# Построение некоторых типов нелинейных моделей

# Нелинейные модели

Линейные модели двух типов:

- линейные по переменным
- линейные по параметрам

**Примеры.**

1. Линейная модель множественной регрессии:

$$Y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + u$$

Является линейной как по переменным, так и по параметрам

2. Производственная функция Кобба-Дугласа:

$$Y = a_0 K^{a_1} L^{(1-a_1)}$$

Является нелинейной как по переменным, так и параметру $a_1$

# Основные типы нелинейных моделей

1.Обобщенная модель нелинейная по переменным

$$Y = a_0 + a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X) + \dots + a_k f_k \qquad (1)$$

2. Степенные функции

$$Y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \qquad (2)$$

3. Показательные функции

$$Y = a_0 e^{a_1 x_1} e^{a_2 x_2} = e^{(a_1 x_1 + a_2 x_2)} \qquad (3)$$

# Обобщенная модель нелинейная по переменным

$$Y = a_0 + a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X) + \ldots + a_k f_k + u \qquad (1.1)$$

Линеаризация обобщенной нелинейной модели

1. Вводятся новые переменные:

$$z_1 = f_1(X); \quad z_2 = f_2(X) \ldots; z_k = f_k(X)$$

2. Подставляя новые переменные в модель (1), получим модель линейную по переменным z:

$$Y = a_0 + a_1 z_1(X) + a_2 z_2(X) + \ldots + a_k z_k(X) + u \qquad (1.2)$$

3. После оценки параметров модели делается обратный переход к модели (1.1)

# Обобщенная модель нелинейная по переменным

**Примеры.**

1. Полиномиальные модели:

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_k x^k + u \qquad (1.3)$$

Новые переменные:

$$z_1 = x; \quad z_2 = x^2; \quad z_3 = x^3; \quad \ldots \quad ; z_k = x^k$$

После перехода к новым переменным получается линейная модель множественной регрессии:

$$Y = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_k z_k + u$$

Оценка и анализ проводится уже известными методами

# Обобщенная модель нелинейная по переменным

1. Полиномиальные модели:

Параболические модели широко применяются

- при моделировании средних и предельных издержек в зависимости от объема выпуска продукции

- при моделировании зависимости прибыли предприятия от расходов на рекламу

Кубические модели

– при моделировании общих издержек в зависимости от объема выпуска продукции

# Обобщенная модель нелинейная по переменным

2. Модели гиперболического типа

$$Y = a_0 + a_1 \frac{1}{X} + u \qquad (1.4)$$

Новая переменная: $z = \frac{1}{X}$

В результате подстановки получим уравнение парной регрессии в виде:

$$Y = a_0 + a_1 z + u$$

# Обобщенная модель нелинейная по переменным

Модели параболического вида нашли применение при моделировании:

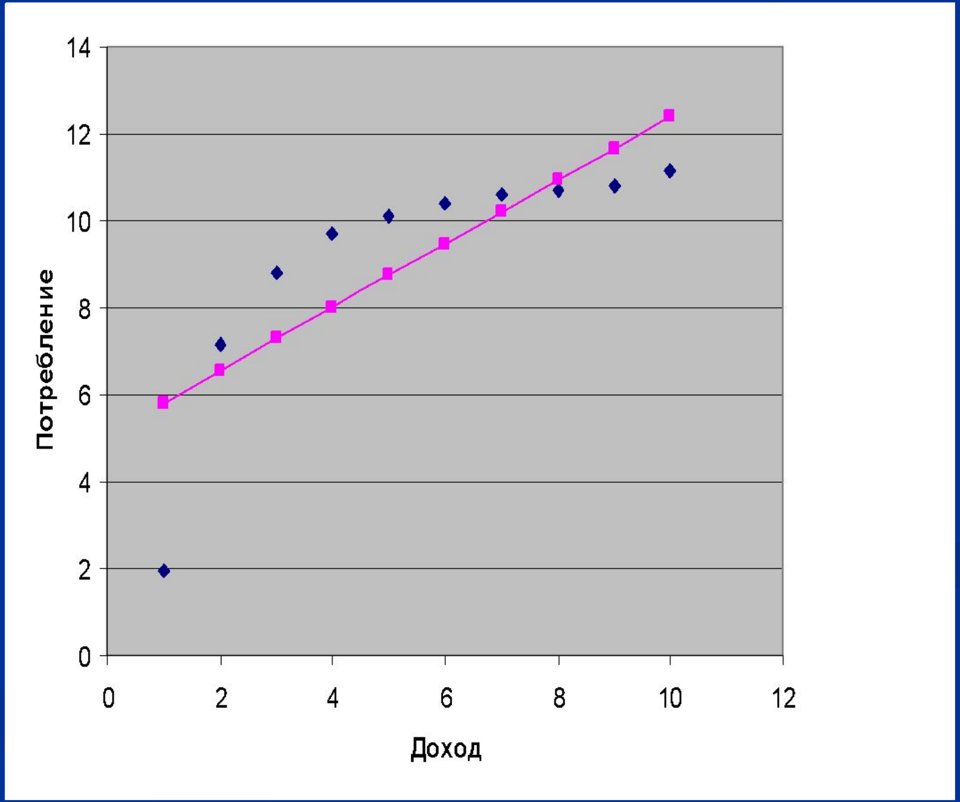
- зависимости спроса от цен
- зависимости спроса от дохода (кривые Энгеля)
- спрос на предметы роскоши от дохода (функции Торнквиста)
- уровня относительного изменения заработной платы в зависимости от относительного изменения уровня безработицы (кривая Филлипса)

# Пример построения функции Энгеля

| Се-мья | Потребление в фунтах (Y) | Доход в (тыс$) | (Z) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,93 | 1 | 1,000 |
| 2 | 7,13 | 2 | 0,500 |
| 3 | 8,78 | 3 | 0,333 |
| 4 | 9,69 | 4 | 0,250 |
| 5 | 10,09 | 5 | 0,200 |
| 6 | 10,42 | 6 | 0,167 |
| 7 | 10,62 | 7 | 0,143 |
| 8 | 10,71 | 8 | 0,125 |
| 9 | 10,79 | 9 | 0,111 |
| 10 | 11,13 | 10 | 0,100 |

1. Построение линейной модели парной регрессии

$$\tilde{Y} = 5.09 + 0.73x \qquad R^2 = 0.64$$
$$(1.23) \quad (0.2) \qquad \sigma_u = 1.79$$



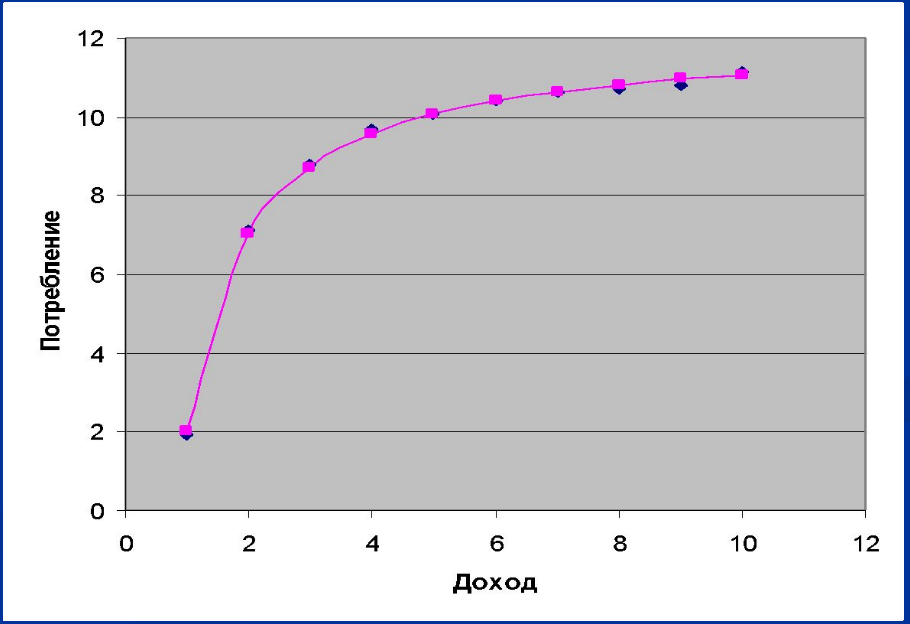
# Пример построения функции Энгеля

| Се-мья | Потребление в фунтах (Y) | Доход в (тыс $) | (Z) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,93 | 1 | 1,000 |
| 2 | 7,13 | 2 | 0,500 |
| 3 | 8,78 | 3 | 0,333 |
| 4 | 9,69 | 4 | 0,250 |
| 5 | 10,09 | 5 | 0,200 |
| 6 | 10,42 | 6 | 0,167 |
| 7 | 10,62 | 7 | 0,143 |
| 8 | 10,71 | 8 | 0,125 |
| 9 | 10,79 | 9 | 0,111 |
| 10 | 11,13 | 10 | 0,100 |

2. Построение гиперболической модели

$$Y = \underset{(0.04)}{12.08} - \underset{(0.12)}{10.08} z \qquad R^2 = 0.9989$$

$$Y = 12.08 - \frac{10.08}{x}$$



# Пример построения функции Энгеля

Меняется экономический смысл параметров модели:

-Линейная модель $a_0$ – минимально необходимое потребление, $a_1$ – предельное потребление

- Гиперболическая модель: $a_0$ – максимальное потребление, $a_1$ – экономической интерпретации не имеет

Предельное потребление равно:

$$\frac{dY}{dx} = -a_1 \frac{1}{x^2}$$

Эластичность:

$$\varepsilon = \frac{dY}{dx} \frac{x}{Y} = -\frac{a_1}{a_0 x + a_1}$$

# Пример временного ряда

3. Временные ряды (динамические модели)

Например вида:

$$Y = a_0 + a_1 f(t) + a_2 sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + a_3 sin\left(\frac{2\pi}{2T} t\right) + a_3 sin\left(\frac{2\pi}{3T} t\right) + u$$

где f(t) – функция временного тренда

T – период внутри которого производится моделирование

# Степенные модели

Степенная модель нелинейна по параметрам

$$Y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}(1+u) \qquad (2.1)$$

1. Метод линеаризации – логарифмирование с последующим введением новых переменных:

$$log(Y) = log(a_0) + a_1 log(x_1) + a_2 log(x_2) + log(1+u) \qquad (2.2)$$

2. Вводятся новые переменные и параметры:

$$Y^* = log(Y) \quad z_1 = log(x_1) \quad z_2 = log(x_2) \quad \varepsilon = log(1+u) \quad b_0 = log(a_0) \quad b_1 = a_1 \quad b_2 = a_2$$

В новых переменных исходное уравнение принимает вид уравнения множественной регрессии:

$$Y^* = b_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2 + \varepsilon \qquad (2.3)$$

# Степенные модели

3. Оцениваются параметры $b_0$, $b_1$, $b_2$ – методом наименьших квадратов и проверяются гипотезы о выполнении предпосылок теоремы Гаусса-Маркова для модели (2.3)

4. Осуществляется возврат к исходной модели (2.1):

$$a_0 = e^{b_0} \quad a_1 = b_1 \quad a_2 = b_2$$

В частном случае, когда в модели присутствует одна экзогенная переменная модель называют двойной логарифмической

# Экономическая интерпретация параметров двойной логарифмической модели

Двойная логарифмическая модель:

$$Y = a_0 x^{a_1} \qquad (2.4)$$

Дифференцируем (2.4) по x

$$\frac{dY}{dx} = a_0 a_1 x^{(a_1 - 1)} = a_0 a_1 x^{(a_1 - 1)} \frac{x}{x} = a_1 \frac{Y}{x}$$

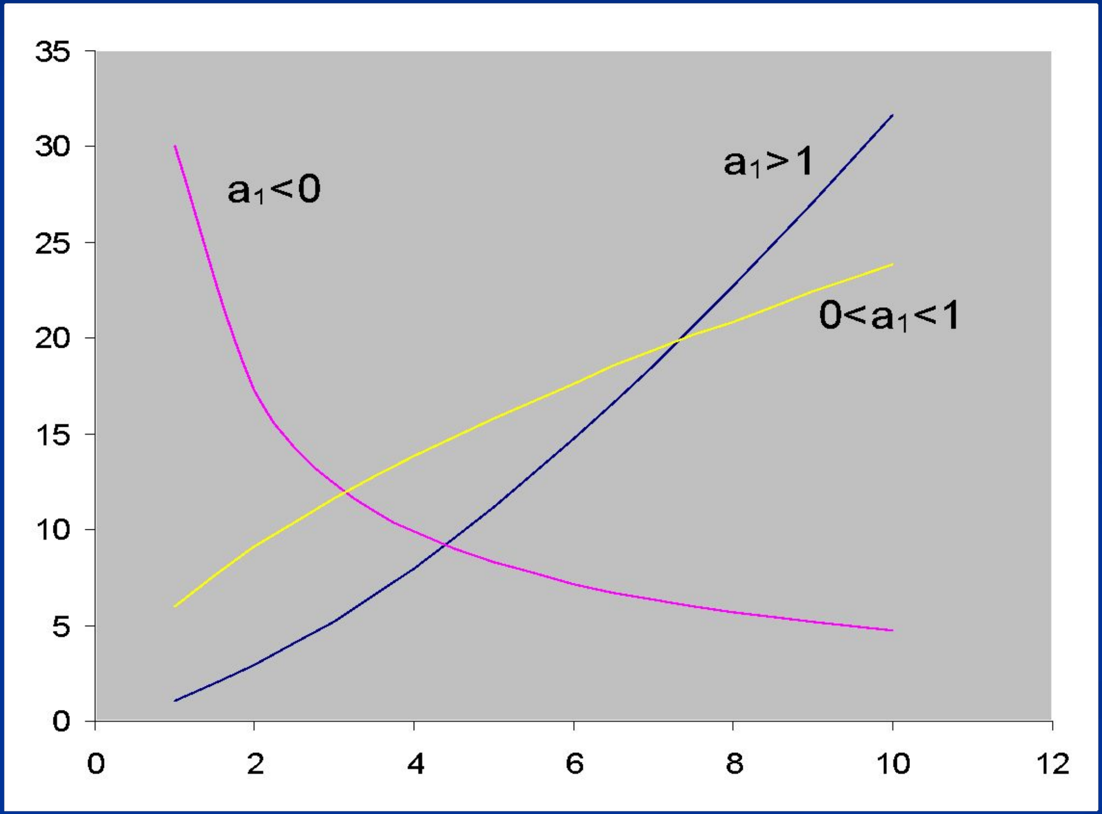
Откуда получаем, что:

$$a_1 = \frac{dY}{dx} \frac{x}{Y}$$

Параметр $a_1$ имеет смысл эластичности переменной Y по переменной x

# Степенные модели

Виды кривых, описываемых с помощью степенных моделей




Степенные модели применяются при моделировании объектов с постоянной эластичностью

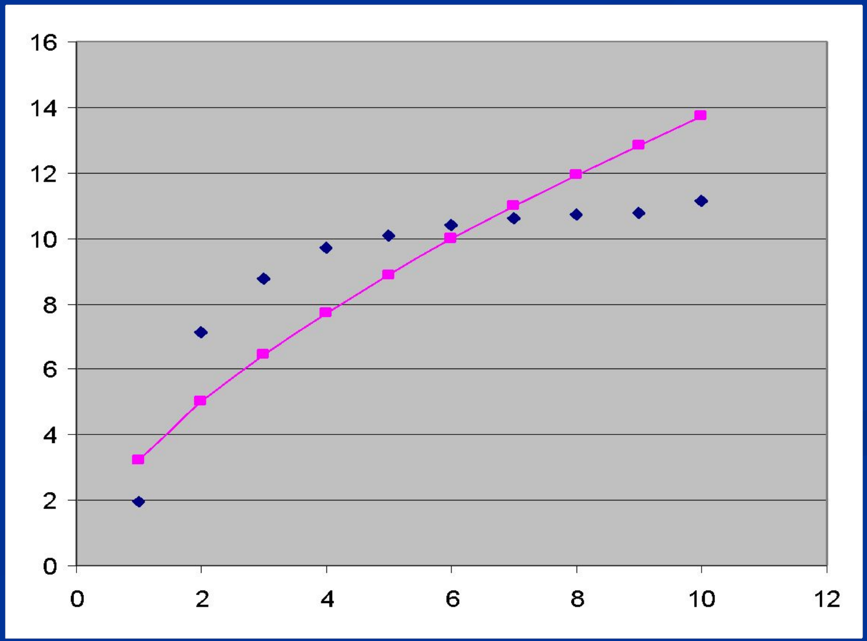
# Пример применения степенной модели

| Потреблениe в Фунтах (Y) | Доход в (тыс $) (X) | Z= ln(x) | Y*= ln(Y) |
|---|---|---|---|
| 1,93 | 1 | 0,000 | 0,658 |
| 7,13 | 2 | 0,693 | 1,964 |
| 8,78 | 3 | 1,099 | 2,172 |
| 9,69 | 4 | 1,386 | 2,271 |
| 10,09 | 5 | 1,609 | 2,312 |
| 10,42 | 6 | 1,792 | 2,344 |
| 10,62 | 7 | 1,946 | 2,363 |
| 10,71 | 8 | 2,079 | 2,371 |
| 10,79 | 9 | 2,197 | 2,379 |
| 11,13 | 10 | 2,303 | 2,410 |

Модель:

$$Y^* = 1.76 + 0{,}627\, ln(z) + \varepsilon \qquad R^2 = 0.747$$

$$Y = 3.24\, X^{0.627}(u) \qquad \sigma_\varepsilon = 0.28$$



# Показательные функции в моделях

Показательная (экспоненциальная) Модель

$$Y = a_0 e^{a_1 X}(1+u) \qquad (3.1)$$

1. Метод линеаризации - логарифмирование

$$ln(Y) = ln(a_0) + a_1 X + ln(1+u) \qquad (3.2)$$

2. Введение новых переменных и параметров:

$$Y^* = ln(Y) \quad b_0 = ln(a_0) \quad b_1 = a_1 \quad \varepsilon = ln(1+u)$$

3. Оценка линейной регрессионной модели

$$Y^* = b_0 + b_1 X + \varepsilon$$

4. Обратный переход к исходной модели (3.1)

# Показательные функции в моделях

Экономическая интерпретация коэффициентов модели

Дифференцируем уравнение (3.1) по X

$$\frac{dY}{dx} = a_0 e^{a_1 x} a_1 = a_1 Y$$

Экономический смысл коэффициента $a_1$ в модели (3.1) – темп роста переменной Y

Коэффициент $a_0$ – начальное значение переменной Y

Показательные функции находят применение при моделировании процессов с постоянным темпом роста

# Полулогарифмические модели

Экспоненциальную модель (3.1) в виде (3.2) называют также полулогарифмической.

К полуэкспоненциальным относят также модель вида:

$$Y = a_0 + a_1 ln(x) + \varepsilon \qquad (3.3)$$

С помощью моделей вида (3.3) описывают процессы, обладающие свойством насыщения. Например, кривые Энгеля для товаров повседневного спроса.

# Кинематические функции Перла-Рида

Вид функции:

$$Y = a_0 e^{a_1 X} x^{a_2}(1+u) \quad (4.1)$$

1. Способ линеаризации - логарифмирование

$$ln(Y) = ln(a_0) + a_1 x + a_2 ln(x) + ln(1+u) \quad (4.2)$$

2. Вод новых переменных

$$Y^* = ln(Y) \quad a^*{}_0 = ln(a_0) \quad z_1 = x \quad z_2 = ln(x) \quad \varepsilon = ln(1+u)$$

3. Переход к модели множественной регрессии в новых переменных

$$Y^* = a_0^* + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \varepsilon \quad (4.3)$$

# Сложная экспоненциальная модель

Общий вид модели

$$Y = e^{\sum\left(a_i f_i(x)\right)}\left(1+u\right) \qquad (5.1)$$

Линеаризация в два этапв:

1. Логарфмирование

$$ln\left(Y\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i\left(X\right) + ln\left(1+u\right) \qquad (5.2)$$

После введения переменной Y*=ln(Y), получится модель типа (1.1)