Работа

Сизовой Натальи Владимировны

МОУ «Лицей №3» г. Сарова

Персональный идентификатор:

233-169-667

Производная

Автор Сизова Н. В., г. Саров

Историческая справка

Тайны планетных орбит.

Древнегреческие учёные умели решать немногие задачи кинематики – рассчитать либо равномерное прямолинейное движение, либо равномерное вращение вокруг оси.

А планеты на небосводе двигались по самым замысловатым кривым . Свести эти движения планет к простым древним учёным не удавалось.

Лишь в 17 веке немецкому учёному Иоганну Кеплеру удалось сформулировать законы движения планет. Оказалось, что планеты движутся по эллипсам, и притом неравномерно. Объяснить, почему это так, Кеплер не смог.

В конце 17 века Исаак Ньютон открыл законы динамики, сформулировал закон всемирного тяготения и развил математические методы, позволявшие сводить неравномерное к равномерному, неоднородное к однородному, криволинейное к прямолинейному.

В основе лежала простая идея – движение любого тела за малый промежуток времени можно приближённо рассматривать как прямолинейное и равномерное.

Одновременно с Ньютоном немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц изучал, как проводить касательные к произвольным кривым.

Он также развил новое исчисление, которое оказалось по сути дела тождественным построенному Ньютоном. Обозначения, введённые Лейбницем, оказались настолько удачными, что сохранились и по сей день.

Новая математика Ньютона и Лейбница состояла из двух больших частей – дифференциального и интегрального исчислений.

В первом из них говорилось, как, изучая малую часть явления, сводить неравномерное к равномерному.

Во второй – как из малых равномерных частей конструировать сложное неравномерное явление.

Повторение

Определение 1

Окрестностью точки x_0 называется интервал $\left(x_0-\delta; x_0+\delta\right)$, где δ – радиус окрестности.

Определение 2

Функция $\alpha\left(x\right)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если для любого ε > 0 существует проколотая окрестность точки a, на которой выполняется неравенство $\left|\alpha\left(x\right)\right| < \varepsilon.$

Определение 3

Число b называется пределом функции $f\left(x\right)$ при $x \to a$, если $f\left(x\right) = b + \alpha\left(x\right)$, где $\alpha\left(x\right)$ - бесконечно малая функция при $x \to a$.

$$\lim_{x\to a}\alpha\left(x\right) = 0$$

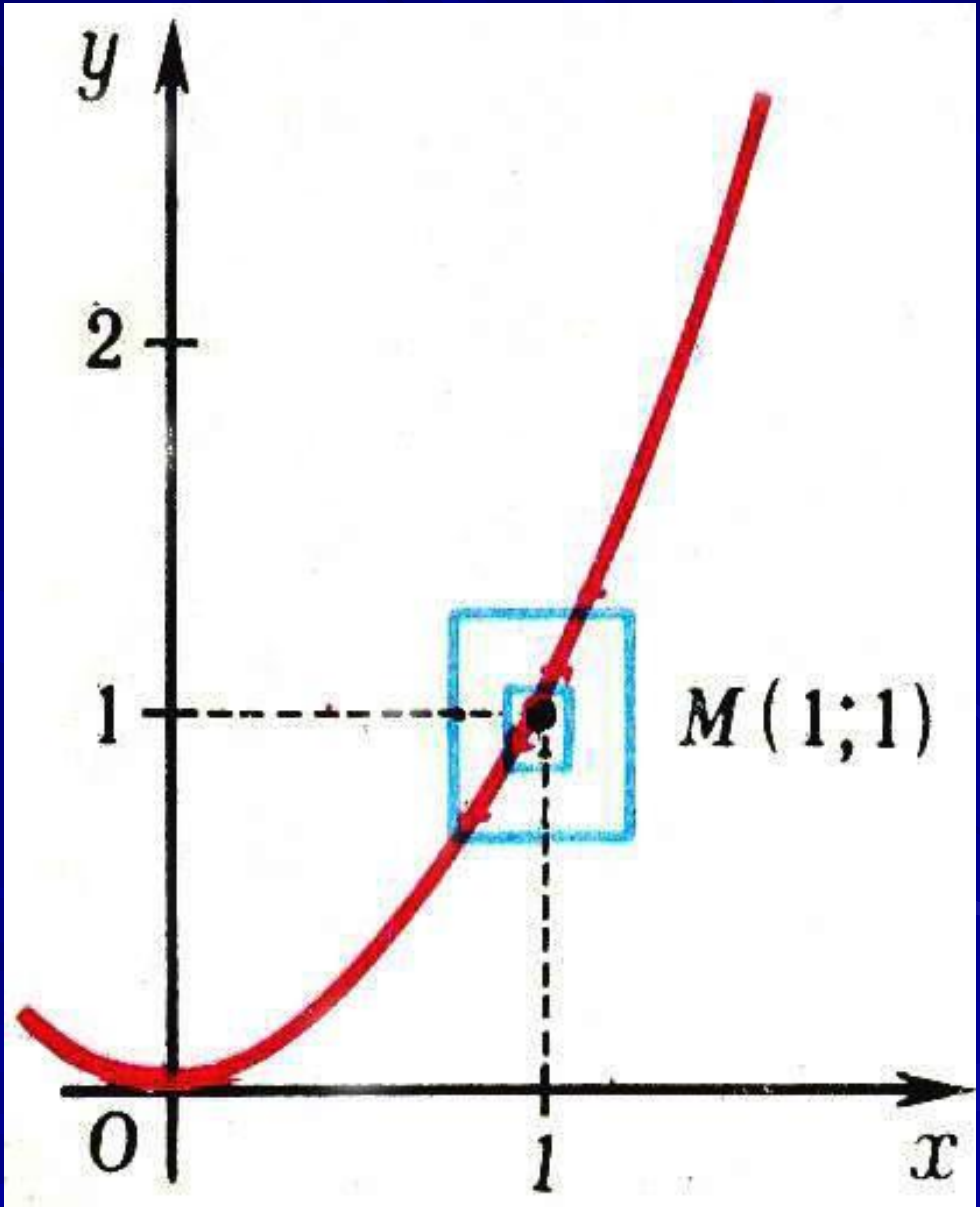
Тема урока

Понятие производной функции в точке

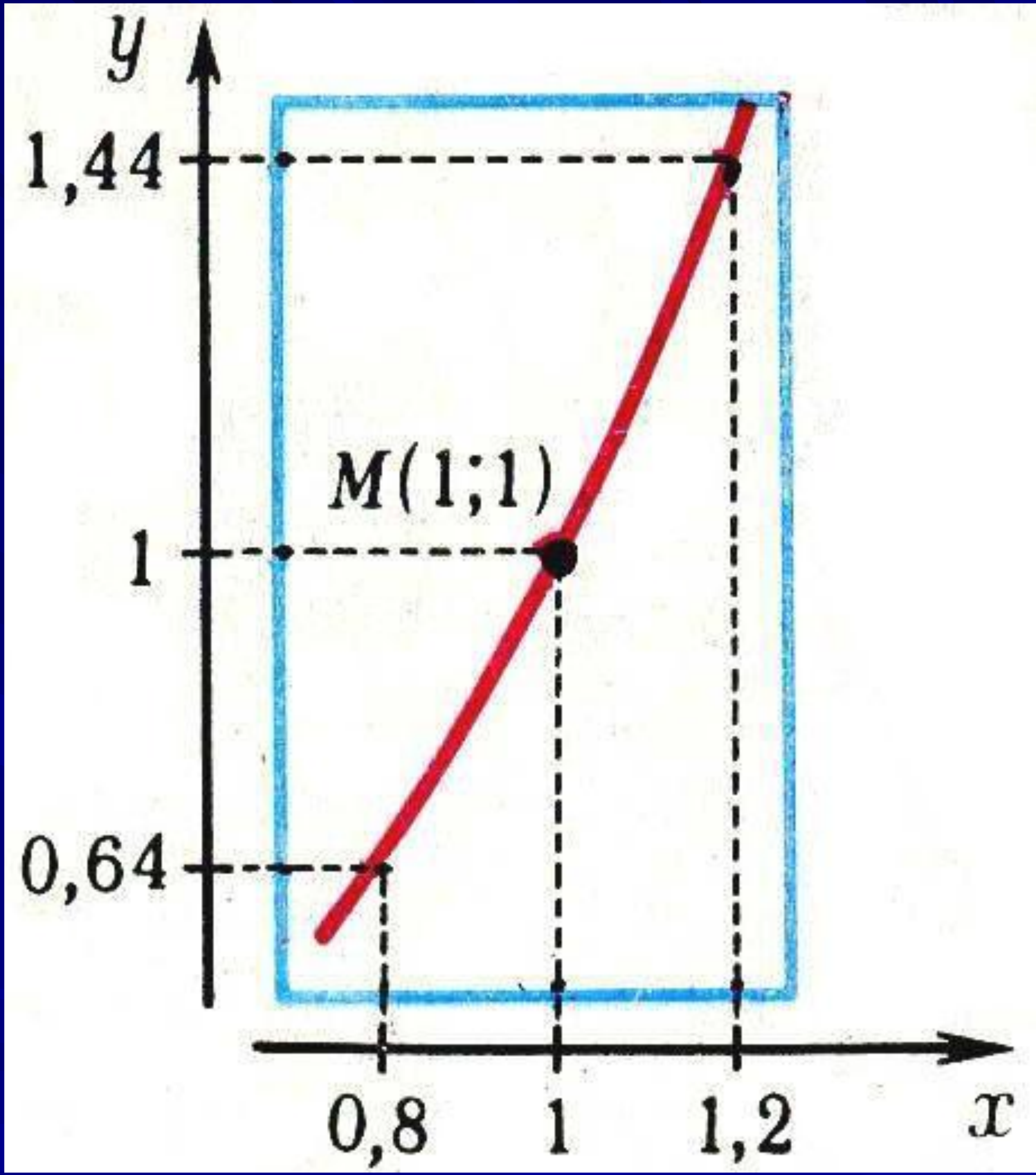
Итак, идём по стопам Ньютона и Лейбница!

Рассмотрим график функции $y = x^2$ *вблизи точки M(1;1),*

изображённый в разных масштабах.

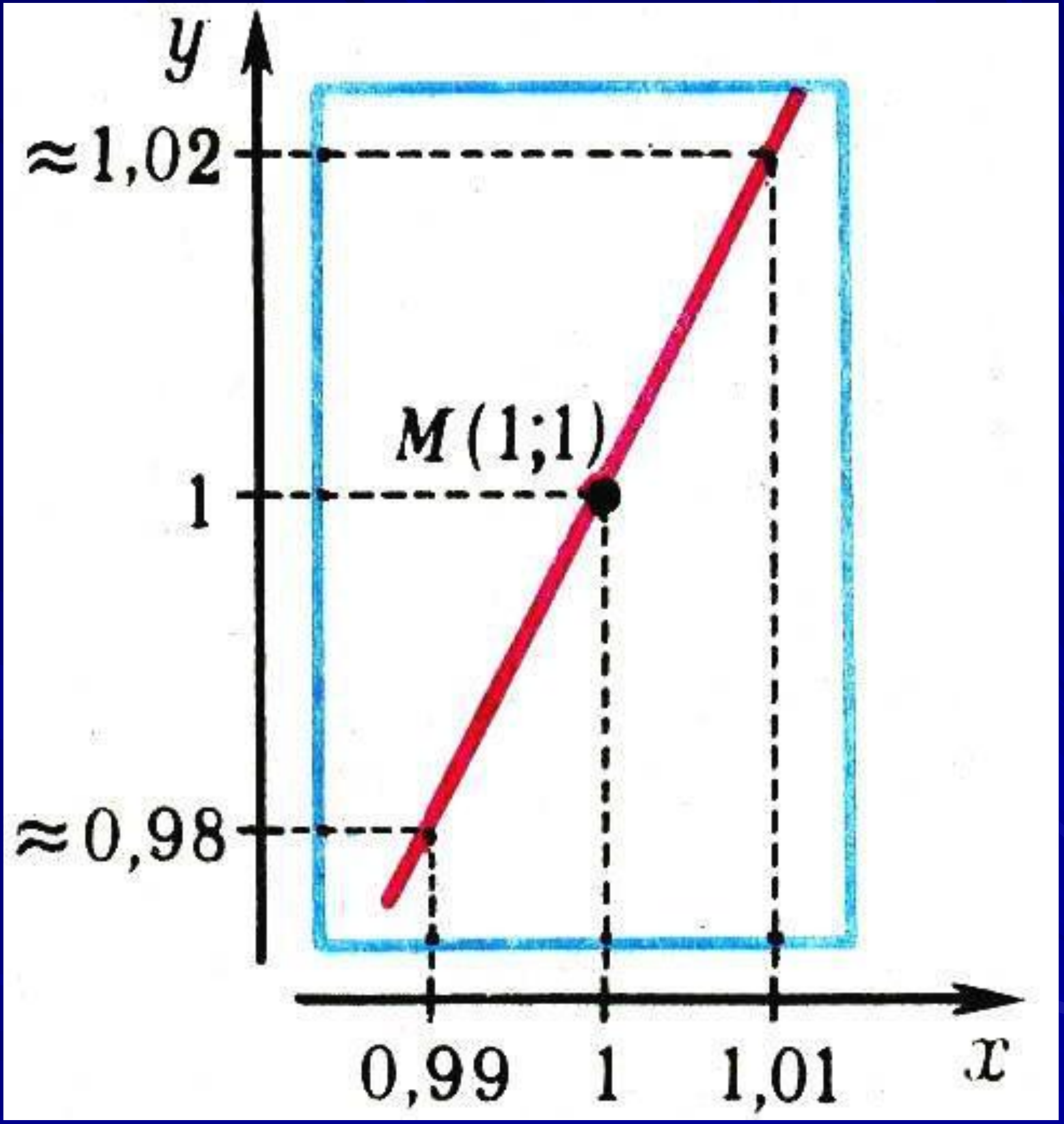


Как изменилась конфигурация графика?



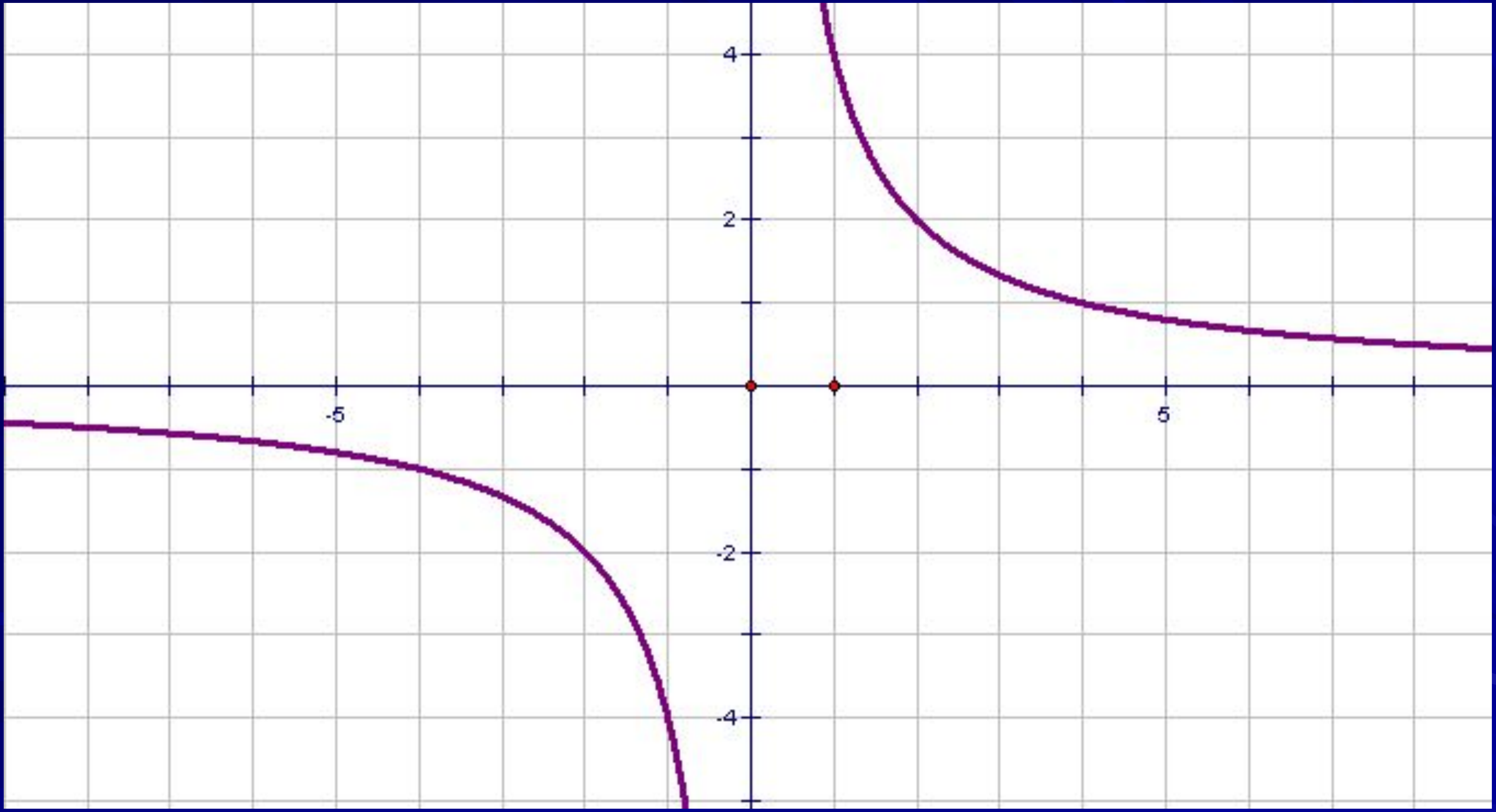
Определите радиус окрестности точки x = 1

Как изменилась конфигурация графика?

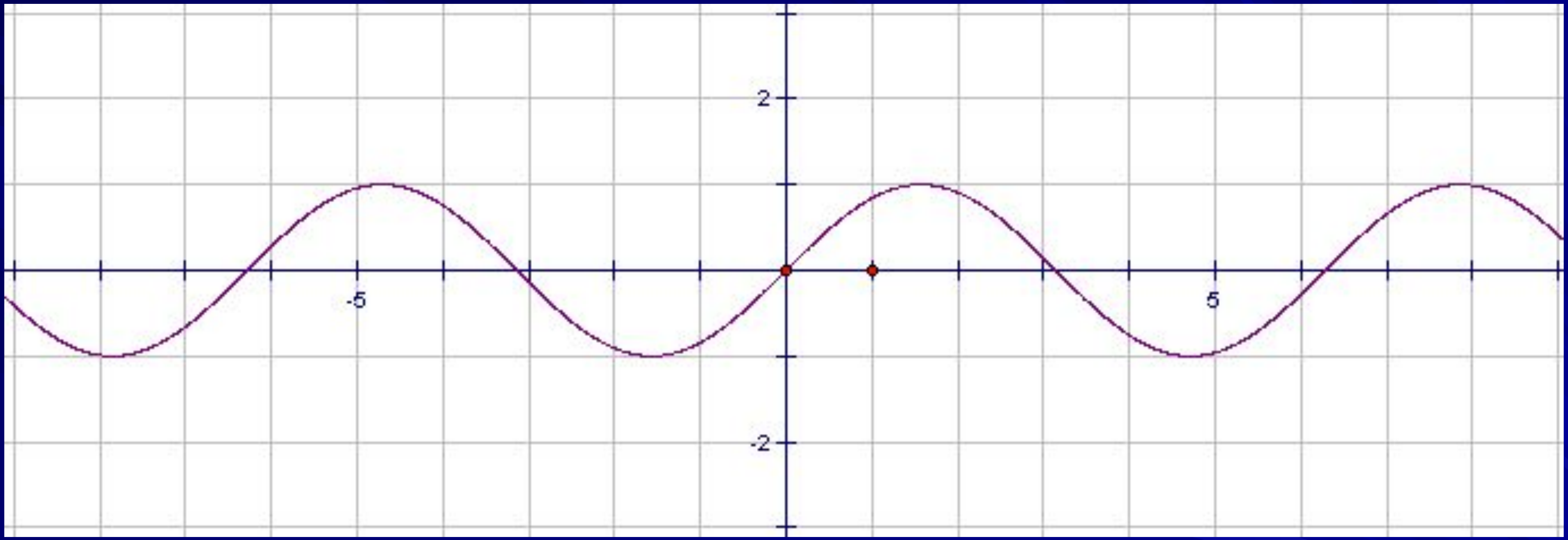


Существуют ли другие функции, графики которых обладают таким же свойством?

$$y = \frac{4}{x}$$



$y = \sin x$



Основные выводы

1. ***Чем крупнее масштаб, тем меньше график функции будет отличаться от некоторой прямой, проходящей через точку М(1;1).***

2. ***То же самое будет происходить с графиком функции вблизи любой другой точки.***

3. ***Этим свойством обладают и многие другие кривые: окружность, гипербола, синусоида и т. д.***

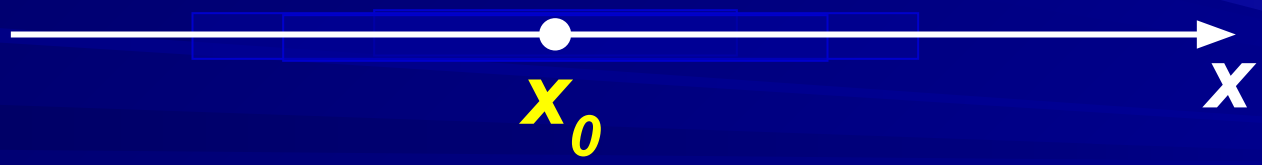
Такое свойство функций называют «линейность в малом»

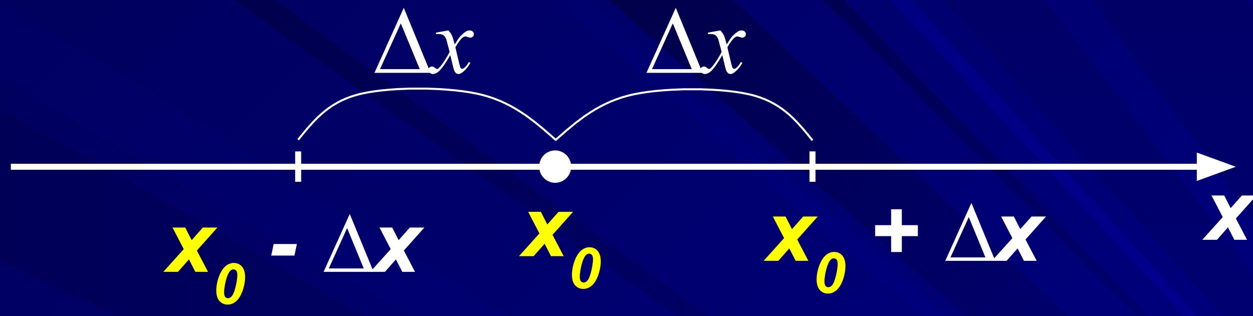
Свойство «линейности в малом».

Выразим это свойство на языке формул.

Как перевести на математический язык слова «увеличить масштаб»?

Радиус окрестности точки x_0 уменьшается.





Изменим x_0 ***на величину*** Δx.

Δx ***- называется приращением аргумента.***

$$x_0 + \Delta x = x$$

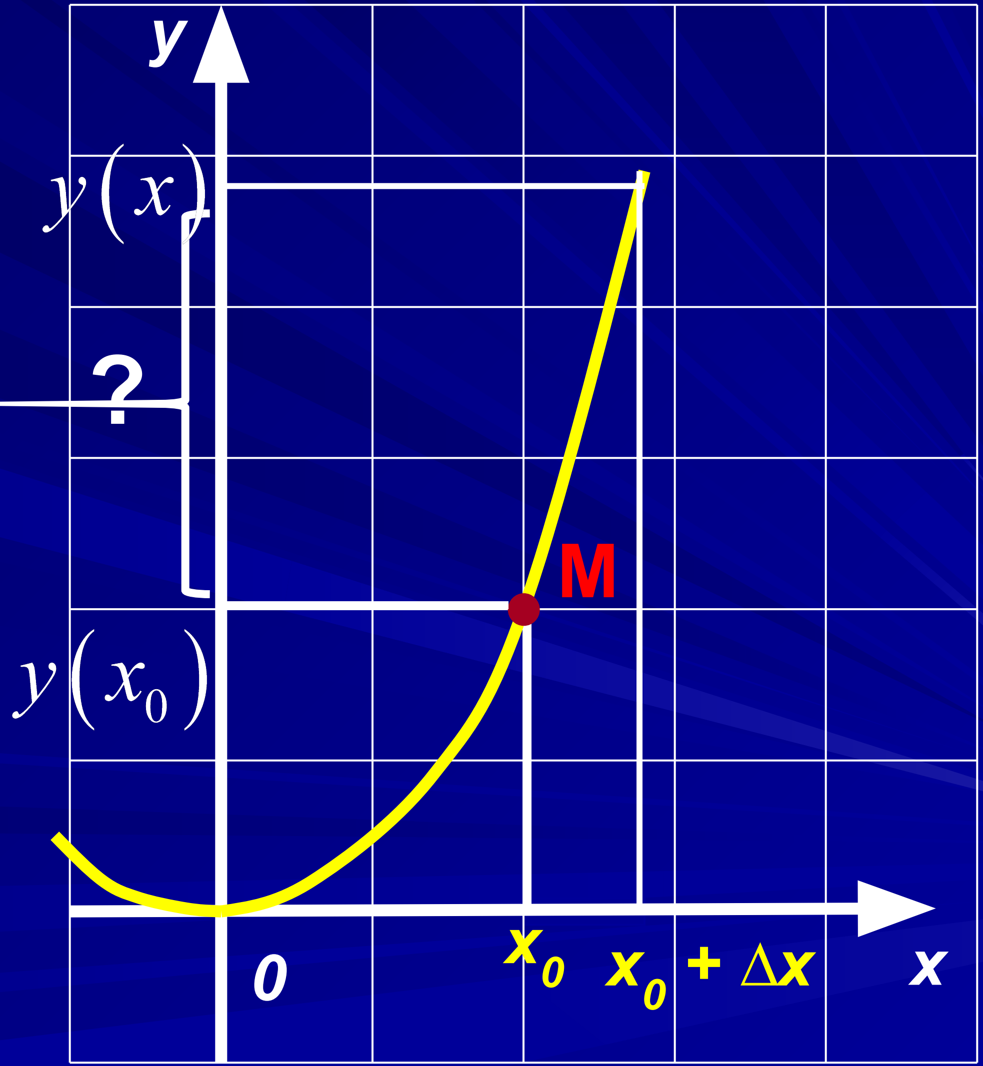
x ***– новое значение аргумента***

На какую величину изменится значение функции $y = x^2$ при переходе от точки x_0 к точке $x = x_0 + \Delta x$?

$$y(x) - y(x_0) =$$

$$(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 =$$

$$= 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$



Величина $y(x) - y(x_0)$ называется приращением функции в точке x_0 и обозначается $\Delta y(x_0)$.

$$\Delta y\left(x_0\right) = y\left(x_0 + \Delta x\right) - y\left(x_0\right)$$

Таким образом, чтобы вычислить приращение функции f(x) при переходе от точки x_0 к точке $x = x_0 + \Delta x$, нужно:

1. *найти значение функции $f(x_0)$;*

2. *найти значение функции $f(x_0 + \Delta x)$*

3. *найти разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$*

Почему график функции $y = x^2$ «выпрямляется», если мы увеличиваем масштаб?

Найдите приращение функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$

$$\Delta y\left(1\right) = y\left(1 + \Delta x\right) - y\left(1\right) = 2 \cdot \Delta x + \left(\Delta x\right)^2$$

Как изменяется слагаемое $(\Delta x)^2$ при приближении к точке $x = 1$?

$(\Delta x)^2$ стремится к нулю быстрее, чем Δx .

Следовательно, при малых значениях Δx величиной $(\Delta x)^2$ можно пренебречь, следовательно

$$\Delta y\left(1\right) \approx 2 \cdot \Delta x$$

С другой стороны

$$\Delta y(1) = y(1+\Delta x) - y(1) = y(x) - y(1) = y - 1,$$

т.к. $1 + \Delta x = x$

Таким образом, $y - 1 \approx 2 \cdot (x - 1).$

$$y \approx 2x - 1$$

Чем меньше Δx, тем теснее в точке М(1;1) парабола примыкает к прямой $y = 2x - 1$.

Или,

парабола касается прямой $y = 2x - 1$ в точке М.

В этом и заключается причина «выпрямления» графика функции $y = x^2$ при увеличении масштаба.

Рассмотрим приращения нескольких функций и выясним, есть ли закономерности в их структуре.

$$\Delta y\left(x_0\right) = y\left(x_0 + \Delta x\right) - y\left(x_0\right)$$

Найдите приращение функции $y = f(x)$ **в точке** x_0 **:**

$$1)\ f(x) = x^3;$$

$$\Delta f(x_0) = 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$2)\ f(x) = 2x - x^2$$

$$\Delta f(x_0) = (2 - 2x_0) \cdot \Delta x - (\Delta x)^2$$

Заметим, что приращения рассмотренных нами функций можно представить в виде суммы двух слагаемых.

Функция	Приращение функции
$f(x)=x^2$	$\Delta f(x_0)=2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$
$f(x)=2x-x^2$	$\Delta f(x_0)=(2-2x_0)\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$
$f(x)=x^3$	$\Delta f(x_0)=3x_0^2\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\cdot(3x_0+\Delta x)$

Определение

Величина α пренебрежимо мала по сравнению

с Δx, если $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0.$$

Функция	Приращение функции
$f(x) = x^2$	$\Delta f(x_0) = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$
$f(x) = 2x - x^2$	$\Delta f(x_0) = (2 - 2x_0) \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$
$f(x) = x^3$	$\Delta f(x_0) = 3x_0^2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 (3x_0 + \Delta x)$

Определение

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой *в точке x_0, если её приращение в этой точке можно представить в виде* $\Delta f\left(x_0\right) = A \cdot \Delta x + \alpha,$ *где α – пренебрежимо мала по сравнению с Δx, A – некоторое действительное число.*

Что такое коэффициент А?

$$\boxed{\Delta f\left(x_0\right) = A \cdot \Delta x + \alpha}$$

Выразим из равенства коэффициент A

$$A = \frac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x} - \frac{\alpha}{\Delta x}$$

$\dfrac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x} = A + \dfrac{\alpha}{\Delta x}$, где $\dfrac{\alpha}{\Delta x}$ - б. м. ф. при $\Delta x \to 0$

Значит, $A = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x}$

по определению предела функции в точке.

Определение

Производной функции y = f(x) в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Операция отыскания производной функции называется дифференцированием.

Рассмотрим пример из физики, который также приводит к понятию производной.

Пусть тело движется по закону $S(t)$

Надо найти скорость движения на промежутке времени $[t_1;t_2]$

$$v_{cp} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Если $t_1 \to t_2$, то $v_{cp} \to v_M$

$$v_M = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$v_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t_1)}{\Delta t}$$

Используя определение, найдите производные функций в точке x_0:

$1)\, y = kx + b;$

$\Delta y\left(x_0\right) = k \cdot \Delta x,$

$\frac{\Delta y\left(x_0\right)}{\Delta x} = k$

$y'\left(x_0\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k$

$2)\, f\left(x\right) = x^2;$

$\Delta f\left(x_0\right) = 2x_0 \cdot \Delta x + \left(\Delta x\right)^2,$

$\frac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x} = \frac{2x_0 \cdot \Delta x + \left(\Delta x\right)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$

$f'\left(x_0\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(2x_0 + \Delta x\right) = 2x_0$

Чтобы найти производную функции в точке, надо:

1. *найти приращение функции в точке* x_0 *;*
2. *найти отношение приращения функции к приращению аргумента;*
3. *вычислить предел полученного отношения при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.*

Найдите производные следующих функций в точке x_0:

Функция	Производная
$f(x) = 2009 - 2x$	$f'(x_0) = -2$
$f(x) = 4x - 0,5x^2$	$f'(x_0) = 4 - x_0$
$f(x) = c,\ c - const$	$f'(x_0) = 0$

Что узнали на уроке?

1) Величина $y(x)-y(x_0)$ называется приращением функции в точке x_0 и обозначается $\Delta y(x_0)$. $\Delta y(x_0)=y(x_0+\Delta x)-y(x_0)$

---

2) Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если её приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha$, где

α – пренебрежимо мала по сравнению с Δx.

---

3) Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремиться к нулю.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

---

4) Чтобы найти производную функции, надо:

1. найти приращение функции в точке;
2. найти отношение приращения функции к приращению аргумента;
3. вычислить предел полученного отношения при условии, что приращение аргумента стремиться к нулю.