

**Введение в Математический анализ** – часть математики, в которой функции и их обобщения изучаются с помощью пределов.

## § Понятие функции

### Основные понятия

Пусть  $X, Y$  – множества произвольной природы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Если  $\forall x \in X$  поставлен в соответствие **единственный** элемент  $y \in Y$ , то говорят, что на множестве  $X$  задана **функция (отображение)** с множеством значений  $Y$ .

Записывают:  $f: X \rightarrow Y, \quad y = f(x)$

(где  $f$  – закон, осуществляющий соответствие)

Называют:  $X$  – **область (множество) определения функции**

$x$  ( $x \in X$ ) – **аргумент (независимая переменная)**

$Y$  – **область (множество) значений**

$y$  ( $y \in Y$ ) – **зависимая переменная (функция)**

# СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

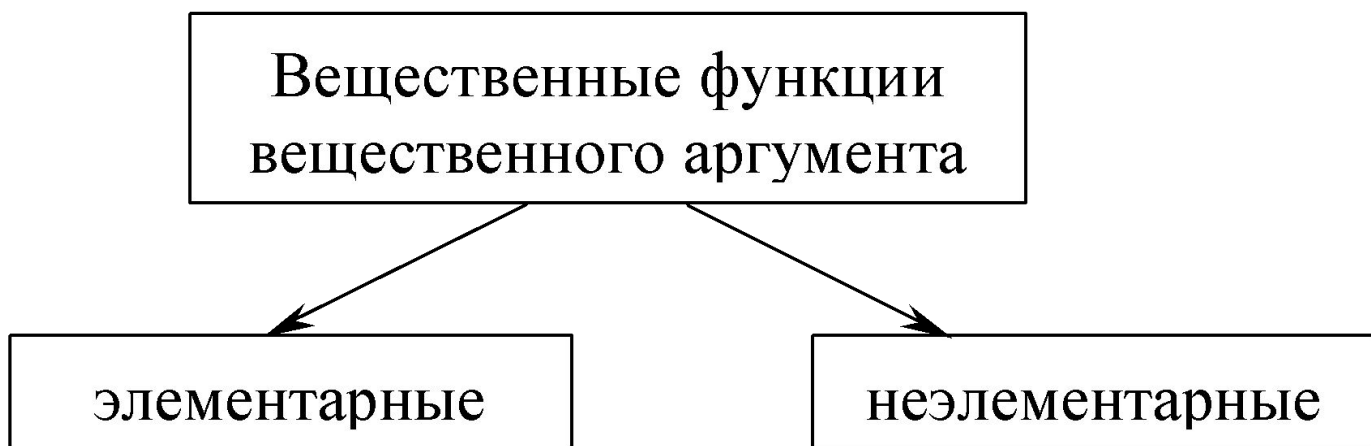
- 1) словесный;
- 2) табличный;
- 3) графический;

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Графиком функции  $y = f(x)$  называется геометрическое место точек плоскости с координатами  $(x; f(x))$ .*

График функции  $y = f(x)$  будем также называть «кривой  $y = f(x)$ ».

- 4) аналитический:
  - а) явное задание (т.е. формулой  $y = f(x)$  )
  - б) неявное задание (т.е. с помощью уравнения  $F(x,y)=0$  ).

# Классификация вещественных функций вещественного аргумента



## ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ:

- 1) степенные:  $y = x^r$  ( $r \in \mathbb{R}$ )
- 2) показательные:  $y = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ )
- 3) логарифмические:  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ )
- 4) тригонометрические:  $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x,$   
 $y = \operatorname{ctg} x$
- 5) обратные тригонометрические:  $y = \operatorname{arcsin} x,$   
 $y = \operatorname{arccos} x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Элементарной функцией* называется функция, которая может быть задана одной формулой  $y = f(x)$ , где  $f(x)$  – выражение, составленное из основных элементарных функций и действительных чисел с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

- Многочленом степени  $n$  (полиномом, целой рациональной) называется функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

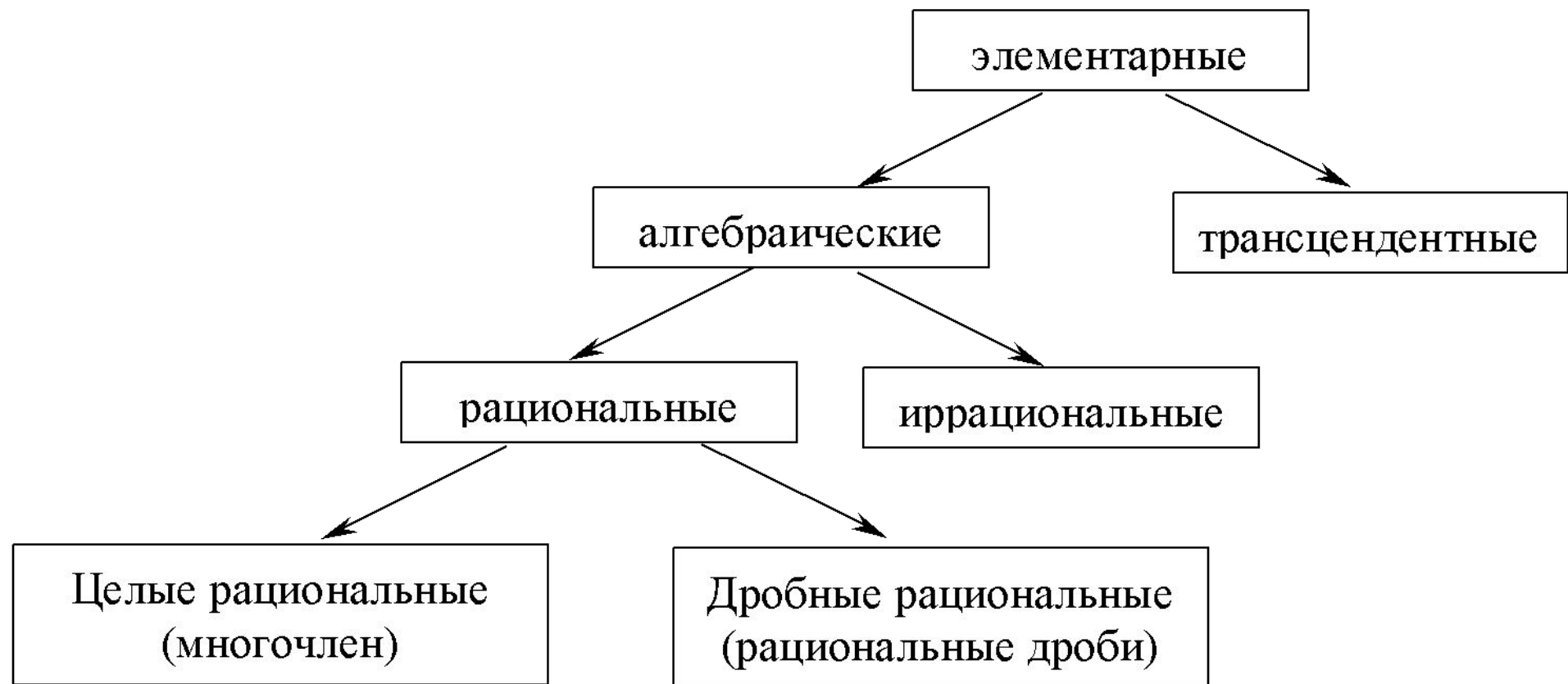
$$(a_k \in R, a_0 \neq 0, n \in N, k = 0, \dots, n).$$

- Рациональной (дробной рациональной) функцией называют отношение двух многочленов

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_m}$$

- Иррациональными функциями называют функции, полученные конечным числом арифметических операций над аргументом  $x$  и конечного числа композиций степенных функций с **рациональным** показателем.

- Алгебраическими функциями называют рациональные (целые рациональные и дробные рациональные) и иррациональные функции.
- Трансцендентными называют остальные элементарные функции.



## Основные характеристики поведения функции

- 1) Четность функции (четная, нечетная, общего вида);
- 2) Периодичность функции;
- 3) Монотонность функции (возрастающая, убывающая, неубывающая, невозрастающая);
- 4) Ограниченность функции (ограниченная сверху, ограниченная снизу, ограниченная).



# § Предел функции

## Определение предела функции по Коши

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , кроме, может быть, самой точки  $x_0$ .

$U^*(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$  – **проколота окрестность точки**  $x_0$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (по Коши, на языке  $\varepsilon$ - $\delta$ ).

Число  $A \in \mathbb{R}$  называется **пределом функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $x_0$**  (пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ ), когда

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что

если  $x \in U^*(x_0, \delta)$ , то  $f(x) \in U(A, \varepsilon)$ .

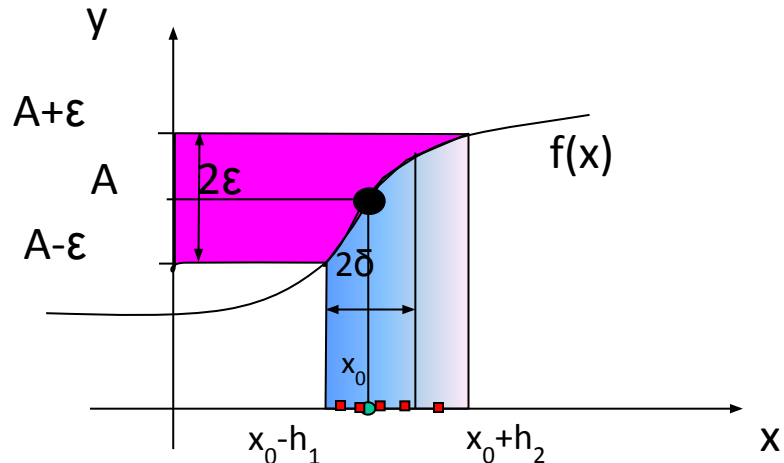
# Геометрическая интерпретация понятия предела функции

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

□

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$



## Свойства пределов

- 1) Если функция имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ , то этот предел единственный.
- 2) Если функция  $f(x)$  имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ , то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  (говорят: функция локально ограничена).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Функция  $\alpha(x)$  называется **бесконечно малой при  $x \rightarrow x_0$** , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$

3) ЛЕММА (о роли бесконечно малых функций).

Число  $A \in \mathbb{R}$  является пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0 \iff f(x) = A + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ .

4) Пусть  $f(x)$  – ограничена в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$ ,  $\alpha(x)$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда  $f(x) \cdot \alpha(x)$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ .

5) Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют предел при  $x \rightarrow x_0$ .

Тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже имеют предел при  $x \rightarrow x_0$ , причем

$$a) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \right)$$

Следствие свойства 5. Если  $f(x)$  имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ , то  $\forall c \in \mathbb{R}$  функция  $c \cdot f(x)$  тоже имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ , причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Говорят: «константу можно вынести за знак предела».

**Замечание.** Свойство 5 и его следствие обычно называют теоремами о пределах.

6) Пусть  $f(x)$  имеет предел при  $x \rightarrow x_0$  и  $\exists \delta > 0$  такое, что  $f(x) \geq 0$  (или  $f(x) > 0$ ),  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ .

Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$

7) Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют пределы при  $x \rightarrow x_0$  и  $\exists \delta > 0$  такое, что  $f(x) \geq g(x)$  (или  $f(x) > g(x)$ ),  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ .

Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

8) ЛЕММА (о двух милиционерах).

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют одинаковый предел при  $x \rightarrow x_0$  и  $\exists \delta > 0$  такое, что  $f(x) \leq \phi(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ .

Тогда функция  $\phi(x)$  тоже имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ , причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

9) Пусть  $f: X \rightarrow Y$ ,  $\phi: Y \rightarrow Z$  и существуют пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ,  $\lim_{y \rightarrow y_0} \phi(y) = z_0$

Тогда сложная функция  $\phi(f(x))$  имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ , причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} \phi(y) = z_0 \quad (1)$$

Формула (1) называется ***формулой замены переменной в пределе.***

## Предел последовательности

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Последовательностью* называется функция, заданная на множестве натуральных чисел.

Если область значений последовательности – числовое множество, то последовательность называют *числовой*, если область значений – множество функций, то последовательность называют *функциональной*.



## Принято обозначать:

аргумент последовательности:  $n$  (или  $k$ )

значения функции:  $x_n$ ,  $y_n$  и т.д.

**Называют:**  $x_1$  – первый член последовательности,  
 $x_2$  – второй член последовательности и т.д.  
 $x_n$  –  $n$ -й (общий) член последовательности.

## Способы задания последовательностей:

1) явно (т.е. формулой  $x_n = f(n)$  )

2) рекуррентным соотношением

(т.е. формулой  $x_n = F(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$  )

## Записывают последовательность:

$\{ x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \}$  – развернутая запись;

$\{ x_n \}$  – короткая запись (где  $x_n$  – общий член последовательности).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Число  $a \in \mathbb{R}$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$  если  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$  такое, что

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

**Записывают:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad x_n \rightarrow a$

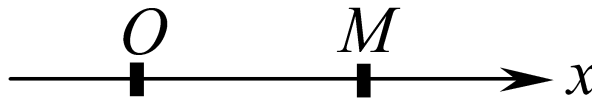
**Говорят:** последовательность  $\{x_n\}$  **сходится** (стремится) к  $a$ .

Последовательность, имеющую предел, называют ***сходящейся*** (сходящейся к числу  $a$ )

Последовательность, не имеющую предела, называют ***расходящейся***.

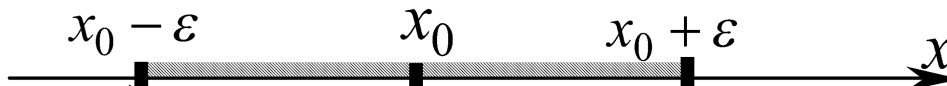
# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ предела последовательности

Пусть  $r \in \mathbb{R}$ ,  $M(r) \in Ox$



$M(r)$  – геометрическая интерпретация числа  $r \in \mathbb{R}$ .

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ .



Интервал  $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$  называют  **$\varepsilon$ -окрестностью точки**  $x_0$ .  
(геометрическое определение  $\varepsilon$ -окрестности точки)

**Будем обозначать:**  $U(x_0, \varepsilon)$

Имеем:  $U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$

(алгебраическое определение  $\varepsilon$ -окрестности точки)

Из определения предела последовательности  
следует:

если  $\{x_n\} \rightarrow a$ ,

то с геометрической точки зрения

это означает,

что в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  находятся

все члены последовательности  $\{x_n\}$ ,

за исключением, может быть, конечного числа  
членов этой последовательности.

*(Геометрическая интерпретация предела  
последовательности).*

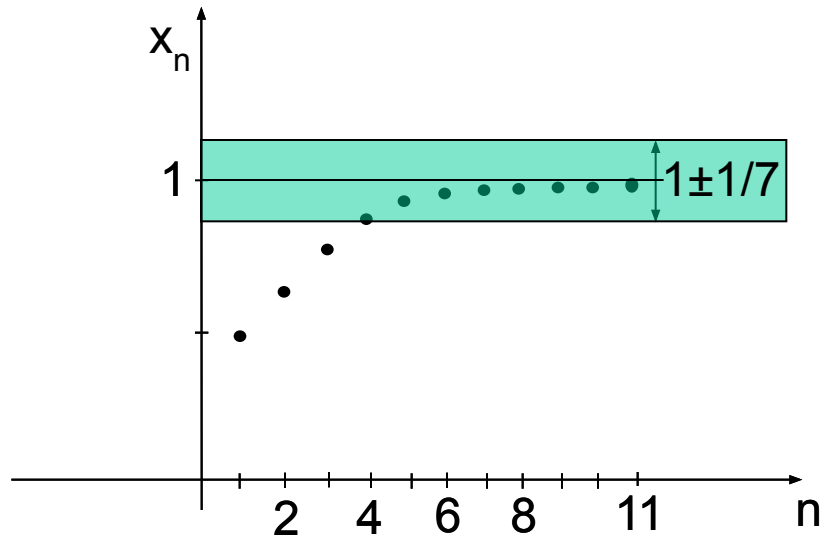
$\Rightarrow a$  – точка «сгущения»  
последовательности  $\{x_n\}$ .

Число  $A$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$  при  $n \rightarrow \infty$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N \quad |x_n - A| < \varepsilon$

Пишут:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$

Доказать:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

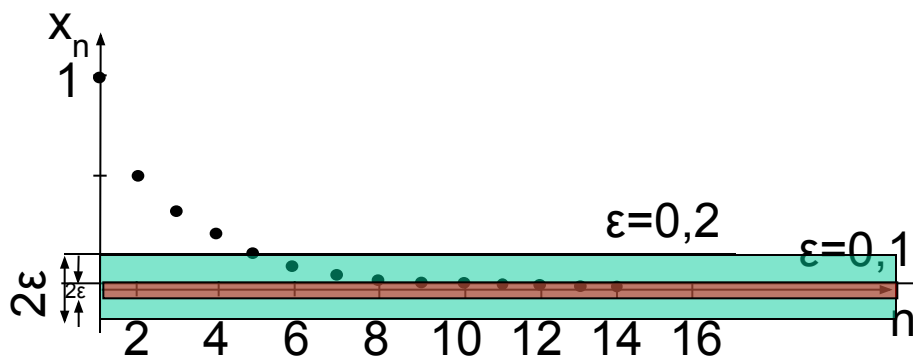


Последовательность  $\{x_n\}$  называется **бесконечно малой**, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

то есть если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) |x_n| < \varepsilon$

$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Бесконечно большие функции

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0 \in \mathbb{R}$ , кроме, может быть, самой точки  $x_0$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (на языке  $\varepsilon$ - $\delta$ ).

Функцию  $f(x)$  называют **бесконечно большой** при  $x \rightarrow x_0$  (в точке  $x_0$ ), если  $\forall M > 0 \exists \delta > 0$  такое, что

если  $x \in U^*(x_0, \delta)$ , то  $|f(x)| > M$ .

Говорят: « $f(x)$  стремится к  $\infty$  при  $x \rightarrow x_0$ »

«предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  равен  $\infty$ ».

Частные случаи бесконечно больших функций:

1)  $f(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$  и  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ .

Тогда  $|f(x)| = f(x) > M$ ,  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$

Записывают:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$  d'dč  $x \rightarrow x_0$

Говорят: « $f(x)$  стремится к  $+\infty$  при  $x \rightarrow x_0$ »  
«предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  равен  $+\infty$ ».

2)  $f(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$  и  $f(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ .

Тогда  $|f(x)| = -f(x) > M$

$\Rightarrow f(x) < -M$ ,  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$

Записывают:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$  d'dč  $x \rightarrow x_0$

Говорят: « $f(x)$  стремится к  $-\infty$  при  $x \rightarrow x_0$ »  
«предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  равен  $-\infty$ ».



# СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ФУНКЦИЙ

- 1) Если  $f(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$ , то функция  $1/f(x)$  – б.м. при  $x \rightarrow x_0$ .  
Если  $\alpha(x)$  – б.м. при  $x \rightarrow x_0$ , то функция  $1/\alpha(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$ .  
(связь бесконечно больших и бесконечно малых)
- 2) Если  $f(x)$  и  $g(x)$  – б.б функции одного знака, то их сумма  $f(x) + g(x)$  – б.б. того же знака.
- 3) Если  $f(x)$  – б.б при  $x \rightarrow x_0$ ,  $g(x)$  – ограничена в некоторой окрестности  $U^*(x_0, \delta)$ , то их сумма  $f(x) + g(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$ .
- 4) Если  $f(x)$  и  $g(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$ , то их произведение  $f(x) \cdot g(x)$  – тоже б.б. при  $x \rightarrow x_0$ .

5) Если  $f(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$ ,  $g(x)$  – имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ ,  
причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \neq 0$$

то их произведение  $f(x) \cdot g(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$ .

6) Если  $f(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$  и  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$  имеет место  
неравенство  $|f(x)| < |g(x)|$  ( $|f(x)| \leq |g(x)|$ ),  
то функция  $g(x)$  тоже является б.б. при  $x \rightarrow x_0$ .

7) Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  – б.б. одного знака при  $x \rightarrow x_0$  и  $\exists \delta > 0$   
такое, что  $f(x) \leq \phi(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$ .

Тогда функция  $\phi(x)$  тоже является б.б. того же знака при  
 $x \rightarrow x_0$ .

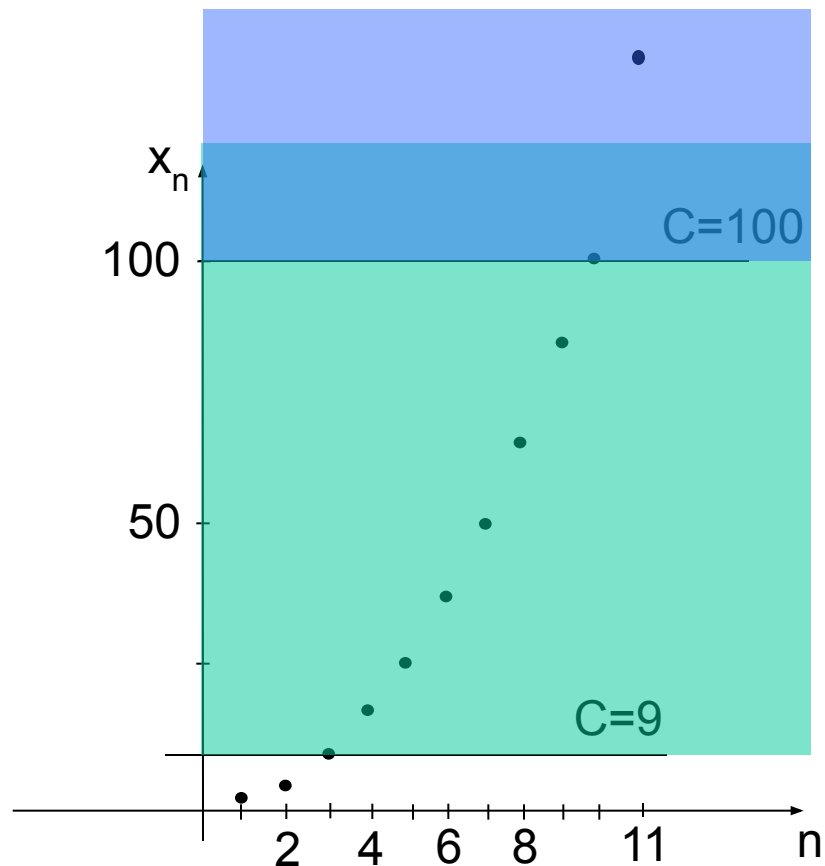
(лемма о двух милиционерах для б.б. функций)

Последовательность  $\{x_n\}$  называется **бесконечно большой**, если

$$\forall C > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |x_n| > C$$

Пишут:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

$$x_n = n^2$$



# Предел монотонной последовательности

Определение. Последовательность  $\{x_n\}$  называется

- *возрастающей*, если для любого  $n$   $x_n < x_{n+1}$ ; обозначают  $(\uparrow)$
- *неубывающей*, если для любого  $n$   $x_n \leq x_{n+1}$ ;  $(\uparrow)$
- *убывающей*, если для любого  $n$   $x_n > x_{n+1}$ ;  $(\downarrow)$
- *невозрастающей*, если для любого  $n$   $x_n \geq x_{n+1}$ ;  $(\downarrow)$

Определение. Возрастающая и убывающая последовательности называются **монотонными**

Теорема Вейерштрасса (о существовании предела монотонной последовательности)

Если последовательность  $\{x_n\}$  **монотонно** возрастает (убывает) и **ограничена сверху** (снизу), то у нее существует **конечный** предел, равный  $\sup \{x_n\}$  ( $\inf \{x_n\}$ ).

## Односторонние пределы.

Условие существования  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (x_0 \in \mathbb{R})$ .

Пусть  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0 \in \mathbb{R}$ , кроме, может быть, самой точки  $x_0$ .

### ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

- 1) Число  $A \in \mathbb{R}$  называется **пределом функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $x_0$  слева (в точке  $x_0$  слева)**, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что если  $x$  удовлетворяет условию
$$0 < x_0 - x < \delta,$$
то  $f(x) \in U(A, \varepsilon)$ .
- 2) Число  $B \in \mathbb{R}$  называется **пределом функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $x_0$  справа**, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что если  $x$  удовлетворяет условию
$$0 < x - x_0 < \delta,$$
то  $f(x) \in U(B, \varepsilon)$ .

3) Говорят, что **предел функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  слева равен  $+\infty$  ( $-\infty$ )** (функция стремится к  $+\infty$  ( $-\infty$ ) при  $x$ , стремящемся к  $x_0$  слева), если  $\forall M > 0 \exists \delta > 0$  такое, что если  $x$  удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} & 0 < x_0 - x < \delta, \\ \text{то} & f(x) > M \quad (f(x) < -M). \end{aligned}$$

4) Говорят, что **предел функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  справа равен  $+\infty$  ( $-\infty$ )**, если  $\forall M > 0 \exists \delta > 0$  такое, что, если  $x$  удовлетворяет условию  $0 < x - x_0 < \delta$ ,  
то

$$f(x) > M \quad (f(x) < -M).$$

Обозначают:

$f(x_0 - 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$  – предел  $f(x)$  в точке  $x_0$  слева,

$f(x_0 + 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$  – предел  $f(x)$  в точке  $x_0$  справа.

Если  $x_0 = 0$ , то пределы слева и справа обозначают:

$$f(-0), \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) \quad \text{è} \quad f(+0), \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x)$$

**ТЕОРЕМА** (необходимое и достаточное условие существования предела  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  и  $x_0 \in \mathbb{R}$ ).

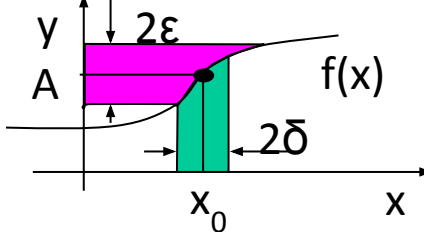
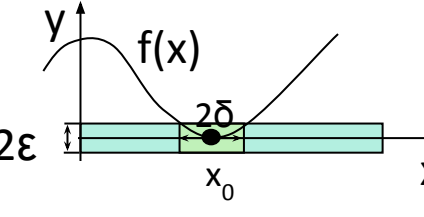
*Функция  $f(x)$  имеет предел (конечный) при  $x \rightarrow x_0$   
 $\Leftrightarrow$  существуют конечные и равные между собой  
односторонние пределы функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ .  
При этом*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

***Замечание.***

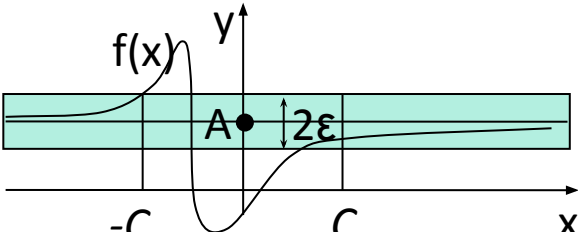
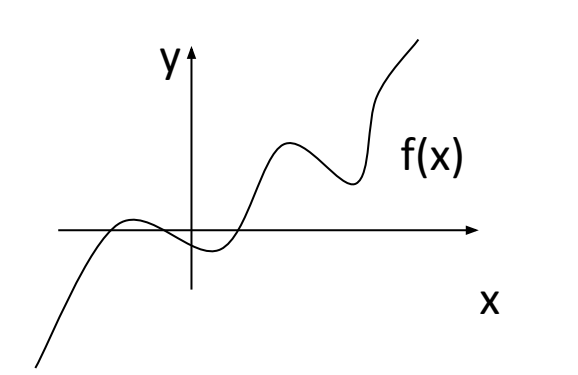
Все свойства пределов и бесконечно больших остаются справедливыми и для односторонних пределов.

# Определение предела функции

СИМВОЛЫ	определение	картинка	пример
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x$ $ x - x_0  < \delta \quad  f(x) - A  < \varepsilon$		$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 5) = 7$ $ 2x + 5 - 7  = 2 x - 1  < \varepsilon$
<p><math>f(x)</math> называется б. м., если</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ $\forall x \quad  x - x_0  < \delta \quad  f(x)  < \varepsilon$		$\Rightarrow  x - 1  < \delta = \varepsilon / 2$ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x} = 0$
<p><math>f(x)</math> называется б. б., если</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$	$\forall C > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x,$ $ x - a  < \delta \quad f(x) > C$		
<p><math>f(x)</math> называется б. б., если</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$			



# Определение предела функции (продолжение)

СИМВОЛЫ	определение	картинка	пример
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0 \exists C \forall x,  x  > C  f(x) - A  < \varepsilon$		$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2} = 1$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$			
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$			
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$ <p>1) <math>\forall M &gt; 0 \exists C &gt; 0 \forall x &gt; C f(x) &gt; M</math></p> <p>2) <math>\forall M &gt; 0 \exists C &gt; 0 \forall x &lt; -C f(x) &lt; -M</math></p>		$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \begin{cases} 1/2, & x \rightarrow \infty \\ \infty, & x \rightarrow -\infty \end{cases}$	

## Замечательные пределы

Название *замечательных пределов* в математическом анализе получили следующие два утверждения:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad - \text{первый замечательный предел;}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad - \text{второй замечательный предел.}$$

### СЛЕДСТВИЯ ПЕРВОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2/2} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

## СЛЕДСТВИЯ ВТОРОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x/\ln a} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = 1$$

**Замечание.** Из формулы замены переменной  $\Rightarrow$  1-й и 2-й замечательный пределы и их следствия остаются верными, если вместо  $x$  будет стоять любая б.м. функция  $\alpha(x)$ .

## Сравнение б.м. и б.б. функций

Пусть функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – б.м. при  $x \rightarrow x_0$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

1)  $\alpha(x)$  называется **бесконечно малой более высокого порядка чем  $\beta(x)$**  если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

Записывают:  $\alpha(x) = o(\beta(x))$ .

2)  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются **бесконечно малыми одного порядка**, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, \quad \text{где } C \in \mathbb{R} \text{ и } C \neq 0.$$

Записывают:  $\alpha(x) = O(\beta(x))$ .

3)  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются **эквивалентными**, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Записывают:  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ .

4)  $\alpha(x)$  называется **бесконечно малой порядка  $k$  относительно бесконечно малой  $\beta(x)$** , если бесконечно малые  $\alpha(x)$  и  $(\beta(x))^k$  имеют один порядок, т.е. если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = C, \quad \text{где } C \in \mathbb{R} \text{ и } C \neq 0.$$

**ТЕОРЕМА 6** (о замене бесконечно малых на эквивалентные).

Пусть  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\alpha_1(x)$ ,  $\beta_1(x)$  – б.м. при  $x \rightarrow x_0$ . Если  $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ ,  $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ ,

то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

**ТЕОРЕМА 7** (о главной части бесконечно малой).

Пусть  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – б.м. при  $x \rightarrow x_0$ , причем  $\beta(x)$  – б.м. более высокого порядка чем  $\alpha(x)$ . Тогда

$$\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x).$$

Б.м.  $\alpha(x)$  называют в этом случае **главной частью бесконечно малой  $\gamma(x)$** .

**Замечание.** Из 1-го и 2-го замечательных пределов и их следствий можно получить **таблицу эквивалентных бесконечно малых функций:**

$\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$			
1	$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	6	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$
2	$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	6a	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
3	$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	7	$\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$
4	$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	7a	$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
5	$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$	8	$(1 + \alpha(x))^\mu - 1 \sim \mu \alpha(x)$

Аналогично бесконечно малым сравниваются и бесконечно большие функции.

А именно, если  $f(x)$  и  $g(x)$  – бесконечно большие при  $x \rightarrow x_0$ , то

1)  $f(x)$  называется **бесконечно большой более высокого порядка чем  $g(x)$**  если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

2)  $f(x)$  и  $g(x)$  называются **бесконечно большими одного порядка**, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C, \quad \text{где } C \in \mathbb{R} \text{ и } C \neq 0;$$

3)  $f(x)$  и  $g(x)$  называются **эквивалентными бесконечно большими** (записывают:  $f(x) \sim g(x)$ ), если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

4)  $f(x)$  называется **бесконечно малой порядка  $k$  относительно бесконечно большой  $g(x)$** , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(g(x))^k} = C, \quad \text{где } C \in \mathbb{R} \text{ и } C \neq 0.$$

ТЕОРЕМА (о замене бесконечно больших на эквивалентные).

Пусть  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $g_1(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$ . Если

$$f(x) \sim f_1(x), \quad g(x) \sim g_1(x),$$

то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

ТЕОРЕМА (о главной части бесконечно большой).

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  – б.б. при  $x \rightarrow x_0$ , причем  $g(x)$  – бесконечно большая более высокого порядка чем  $f(x)$ . Тогда

$$z(x) = f(x) + g(x) \sim g(x).$$

Б.б.  $g(x)$  называют в этом случае **главной частью** бесконечно большой  $z(x)$ .