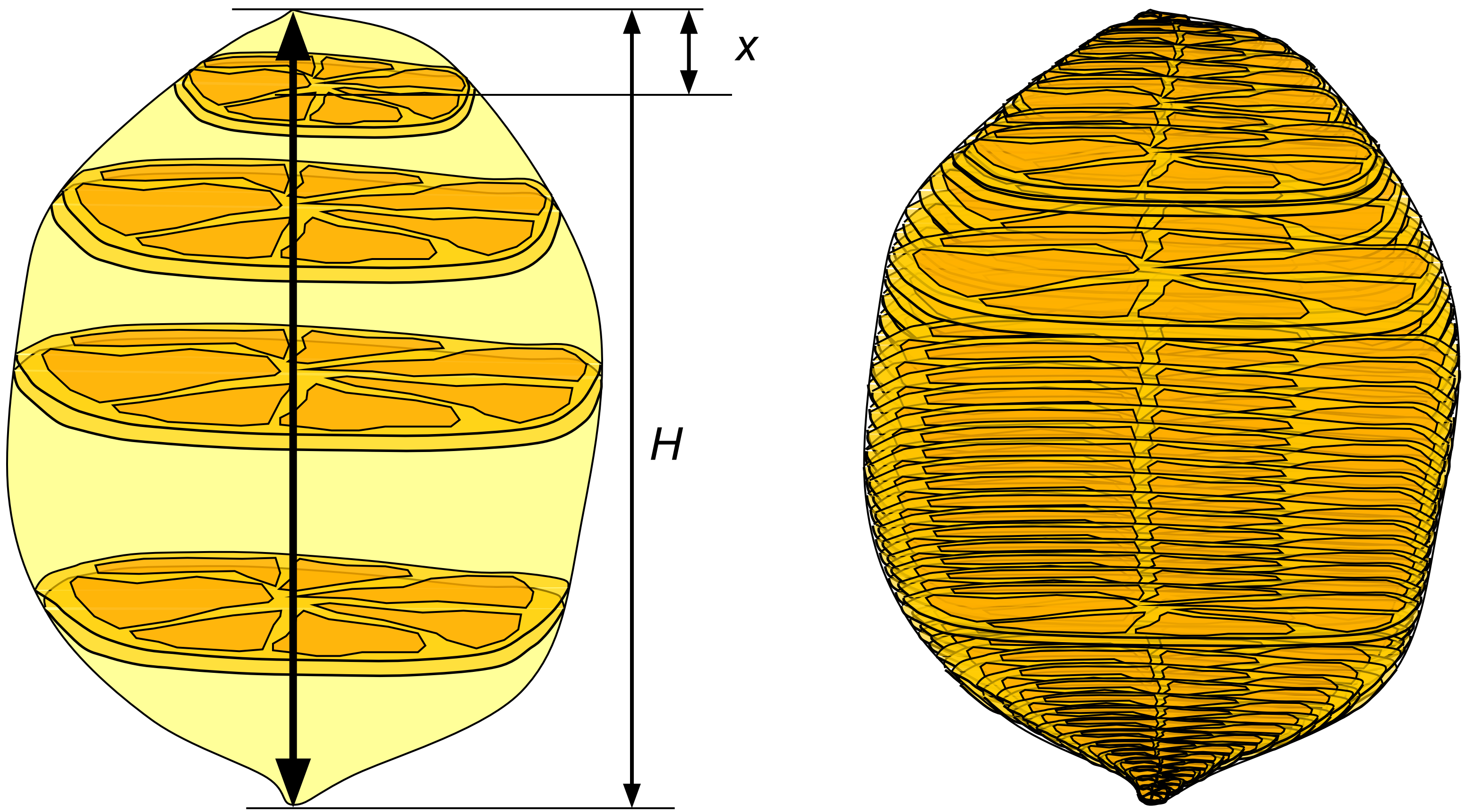
$$\Delta x = \frac{H}{n}$$

Если разбить ширину реки **H** на n равных частей, то при $n \to \infty$:

$$S_{\text{пл.}} \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \frac{H}{n}\left(g(x_1) + g(x_2) + \ldots + g(x_n)\right) = \Delta x \cdot g(x_1) + \Delta x \cdot g(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot g(x_n)$$

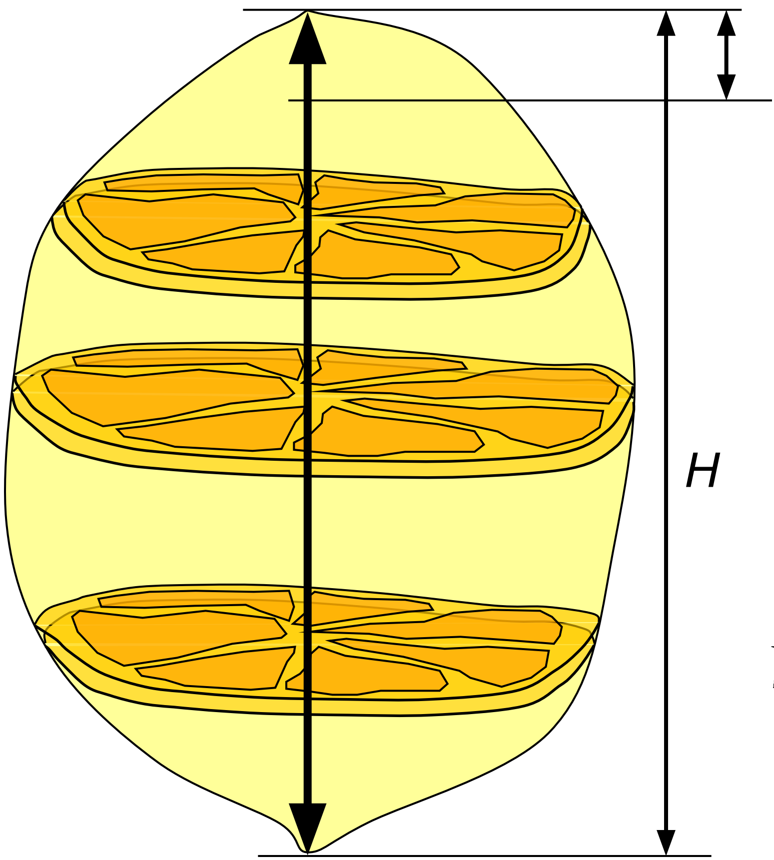
Последнее выражение в равенстве и есть **бесконечная интегральная сумма**.

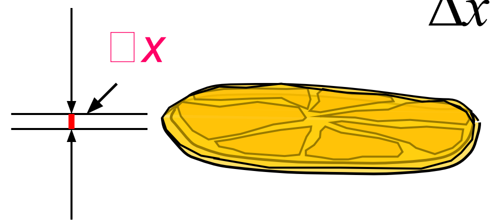
Чтобы получить представление об общем методе вычисления объемов различных пространственных фигур, попробуем найти объем лимона. Ни на одно из тел, изучаемых в школе (призма, пирамида, шар, конус и т.д.), лимон не похож. Однако, мы можем поступить как все хозяйки – разрезать лимон на тонкие ломтики, размер которых зависит от расстояния x, причем $x \in [0;H]$.



Тогда, по свойству объема, сумма объемов всех ломтиков даст нам объем всего лимона.

С точки зрения геометрии мы построили сечения пространственной фигуры плоскостями, <u>перпендикулярными</u> оси фигуры; причем, если принять число разбиений бесконечно большим числом (n→□), то:





$$\Delta x = \frac{H}{n} \to 0$$

$S_{сеч.}$

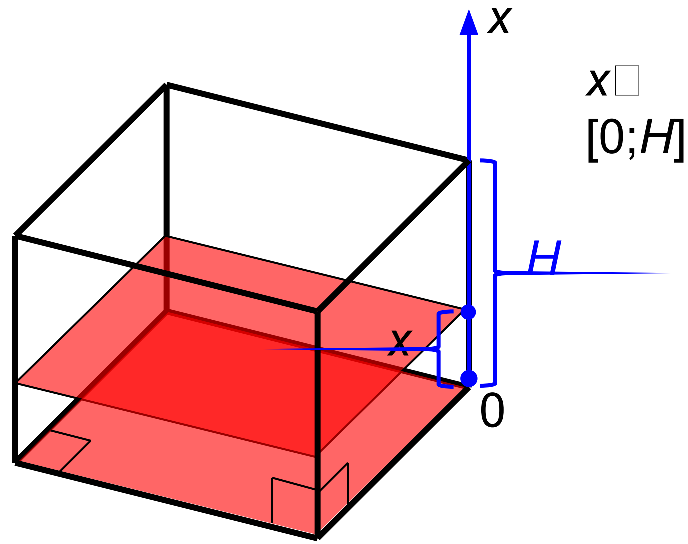
Проще говоря, при бесконечном числе разбиений каждый ломтик «вырождается» в плоское сечение и объем лимона равен **бесконечной интегральной сумме** площадей таких сечений, зависящих от расстояния *x*, т.е.

$$V_{ëčěîíŕ} \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$$

где *H* – высота тела, а $S_{сеч.}$ – некоторая функция, зависящая от *x*, причем *x*□[0;*H*].

Примечание. ∑ – так сокращенно обозначают знак суммы.

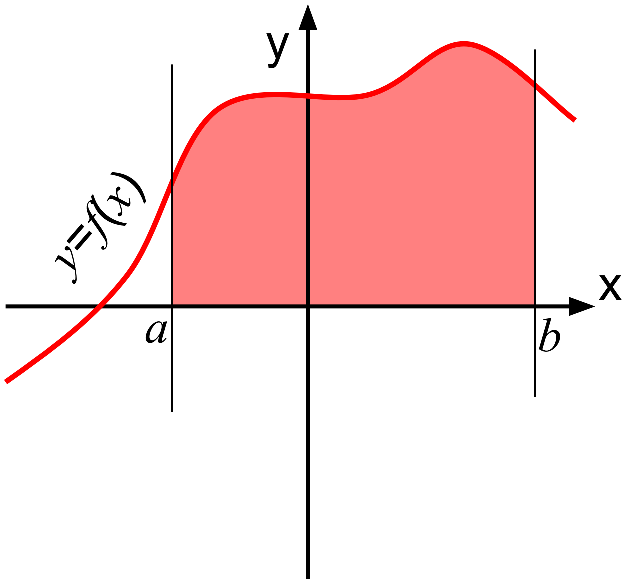
Применяя понятие бесконечной интегральной суммы попробуйте самостоятельно объяснить данный пример и вывод окончательной формулы объёма прямоугольного параллелепипеда (для проверки ☺):

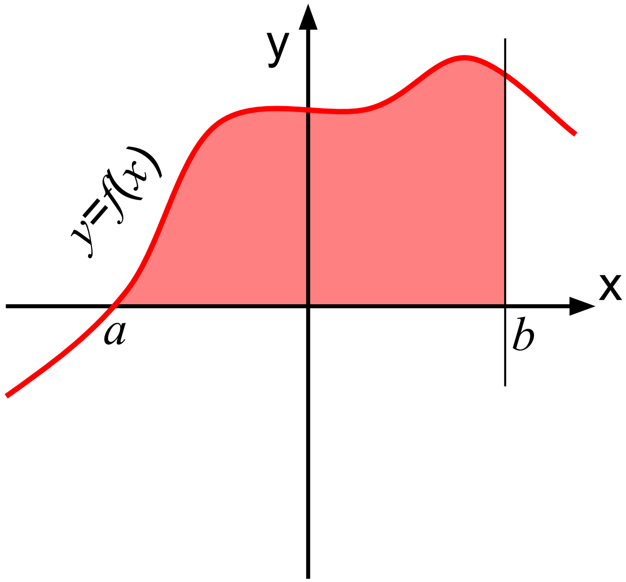


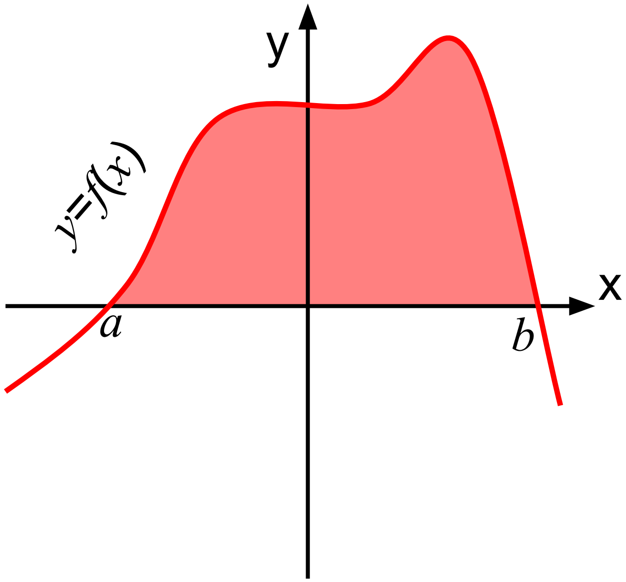
$$V_{пр.пар.}=(S_1+S_2+\ldots+S_n)\cdot\Delta x=n\cdot S_{осн.}\cdot\frac{H}{n}=S_{осн.}\cdot H$$

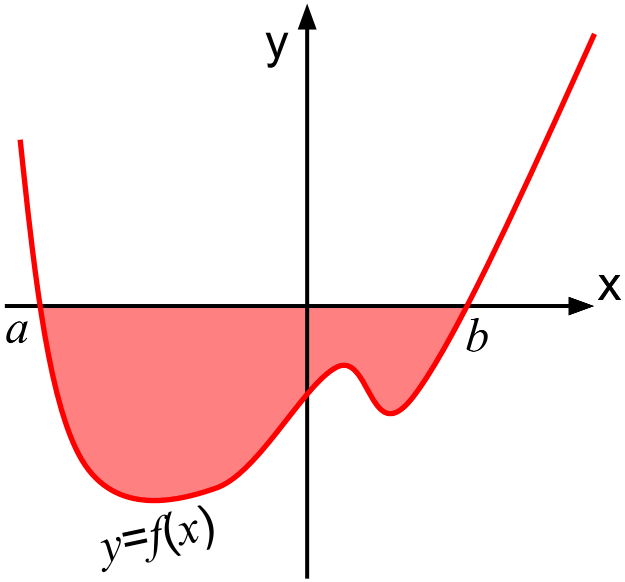
Объем прямоугольного параллелепипеда равен бесконечной интегральной сумме площадей сечения (равных площади основания) на промежутке [0; H] (взятых вдоль высоты).

Понятие о криволинейной трапеции.

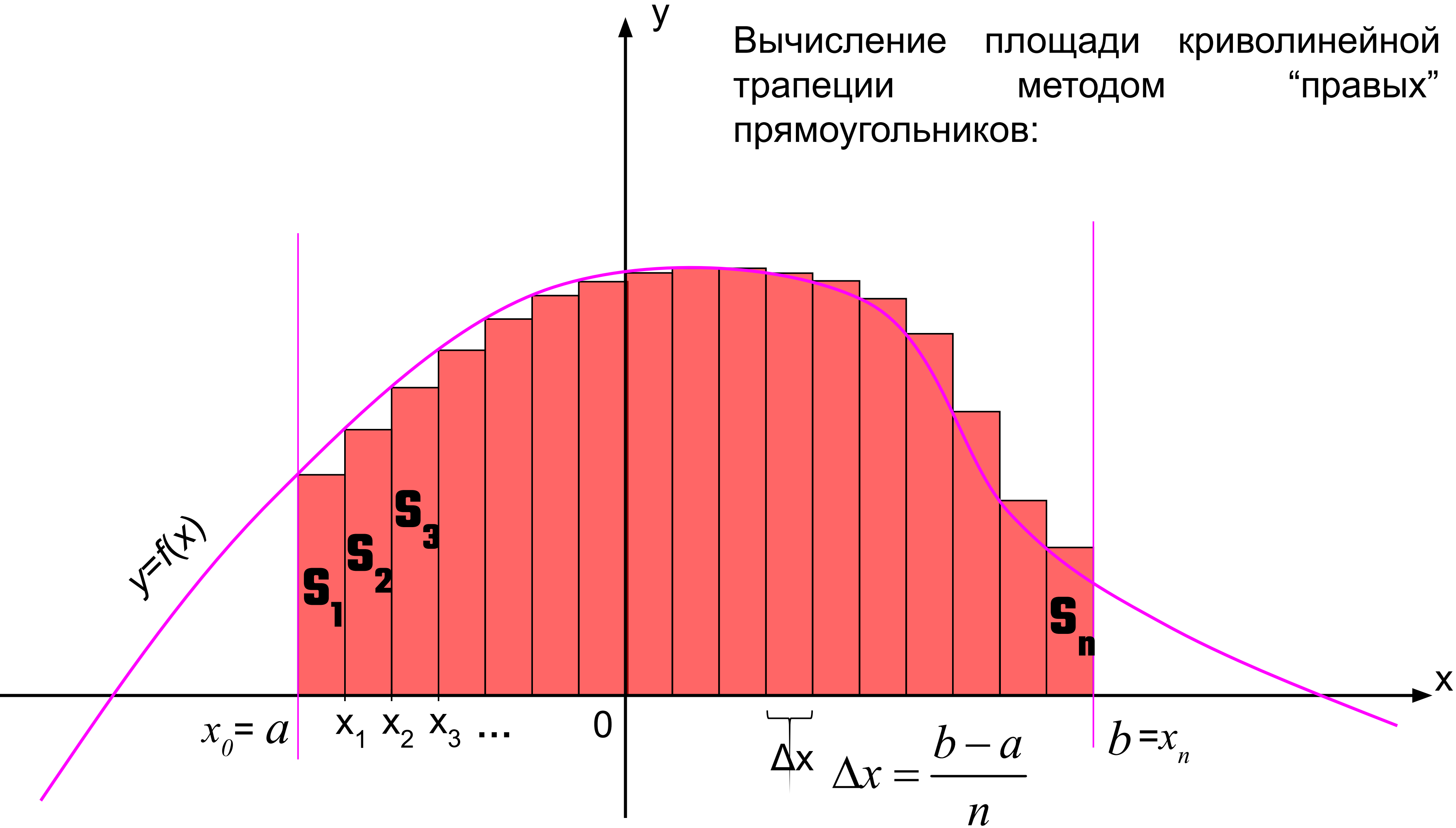








Вычисление площади криволинейной трапеции методом “правых” прямоугольников:

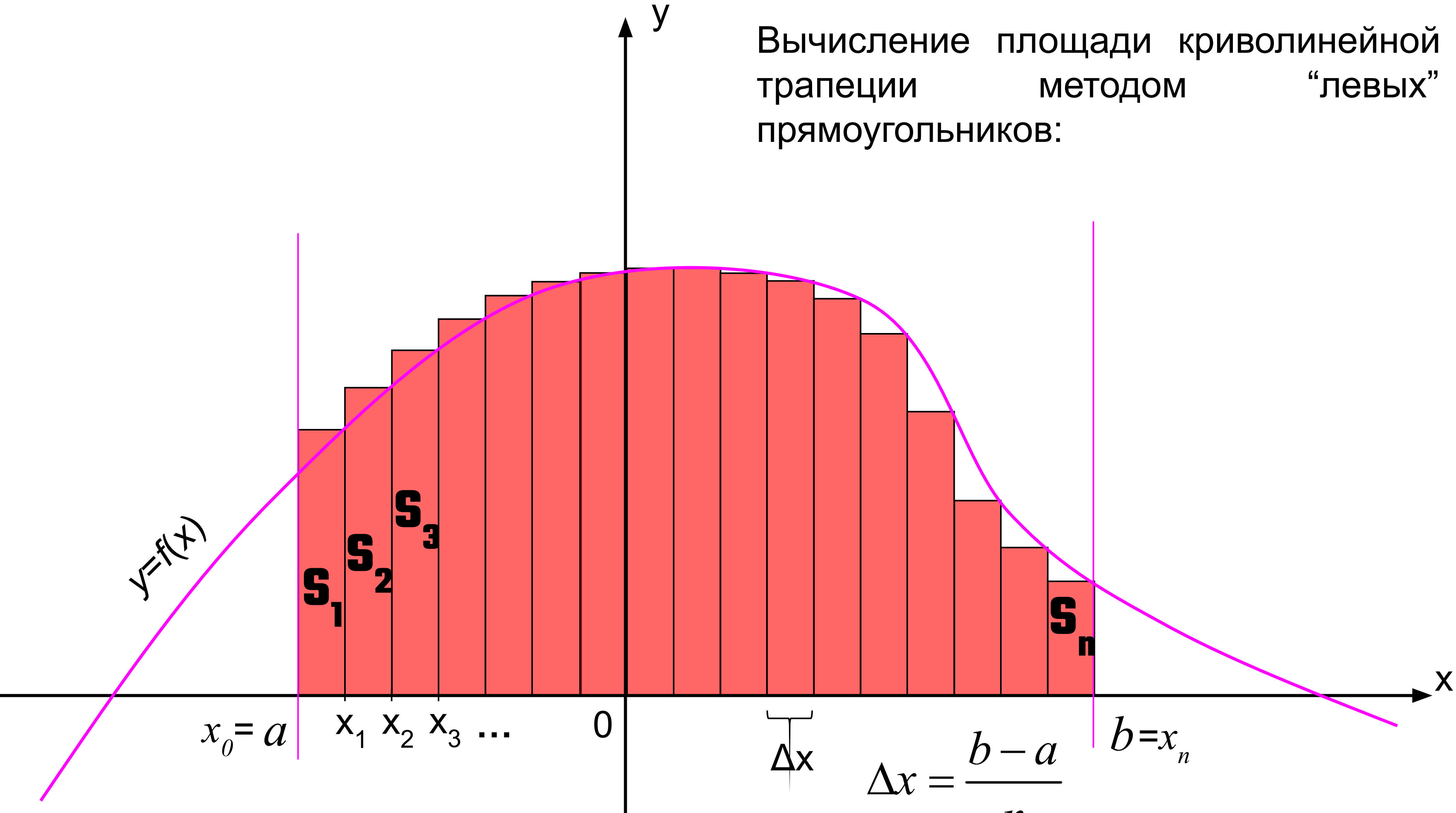


$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$S_{\hat{e}\check{\partial}.\grave{o}\,\check{\partial}.} \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \Delta x \cdot f\left(x_0\right) + \Delta x \cdot f\left(x_1\right) + \ldots + \Delta x \cdot f\left(x_{n-1}\right) =$$

$$= \Delta x \cdot \left(f\left(x_0\right) + f\left(x_1\right) + \ldots + f\left(x_{n-1}\right)\right) = \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k\right)$$

Вычисление площади криволинейной трапеции методом “левых” прямоугольников:

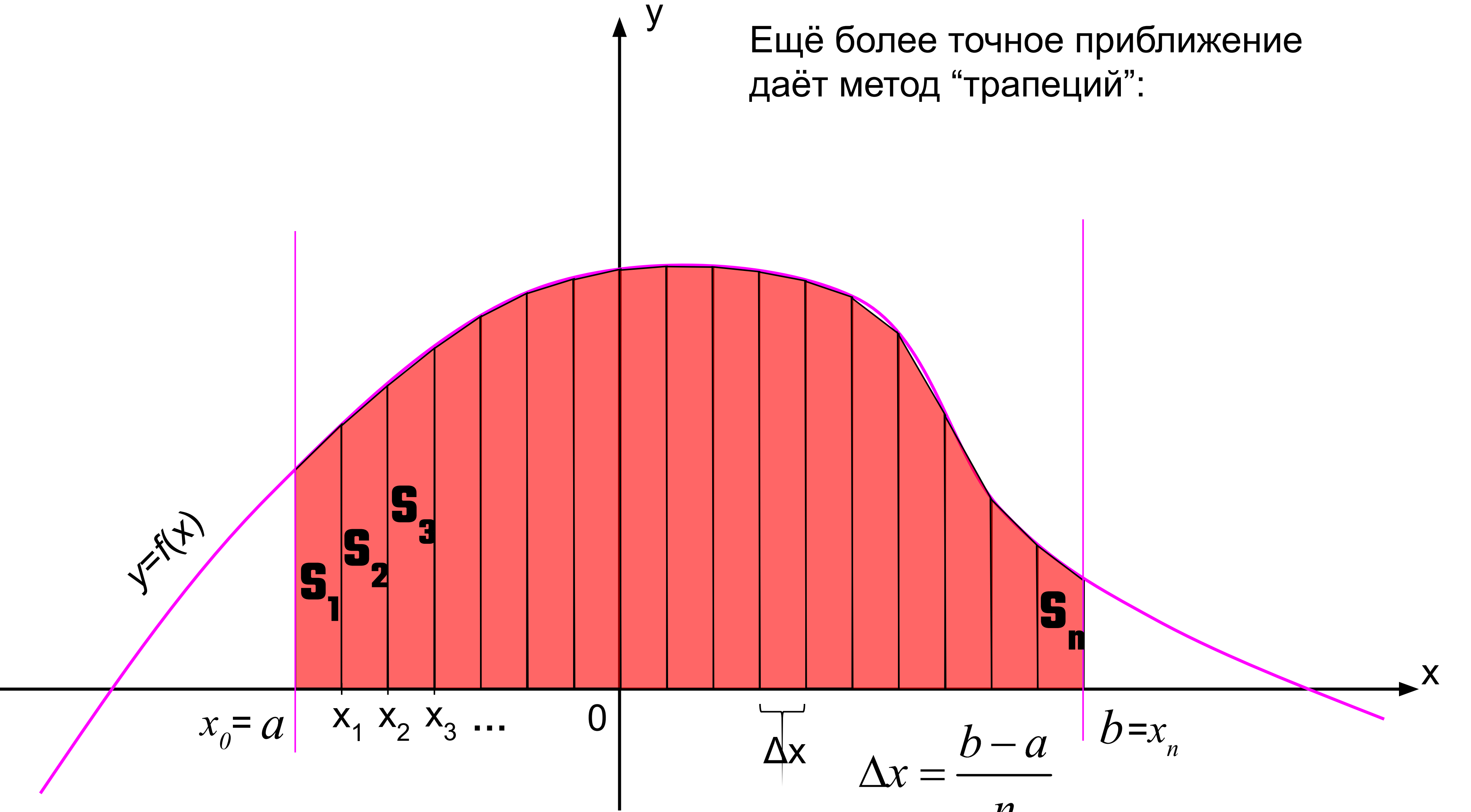


$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$S_{ęđ.ňđ.} \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \Delta x \cdot f\left(x_1\right) + \Delta x \cdot f\left(x_2\right) + \ldots + \Delta x \cdot f\left(x_n\right) =$$

$$= \Delta x \cdot \left(f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + \ldots + f\left(x_n\right)\right) = \Delta x \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)$$

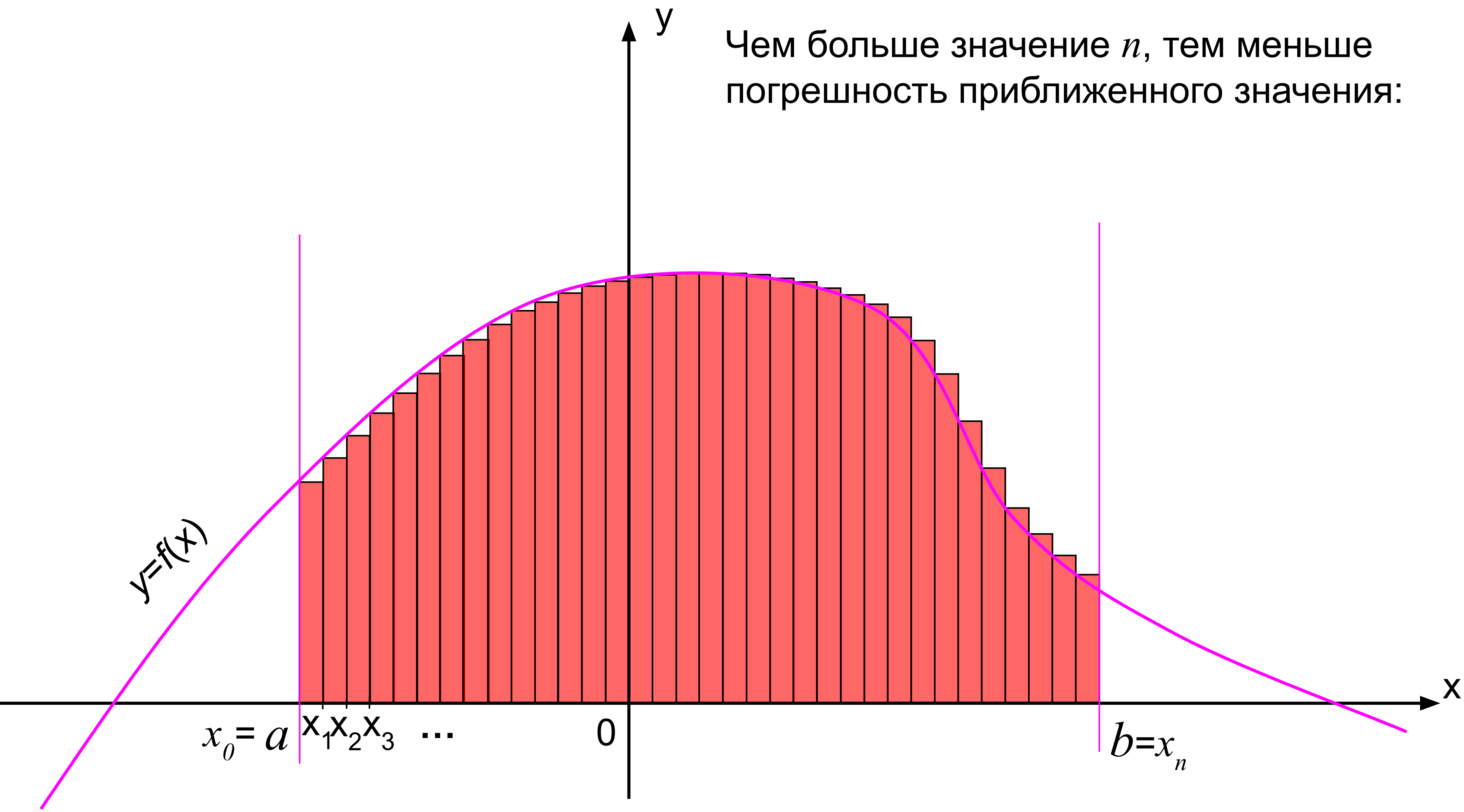
Ещё более точное приближение даёт метод “трапеций”:



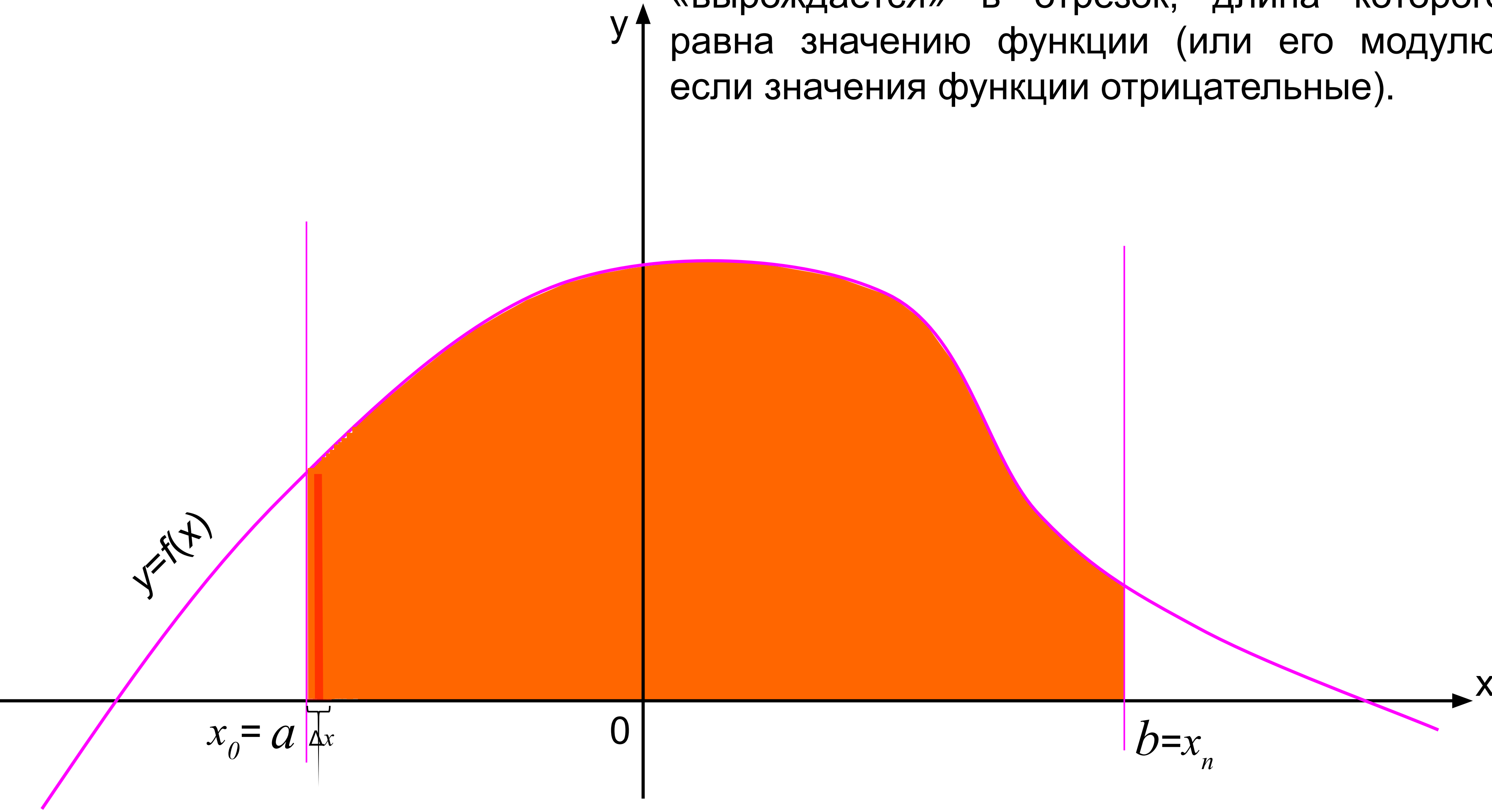
$$S_{ęđ.ň\,đ.} \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\cdot\Delta x + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot\Delta x + \ldots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\cdot\Delta x =$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right) = \frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}\cdot\Delta x\cdot\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$$

Чем больше значение n, тем меньше погрешность приближенного значения:



При $n \to \infty \Rightarrow \Delta x \to 0$ и каждый прямоугольник «вырождается» в отрезок, длина которого равна значению функции (или его модулю, если значения функции отрицательные).



Таким образом, площадь криволинейной трапеции равна **бесконечной интегральной сумме** значений данной функции на промежутке $[a; b]$.

В приведенном выше примере мы находили площадь криволинейной трапеции с помощью понятия **бесконечной интегральной суммы** значений данной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. В математике принята более короткая запись этого понятия – **интеграл** ($\int$), т.е.

$$\Delta x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} f\left(x_n\right) = \int_a^b f\left(x\right) dx$$

Читают: **интеграл от** $\boldsymbol{a}$ **до** $\boldsymbol{b}$ **эф от икс дэ икс.**

Число a называют *нижним пределом интегрирования*, b – *верхним пределом интегрирования*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, x – *переменной интегрирования*.

Примечание. Обратите внимание, что знак интеграла напоминает стилизованную букву **S**, что естественно из геометрического смысла этого понятия.

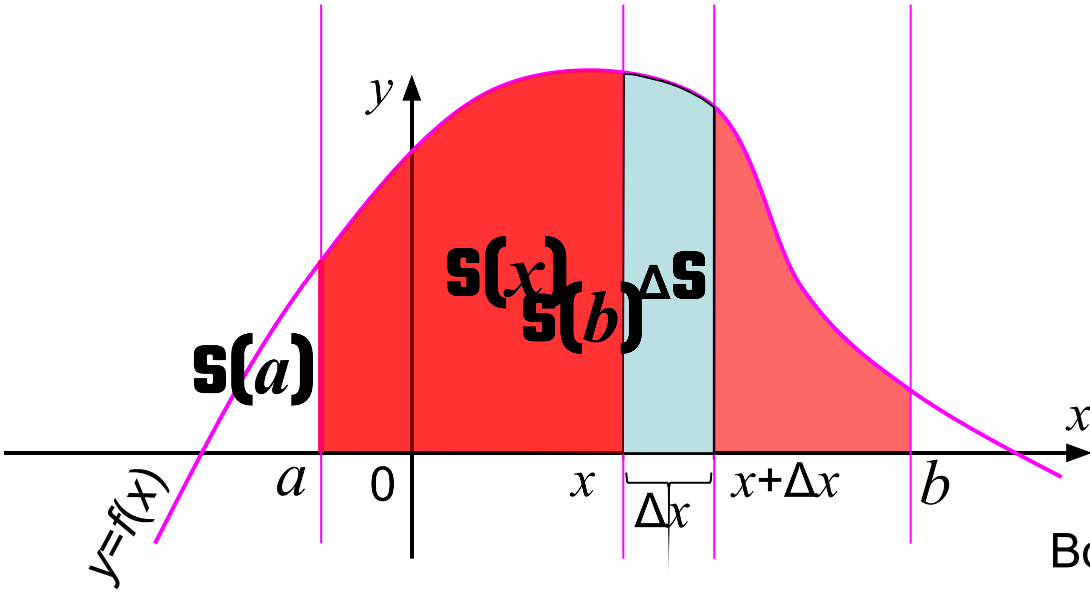
Если Вы владеете понятием предела (lim), то можно дать следующее определение интеграла:

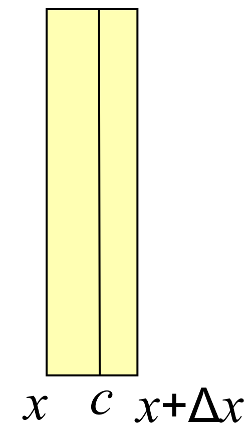
$$\int_a^b f\left(x\right) dx = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f\left(x_n\right) \cdot \Delta x\right)$$

, где $x_n \in [a; b]$.

Докажем теперь, что S$'(x)=f(x)$. Заметим, что S(a)=0, S(b)=S.

Выберем произвольный аргумент $x \in [a; b]$.





Возьмём теперь прямоугольник такой же площади **ΔS**, опирающийся на отрезок $[x; x+\Delta x]$.

В силу непрерывности функции f верхняя сторона прямоугольника пересекает график функции в некоторой точке с абсциссой $c \in [x; x+\Delta x]$. Высота прямоугольника равна $f(c)$. По формуле площади прямоугольника имеем:

$$\Delta S = f\left(c\right) \cdot \Delta x \Rightarrow f\left(c\right) = \frac{\Delta S}{\Delta x}$$

При $\Delta x \to 0$ ⇒ $c \to x$ и $f(c) \to f(x)$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f\left(x\right)$ или $S'(x)=f(x)$.

Вы уже знакомы с понятием первообрáзной функции. Доказанное нами утверждение $S'(x)=f(x)$ в силу основного свойства первообразных для всех $x\in[a;b]$ означает, что:

$$S(x)=F(x)+C,$$

где C – некоторая постоянная, а F – одна из первообразных для функции $f(x)$.

Для нахождения C подставим $x=a$:

$$F(a)+C=S(a)=0$$

$$F(a)=-C.$$

Следовательно, $S(x)=F(x)-F(a)$.

Поскольку площадь криволинейной трапеции равна $S(b)=S$, подставляя $x=b$, получим:

$$S=S(b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

Важно!!! понимать, что значение интеграла может получиться отрицательным (если, например, на заданном промежутке значения функции отрицательны).

Пример 1. $$\int_{-1}^{2}\left(2x^2-4x+2\right)dx=\left(\frac{2x^3}{3}-2x^2+2x\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{16}{3}-8+4-\left(-\frac{2}{3}-2-2\right)=6$$

Пример 2. $$\int_{0}^{2}\left(-4x-2\right)dx=\left(-2x^2-2x\right)\Big|_{0}^{2}=-8-4-0=-12$$

Отметим некоторые свойства интеграла (объясните их с помощью учителя):

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$, где $c\in[a;\, b]$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$, если $f(x)$ – нечётная функция

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{-a}^{0} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$, если $f(x)$ – чётная функция

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \qquad \int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$$, где $c\in$ □

Применение этих свойств часто упрощает вычисление интегралов.

Пример 3. Найти значение интеграла: $\int\limits_{-1{,}17}^{1{,}17} \left(5x^{11} - 7x^{7}\right) dx.$

Решение.