Ведение в Математический анализ – часть математики, в которой функции и их обобщения изучаются с помощью пределов.

§ Понятие функции

Основные понятия

Пусть X, Y – множества произвольной природы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если* $\forall x \in X$ *поставлен в соответствие* ***единственный*** *элемент* $y \in Y$, *то говорят, что на множестве* X *задана* ***функция*** *(****отображение****) с множеством значений* Y.

Записывают: $f: X \to Y, \quad y = f(x)$

(где f – закон, осуществляющий соответствие)

Называют: X – область (множество) определения функции

x $(x \in X)$ – аргумент (независимая переменная)

Y – область (множество) значений

y $(y \in Y)$ – зависимая переменная (функция)

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

1) словесный;
2) табличный;
3) графический;

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Графиком функции*** $y = f(x)$ *называется геометрическое место точек плоскости с координатами* $(x; f(x))$.

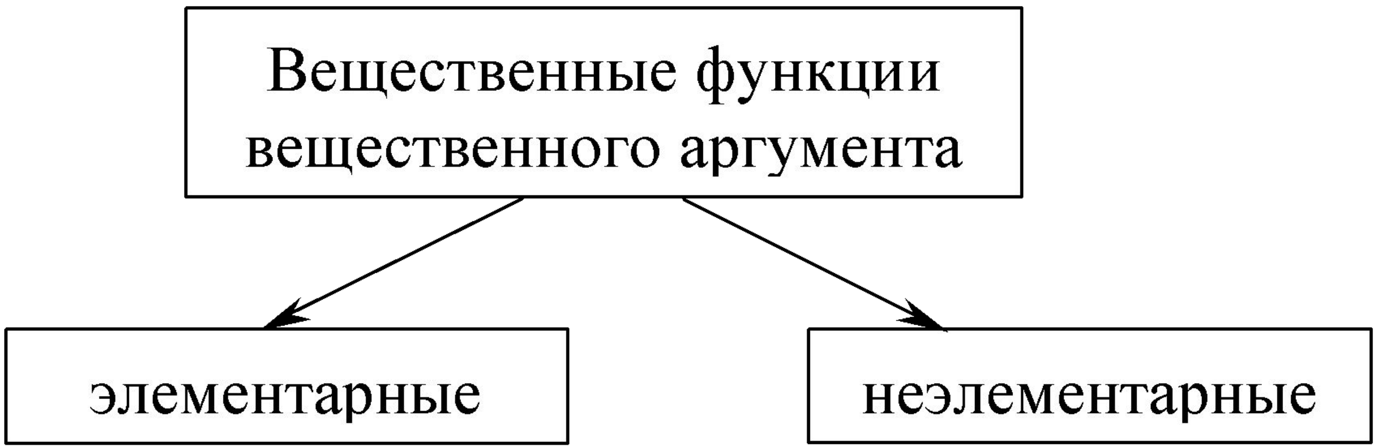
График функции $y = f(x)$ будем также называть «кривой $y = f(x)$».

4) аналитический:

а) явное задание (т.е. формулой $y = f(x)$)

б) неявное задание (т.е. с помощью уравнения $F(x,y)=0$).

Классификация вещественных функций вещественного аргумента



ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ:

1) степенные: $y = x^r \quad (r \in \mathbb{R})$

2) показательные: $y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

3) логарифмические: $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

4) тригонометрические: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\,x$, $y = \mathrm{ctg}\,x$

5) обратные тригонометрические: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\,x$, $y = \mathrm{arcctg}\,x$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Элементарной функцией*** называется функция, которая может быть задана одной формулой $y = f(x)$, где $f(x)$ – выражение, составленное из основных элементарных функций и действительных чисел с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

- *Многочленом степени n* (полиномом, целой рациональной) называется функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$$

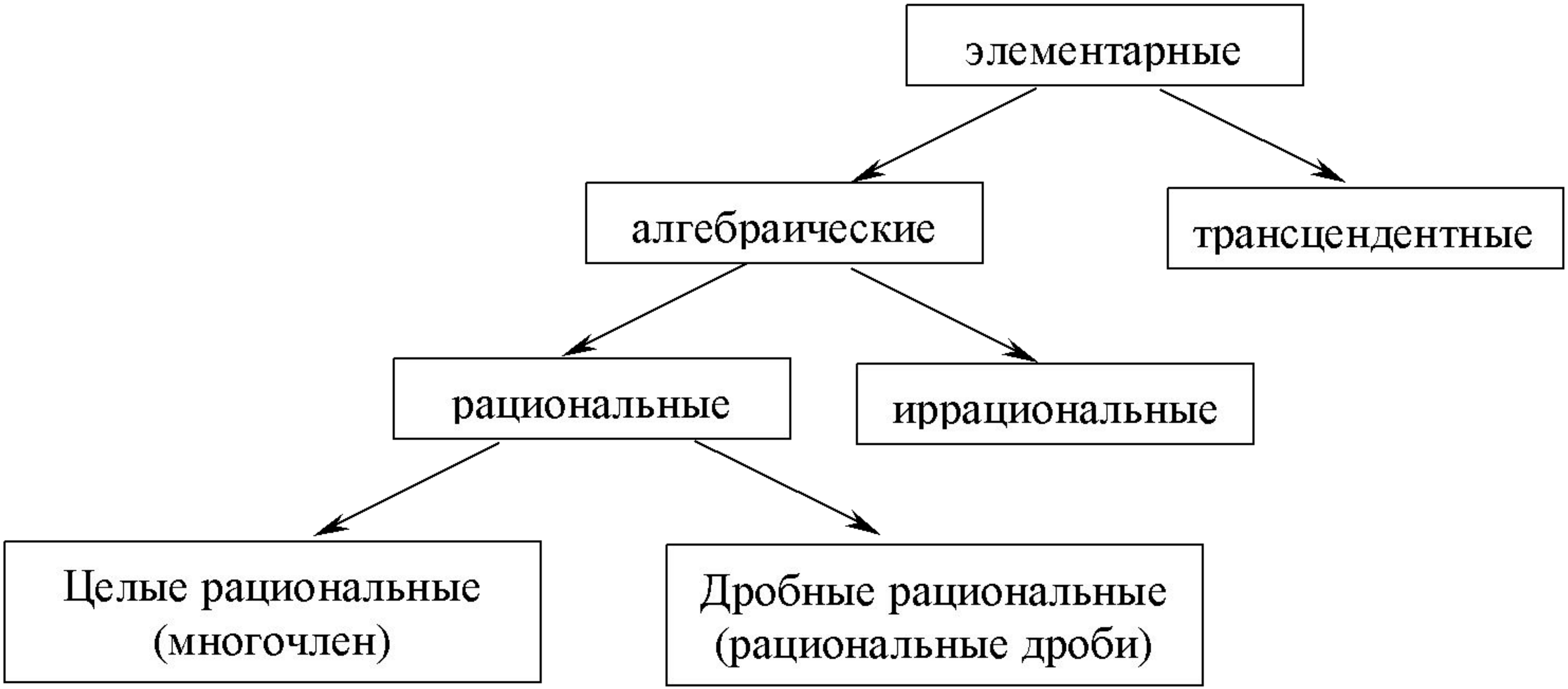
$$(a_k \in R, \quad a_0 \neq 0, \quad n \in N, \quad k = 0, ..., n).$$

- *Рациональной* (дробной рациональной) *функцией* называют отношение двух многочленов

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + ... + b_m}$$

- *Иррациональными функциями* называют функции, полученные конечным числом арифметических операций над аргументом x и конечного числа композиций степенных функций с **рациональным** показателем.

- ***Алгебраическими функциями*** называют рациональные (целые рациональные и дробные рациональные) и иррациональные функции.
- ***Трансцендентными*** называют остальные элементарные функции.


элементарные
алгебраические
трансцендентные
рациональные
иррациональные
Целые рациональные
(многочлен)
Дробные рациональные
(рациональные дроби)

Основные характеристики поведения функции

1) Четность функции (четная, нечетная, общего вида);
2) Периодичность функции;
3) Монотонность функции (возрастающая, убывающая, неубывающая, невозрастающая);
4) Ограниченность функции (ограниченная сверху, ограниченная снизу, ограниченная).

§ Предел функции

Определение предела функции по Коши

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0.

$U^*(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ – ***проколотая окрестность точки*** x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (по Коши, на языке ε-δ).

Число $A \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции f(x) при x, стремящемся к x_0*** (пределом функции $f(x)$ в точке x_0), *когда* $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0$ *такое, что*

если $x \in U^*(x_0, \delta)$, *то* $f(x) \in U(A, \varepsilon)$.

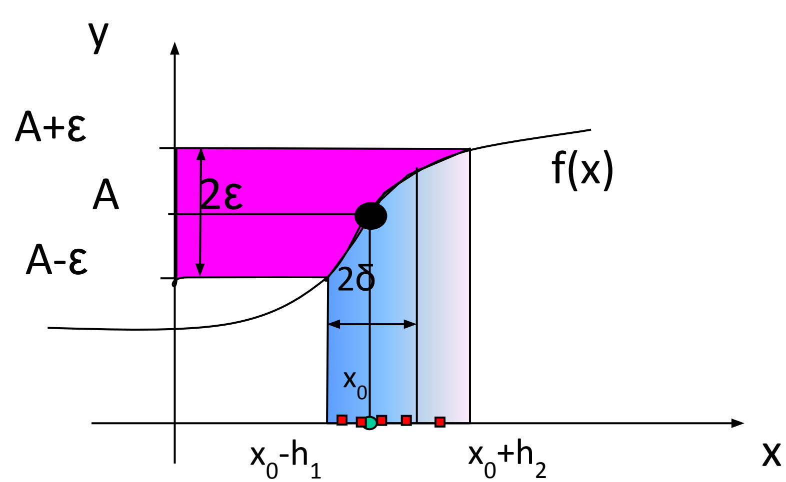
Геометрическая интерпретация понятия предела функции

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

□

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$



Свойства пределов

1) Если функция имеет предел при $x \to x_0$, то этот предел единственный.

2) Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 (говорят: функция локально ограничена).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $\alpha(x)$ *называется* ***бесконечно малой при*** $x \to x_0$, *если* $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$

3) ЛЕММА (о роли бесконечно малых функций).

Число $A \in \mathbb{R}$ является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

4) Пусть $f(x)$ – ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Тогда $f(x) \cdot \alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

5) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел при $x \to x_0$.

Тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже имеют предел при $x \to x_0$, причем

$$a)\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$b)\quad \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$c)\quad \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad \left(\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0\right)$$

Следствие свойства 5. Если $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то $\forall c \in \mathbb{R}$ функция $c \cdot f(x)$ тоже имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Говорят: «константу можно вынести за знак предела».

Замечание. Свойство 5 и его следствие обычно называют теоремами о пределах.

6) Пусть $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$ и $\exists\,\delta>0$ такое, что $f(x) \geq 0$ (или $f(x) > 0$), $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq 0$

7) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы при $x \to x_0$ и $\exists\,\delta>0$ такое, что $f(x) \geq g(x)$ (или $f(x) > g(x)$), $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

8) ЛЕММА (о двух милиционерах).

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый предел при $x \to x_0$ и $\exists\,\delta>0$ такое, что $f(x) \leq \phi(x) \leq g(x)$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда функция $\phi(x)$ тоже имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

9) Пусть $f: X \to Y$, $\phi: Y \to Z$ и существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = z_0$

Тогда сложная функция $\phi(f(x))$ имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = z_0 \qquad (1)$$

Формула (1) называется ***формулой замены переменной в пределе.***

Предел последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Последовательностью*** *называется функция, заданная на множестве натуральных чисел.*

Если область значений последовательности – числовое множество, то последовательность называют ***числовой***, если область значений – множество функций, то последовательность называют ***функциональной***.

Принято обозначать:

аргумент последовательности: n (или k)

значения функции: x_n, y_n и т.д.

Называют: x_1 – первый член последовательности,

x_2 – второй член последовательности и т.д.

x_n – n-й (общий) член последовательности.

Способы задания последовательностей:

1) явно (т.е. формулой $x_n = f(n)$)

2) рекуррентным соотношением

(т.е. формулой $x_n = F(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k})$)

Записывают последовательность:

$\{ x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \}$ – развернутая запись;

$\{ x_n \}$ – короткая запись (где x_n – общий член последовательности).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Число* $a \in \mathbb{R}$ *называется пределом последовательности* $\{x_n\}$ *если* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ *такое, что*

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

Записывают: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a, \quad x_n \to a$

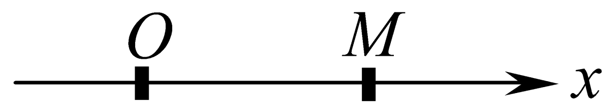
Говорят: последовательность $\{x_\mathrm{n}\}$ сходится (стремится) к a.

Последовательность, имеющую предел, называют ***сходящейся*** (сходящейся к числу a)

Последовательность, не имеющую предела, называют ***расходящейся***.

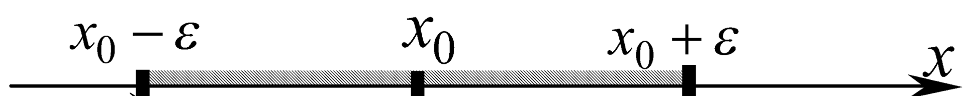
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ
предела последовательности

Пусть $r \in \mathbb{R}$, $M(r) \in Ox$



$M(r)$ – геометрическая интерпретация числа $r \in \mathbb{R}$.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.



Интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ называют ε-***окрестностью точки*** x_0.
(геометрическое определение ε-окрестности точки)

Будем обозначать: $U(x_0, \varepsilon)$

Имеем: $U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$
(алгебраическое определение ε-окрестности точки)

Из определения предела последовательности следует:

если $\{x_n\} \to a$,

то с геометрической точки зрения

это означает,

что в любой ε-окрестности точки a находятся все члены последовательности $\{x_n\}$,

за исключением, может быть, конечного числа членов этой последовательности. (*Геометрическая интерпретация предела последовательности*).

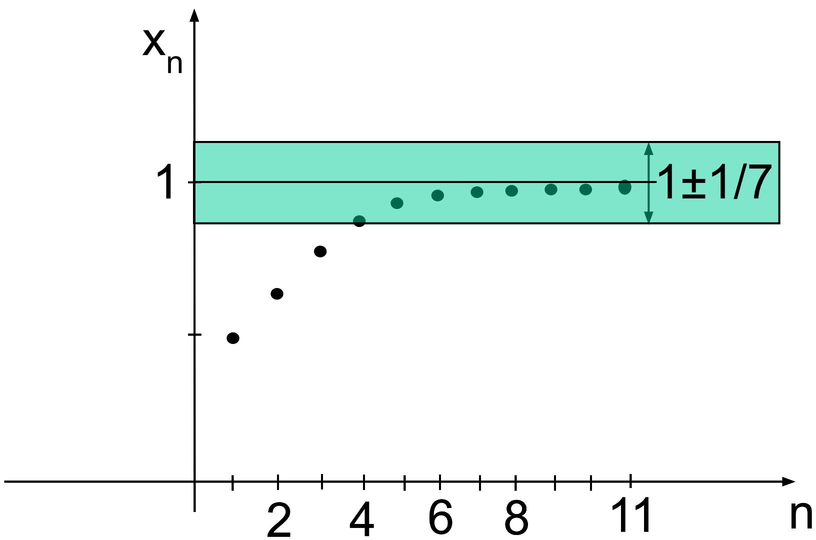
$\Rightarrow$ a – точка «сгущения» последовательности $\{ x_n \}$.

Число А называется пределом последовательности $\{x_n\}$ при n→∞, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N \quad |x_n - A| < \varepsilon$

Пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

Доказать:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

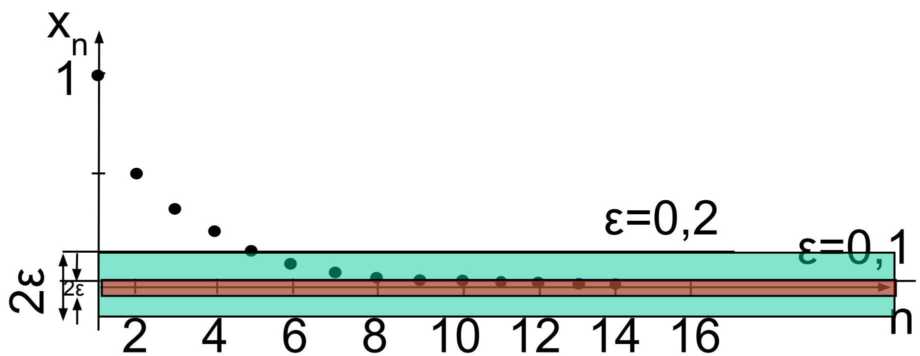


Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой,** если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

то есть если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) \;\; \forall n > N(\varepsilon) \;\; |x_n| < \varepsilon$

$x_n = \frac{1}{n}$



Бесконечно большие функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (на языке ε-δ).

Функцию $f(x)$ называют ***бесконечно большой при $x \to x_0$*** (в точке x_0), *если* $\forall M>0 \quad \exists\, \delta>0$ *такое, что*

$$\text{если } x \in U^*(x_0, \delta), \quad \text{то } |f(x)| > M.$$

Говорят: «$f(x)$ стремится к ∞ при $x \to x_0$»

«предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ равен ∞».

Частные случаи бесконечно больших функций:

1) $f(x)$ – б.б. при $x \to x_0$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда $|f(x)| = f(x) > M$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$

Записывают: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \qquad f(x) \to +\infty \text{ ďđč } x \to x_0$

Говорят: «$f(x)$ стремится к $+\infty$ при $x \to x_0$»

«предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ равен $+\infty$».

2) $f(x)$ – б.б. при $x \to x_0$ и $f(x) \leq 0$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда $|f(x)| = -f(x) > M$

$\Rightarrow f(x) < -M, \ \forall x \in U^*(x_0, \delta)$

Записывают: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty, \qquad f(x) \to -\infty \text{ ďđč } x \to x_0$

Говорят: «$f(x)$ стремится к $-\infty$ при $x \to x_0$»

«предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ равен $-\infty$».

СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ФУНКЦИЙ

1) Если $f(x)$ – б.б. при $x \to x_0$, то функция $1/f(x)$ – б.м. при $x \to x_0$.
Если $\alpha(x)$ – б.м. при $x \to x_0$, то функция $1/\alpha(x)$ – б.б. при $x \to x_0$.
(связь бесконечно больших и бесконечно малых)

2) Если $f(x)$ и $g(x)$ – б.б функции одного знака, то их сумма $f(x) + g(x)$ – б.б. того же знака.

3) Если $f(x)$ – б.б при $x \to x_0$, $g(x)$ – ограниченна в некоторой окрестности $U^*(x_0, \delta)$, то их сумма $f(x) + g(x)$ – б.б. при $x \to x_0$.

4) Если $f(x)$ и $g(x)$ – б.б. при $x \to x_0$, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ – тоже б.б. при $x \to x_0$.

5) Если $f(x)$ – б.б. при $x \to x_0$, $g(x)$ – имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = a \neq 0$$

то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ – б.б. при $x \to x_0$.

6) Если $f(x)$ – б.б. при $x \to x_0$ и $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ имеет место неравенство $| f(x) | < | g(x) |$ $(| f(x) | \leq | g(x) |)$, то функция $g(x)$ тоже является б.б. при $x \to x_0$.

7) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – б.б. одного знака при $x \to x_0$ и $\exists\, \delta>0$ такое, что $f(x) \leq \phi(x) \leq g(x)$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.
Тогда функция $\phi(x)$ тоже является б.б. того же знака при $x \to x_0$.

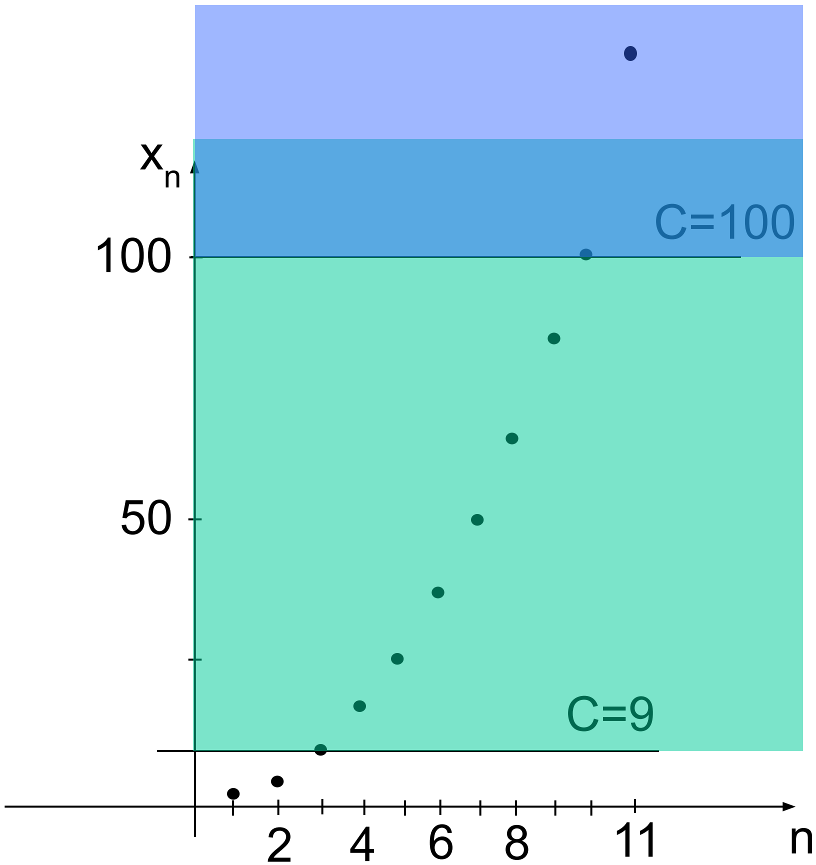
(лемма о двух милиционерах для б.б. функций)

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой,** если

$$\forall C > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad | x_n | > C$$

Пишут: $$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$x_n = n^2$



Предел монотонной последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется

- ***возрастающей***, если для любого n $x_n < x_{n+1}$; обозначают $(\uparrow)$
- ***неубывающей***, если для любого n $x_n \le x_{n+1}$; $(\uparrow)$
- ***убывающей***, если для любого n $x_n > x_{n+1}$; $(\downarrow)$
- ***невозрастающей***, если для любого n $x_n \ge x_{n+1}$; $(\downarrow)$

Определение. Возрастающая и убывающая последовательности называются монотонными

Теорема Вейерштрасса (о существовании предела монотонной последовательности)

Если последовательность $\{x_n\}$ **монотонно** возрастает (убывает) и **ограничена сверху** (снизу), то у нее существует **конечный** предел, равный $\sup\{x_n\}$ ($\inf\{x_n\}$).

Односторонние пределы.

Условие существования $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$.

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$, кроме, может быть, самой точки x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

1) *Число* $A \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции*** $f(x)$ ***при x, стремящемся к*** $\boldsymbol{x_0}$ ***слева*** **(*в точке*** $\boldsymbol{x_0}$ ***слева*)**, *если* $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ *такое, что если x удовлетворяет условию*

$$0 < x_0 - x < \delta,$$

то $f(x) \in U(A, \varepsilon)$.

2) *Число* $B \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции*** $f(x)$ ***при x, стремящемся к*** $\boldsymbol{x_0}$ ***справа***, *если* $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ *такое, что если x удовлетворяет условию*

$$0 < x - x_0 < \delta,$$

то $f(x) \in U(B, \varepsilon)$.

3) *Говорят, что* ***предел функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0 ***слева равен*** $+\infty$ $(-\infty)$ **(функция стремится к** $+\infty$ $(-\infty)$ **при** x**, стремящемся к** x_0 **слева)**, *если* $\forall M>0$ $\exists\,\delta>0$ *такое, что если* x *удовлетворяет условию*

$$0 < x_0 - x < \delta,$$

то $$f(x) > M \quad (f(x) < -M).$$

4) *Говорят, что* ***предел функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0 ***справа равен*** $+\infty$ $(-\infty)$, *если* $\forall M>0$ $\exists\,\delta>0$ *такое, что, если* x *удовлетворяет условию* $0 < x - x_0 < \delta,$

то $$f(x) > M \quad (f(x) < -M).$$

Обозначают:

$f(x_0-0)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ – предел $f(x)$ в точке x_0 слева,

$f(x_0+0)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ – предел $f(x)$ в точке x_0 справа.

Если $x_0 = 0$, то пределы слева и справа обозначают:

$$f(-0),\quad \lim_{x\to -0} f(x) \quad \text{è} \quad f(+0),\quad \lim_{x\to +0} f(x)$$

ТЕОРЕМА (необходимое и достаточное условие существования предела $f(x)$ при $x \to x_0$ и $x_0 \in \mathbb{R}$).

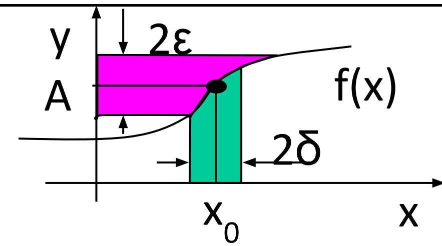
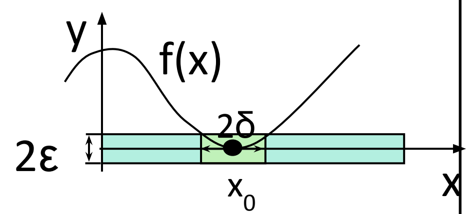
Функция $f(x)$ *имеет предел (конечный) при* $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ *существуют конечные и равные между собой односторонние пределы функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$. *При этом*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

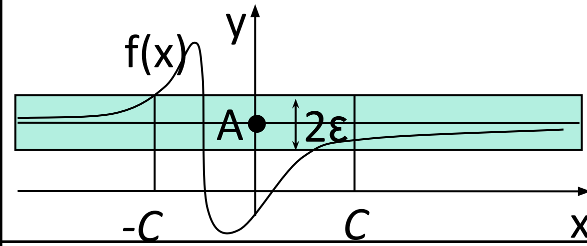
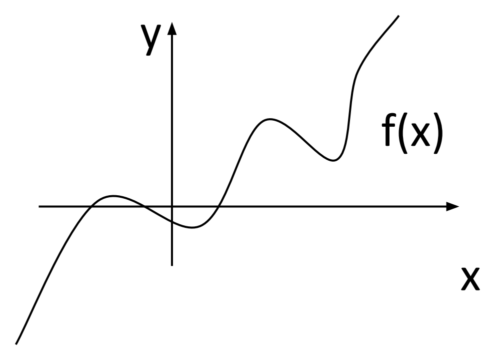
Замечание.

Все свойства пределов и бесконечно больших остаются справедливыми и для односторонних пределов.

Определение предела функции

символы	определение	картинка	пример
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$	$\forall\varepsilon>0 \;\; \exists\delta>0 \;\; \forall x$ $\lvert x-x_0\rvert<\delta \;\; \lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$		$\lim\limits_{x\to 1}(2x+5)=7$ $\lvert 2x+5-7\rvert=2\lvert x-1\rvert<\varepsilon$ $\Rightarrow \lvert x-1\rvert<\delta=\varepsilon/2$
f(x) называется б. м., если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$	$\forall\varepsilon>0 \;\; \exists\delta>0$ $\forall x \;\; \lvert x-x_0\rvert<\delta \;\; \lvert f(x)\rvert<\varepsilon$		$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x}=0$
f(x) называется б. б., если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$	$\forall C>0 \;\; \exists\delta>0 \;\; \forall x,$ $\lvert x-a\rvert<\delta \;\; f(x)>C$		
f(x) называется б. б., если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$			

Определение предела функции (продолжение)

символы	определение	картинка	пример
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0\ \exists C\ \ \forall x,$ $\lvert x\rvert > C\ \lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$		$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2} = 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$			
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$			
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$ 1) $\forall M > 0\ \ \exists C > 0\ \ \forall x > C\ \ f(x) > M$ 2) $\forall M > 0\ \ \exists C > 0\ \ \forall x < -C\ \ f(x) < -M$			$\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$ $= \begin{cases} 1/2,\ x\to\infty \\ \infty,\ x\to-\infty \end{cases}$

Замечательные пределы

Название ***замечательных пределов*** в математическом анализе получили следующие два утверждения:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ – первый замечательный предел;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ – второй замечательный предел.

СЛЕДСТВИЯ ПЕРВОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2/2}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$

СЛЕДСТВИЯ ВТОРОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x/\ln a}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x\ln a}=1$

Замечание. Из формулы замены переменной $\Rightarrow$ 1-й и 2-й замечательный пределы и их следствия остаются верными, если вместо x будет стоять любая б.м. функция $\alpha(x)$.

Сравнение б.м. и б.б. функций

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. при $x \to x_0$.
ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

1) $\alpha(x)$ *называется* ***бесконечно малой более высокого порядка чем*** $\boldsymbol{\beta(x)}$ *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

Записывают: $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

2) $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются* ***бесконечно малыми одного порядка***, *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, \quad \text{где } C \in \mathbb{R} \text{ и } C \neq 0 .$$

Записывают: $\alpha(x) = O(\beta(x))$.

3) $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются* ***эквивалентными***, *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Записывают: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

4) $\alpha(x)$ ***называется бесконечно малой порядка k относительно бесконечно малой $\beta(x)$,*** *если бесконечно малые* $\alpha(x)$ *и* $(\beta(x))^{k}$ *имеют один порядок, т.е. если*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^k}=C, \qquad \text{где } C\in\mathbb{R} \text{ и } C\neq 0 .$$

ТЕОРЕМА 6 (о замене бесконечно малых на эквивалентные).

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ *– б.м. при* $x \to x_0$. *Если*

$$\alpha(x) \sim \alpha_1(x),\ \ \beta(x) \sim \beta_1(x),$$

то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

ТЕОРЕМА 7 (о главной части бесконечно малой).

Пусть $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *– б.м. при* $x \to x_0$, *причем* $\beta(x)$ *– б.м. более высокого порядка чем* $\alpha(x)$. *Тогда*

$$\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x) .$$

Б.м. $\alpha(x)$ называют в этом случае ***главной частью бесконечно малой $\gamma(x)$*** .

Замечание. Из 1-го и 2-го замечательных пределов и их следствий можно получить **таблицу эквивалентных бесконечно малых функций:**

$\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$			
1	$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	6	$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a$
2	$\mathrm{tg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$	6a	$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$
3	$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	7	$\log_a(1+\alpha(x))\sim\dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
4	$\mathrm{arctg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$	7a	$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$
5	$1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$	8	$(1+\alpha(x))^{\mu}-1\sim\mu\,\alpha(x)$

Аналогично бесконечно малым сравниваются и бесконечно большие функции.

А именно, если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие при $x \to x_0$, то

1) $f(x)$ *называется* ***бесконечно большой более высокого порядка чем g(x)*** *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

2) $f(x)$ *и* $g(x)$ *называются* ***бесконечно большими одного порядка****, если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C,$$

где $C \in \mathbb{R}$ и $C \neq 0$;

3) $f(x)$ *и* $g(x)$ *называются* ***эквивалентными бесконечно большими*** (записывают: $f(x) \sim g(x)$), *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

4) $f(x)$ *называется* ***бесконечно малой порядка k относительно бесконечно большой g(x),*** *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(g(x))^k} = C,$$

где $C \in \mathbb{R}$ и $C \neq 0$.

ТЕОРЕМА (о замене бесконечно больших на эквивалентные).

Пусть $f(x)$, $g(x)$, $f_1(x)$, $g_1(x)$ – б.б. при $x \to x_0$. Если $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$,

то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

ТЕОРЕМА (о главной части бесконечно большой).

Пусть $f(x)$ *и* $g(x)$ – *б.б. при* $x \to x_0$, *причем* $g(x)$ – *бесконечно большая более высокого порядка чем* $f(x)$. *Тогда*

$$z(x) = f(x) + g(x) \sim g(x) .$$

Б.б. $g(x)$ называют в этом случае ***главной частью бесконечно большой*** $z(x)$.