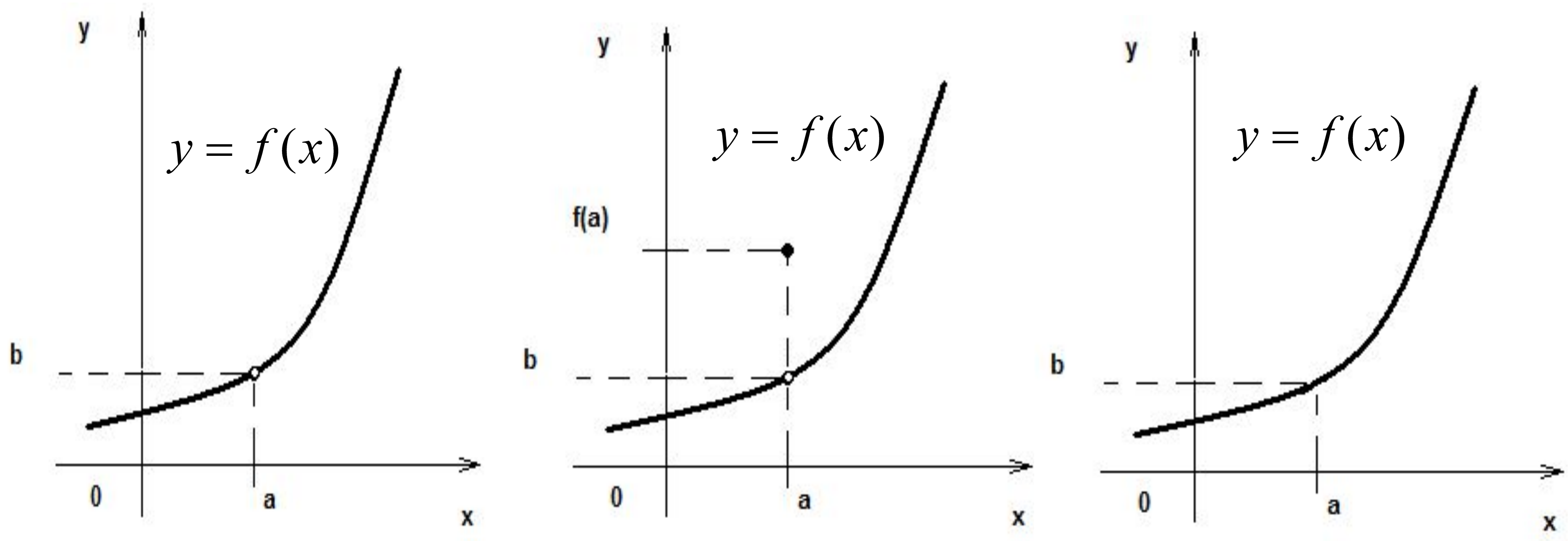
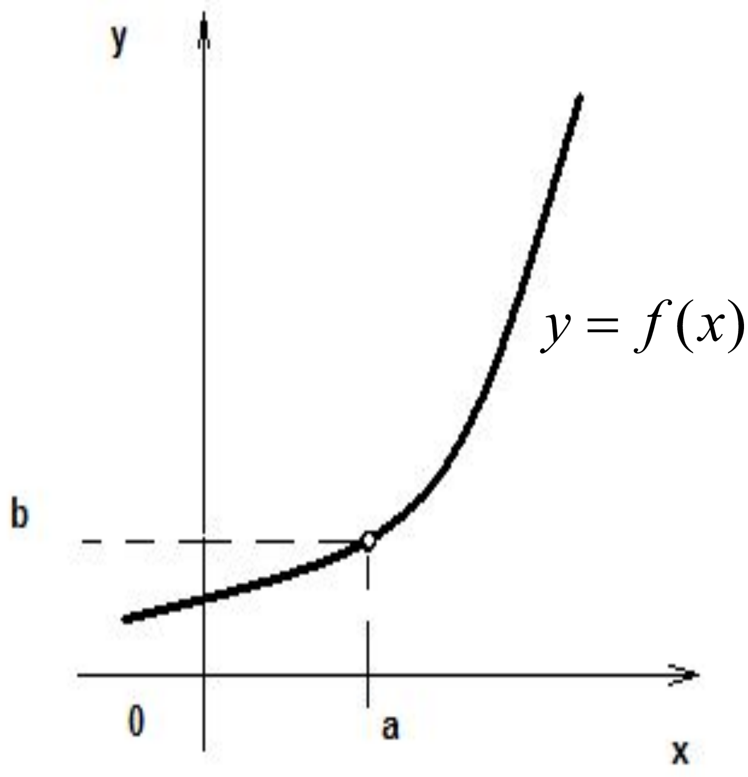
Предел функции в точке

Рассмотрим функции, графики которых изображены на следующих рисунках:

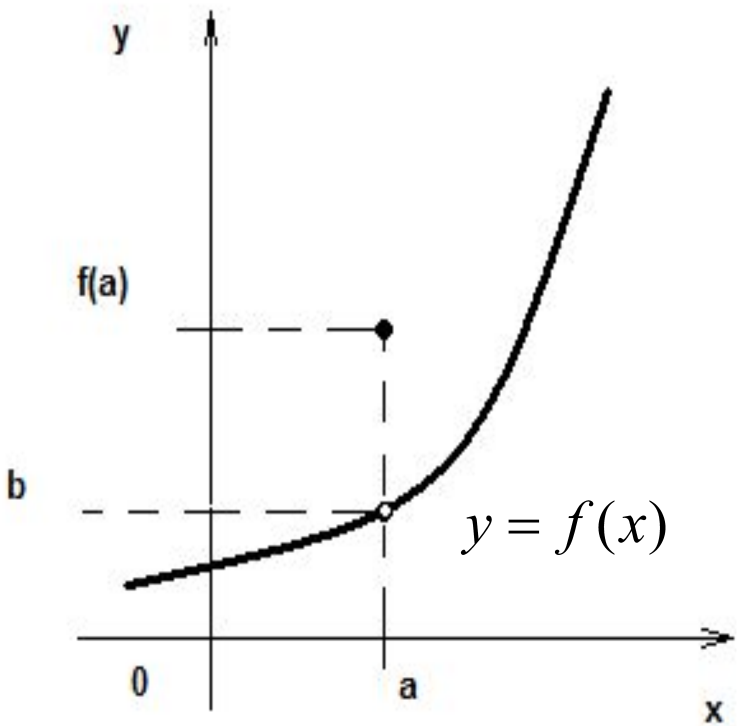


Во всех трех случаях изображена одна и та же кривая, но все же изображают они три разные функции, отличающиеся друг от друга своим поведением в точке $x = a$.

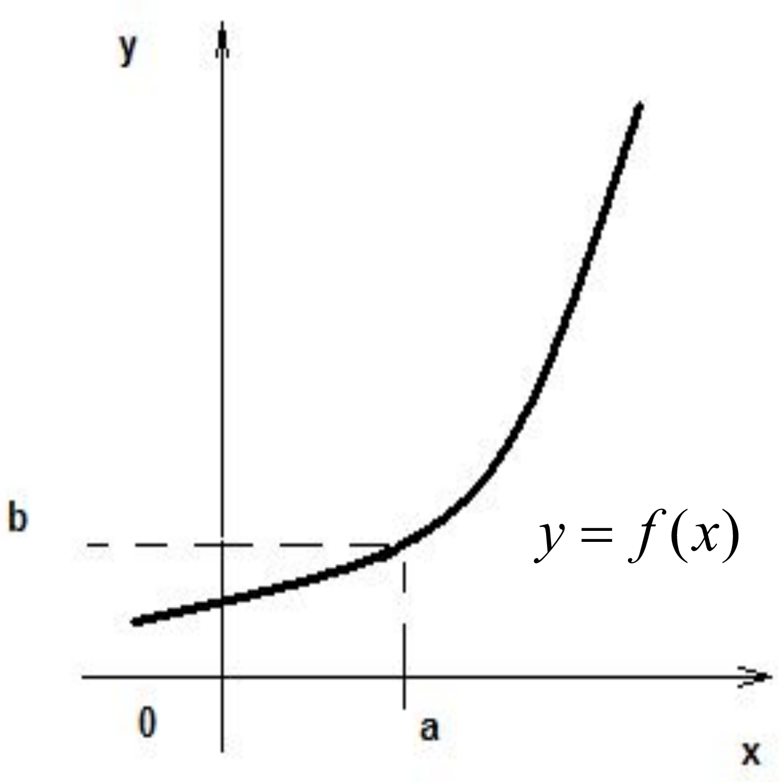
Рассмотрим каждый из этих графиков подробнее:



Для функции $y = f(x)$, график которой изображен на этом рисунке, значение $f(a)$ не существует, функция в указанной точке не определена.



Для функции $y = f(x)$ график которой изображeн на этом рисунке, значение $f(a)$ существует, но оно отличное от, казалось бы, естественного значения b, точка $(a,\ b)$ как бы выколота.



Для функции $y = f(x)$,

график которой изображен на

этом рисунке, значение $f(a)$

существует и оно вполне

естественное.

Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

которую читают: «предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен b ».

Содержательный смысл этой фразы следующий: *если значения аргумента выбирать все ближе и ближе к значению $x = a$, то значения функции все меньше и меньше отличаются от предельного значения b.*

Или можно сказать так: в достаточно малой окрестности точки a справедливо приближенное равенство:

$$f(x) \approx a$$

При этом сама точка $x = a$ исключается из рассмотрения.

Прежде чем перейти к разбору решений примеров заметим, что если предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке $x = a$, то в таком случае функцию называют *непрерывной.*

График такой функции представляет собой сплошную линию, без «проколов» и «скачков».

Функцию $y = f(x)$ *называют* **непрерывной на промежутке** X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Примерами непрерывных функций на всей числовой прямой являются: $y = C$, $y = kx + b$, $y = ax^2 + by + c$, $y = |x|$, $y = x^n$, $n \in \mathrm{N}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на луче $[0, +\infty)$, а функция $y = x^{-n}$, $n \in \mathrm{N}$ непрерывна на промежутках $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. А функции $y = tgx$, $y = ctgx$ непрерывны на каждом промежутке из области их определения.

Математики доказали утверждение, которое мы будем использовать при вычислении пределов функции в точке:

Если выражение $f(x)$ составлено из рациональных, иррациональных, тригонометрических выражений, то функция $y = f(x)$ непрерывна в любой точке, в любой точке, в которой определено выражение $f(x)$.

Примеры

Вычислить:

$$а)\ \lim_{x\to 1}(x^2-3x+5);\quad б)\ \lim_{x\to 2}\frac{\cos\frac{2\pi}{x}}{3x-1};\quad в)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3}.$$

Решение.

Выражение (x^2-3x+5) определено в любой точке x, в частности, в точке $x=1$. Следовательно, функция $y=x^2-3x+5$ непрерывна в точке $x=1$, а потому предел функции при стремлении x к 1 равен значению функции в точке $x=1$.

Имеем: $$\lim_{x\to 1}(x^2-3x+5)=1^2-3\cdot 1+5=3.$$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos\dfrac{2\pi}{x}}{3x-1}$.

Решение.

Выражение $f(x)=\dfrac{\cos\dfrac{2\pi}{x}}{3x-1}$ определено в любой точке x, за исключением $x=0$ и $x=\dfrac{1}{3}$. В частности, в точке $x=2$ функция определена. Следовательно, функция $f(x)=\dfrac{\cos\dfrac{2\pi}{x}}{3x-1}$ непрерывна в точке $x=2$, а потому предел функции при стремлении x к 2 равен значению функции в точке $x=2$.

Имеем: $$\lim_{x\to 2}\frac{\cos\dfrac{2\pi}{x}}{3x-1}=\frac{\cos\pi}{3\cdot 2-1}=\frac{-1}{5}=-0{,}2.$$

$$в)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3}.$$

Решение.

Выражение $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-3}$ не определено в точке $x=3$, поскольку при подстановке этого значения переменной в заданное выражение, то и в числителе, и в знаменателе получится 0, а на 0 делить нельзя.

Однако, заданную алгебраическую дробь можно сократить

$$\frac{x^2-3x}{x-3}=\frac{x(x-3)}{x-3}=x.$$

Значит, функции $y=\dfrac{x^2-3x}{x-3}$ и $y=x$ тождественны при условии $x\neq 3.$ Но при вычислении предела функции при $x\to 3$ саму точку $x=3$ можно исключить из рассмотрения (об этом говорилось выше). Поэтому:

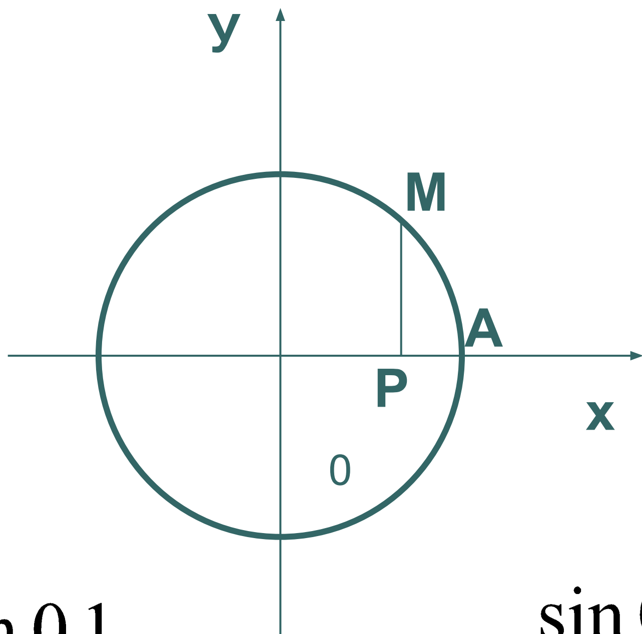
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3}=\lim_{x\to 3}x=3.$$

Первый замечательный предел

В математике есть пределы, вычисление которых довольно громоздко, поэтому некоторые пределы берут как табличные.

Рассмотрим один из таких пределов.

Возьмем числовую окружность, выберем достаточно малое $t > 0,$ отметим на окружности точку $M(t)$ и её ординату, т. е. $\sin t,$ t - это длина дуги $AM,$ $\sin t,$ - это длина перпендикуляра $MP.$



Для достаточно малых значений t выполняется равенство $AM = MP,$ т. е. $\sin t \approx t,$ и, следовательно, $\frac{\sin t}{t} \approx 1.$

Например, $\frac{\sin 1}{1} \approx 0{,}84147;$

$\frac{\sin 0{,}1}{0{,}1} \approx 0{,}99833;$ $\frac{\sin 0{,}01}{0{,}01} \approx 0{,}99998.$

Так вот, в математике доказано, что $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$

Практические задания

Выполни из предлагаемого задачника следующие упражнения:

678; 679(а, б);

680(а, б);681(б, г);

682 (а, б); 683(а, б);

684(а, б); 686.