

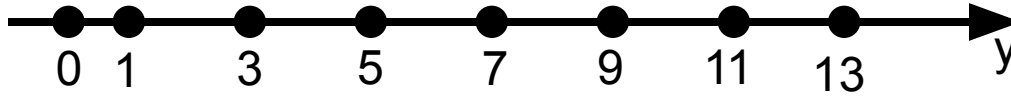
# Предел последовательности и предел функции



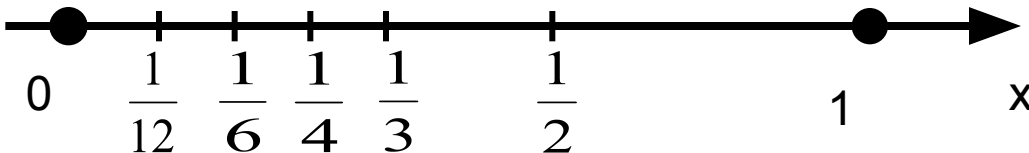
# Предел последовательности

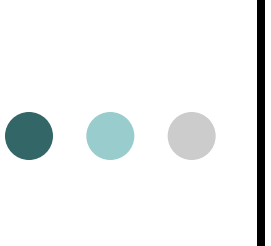
Рассмотрим две числовые последовательности  $(y_n)$  и  $(x_n)$  и изобразим их члены точками на координатной прямой.

$$(y_n): 1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n - 1, \dots;$$



$$(x_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

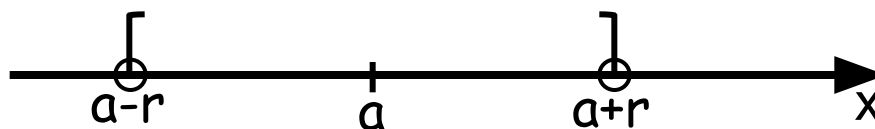




Обрати внимание, что члены последовательности  $(x_n)$  как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности  $(y_n)$  такой точки нет. В подобных случаях говорят, что последовательность  $(x_n)$  сходится, а последовательность  $(y_n)$  расходится.

Чтобы узнать является ли конкретная точка, взятая на прямой, «точкой сгущения» для членов заданной последовательности, введем следующее понятие.

● ● ● | Определение 1. Пусть  $a$  – точка прямой, а  $r$  – положительное число. Интервал  $(a-r; a+r)$  называют окрестностью точки  $a$ , а число  $r$  – радиусом окрестности.



*Пример.*  $(3,97; 4,03)$  – окрестность точки 4, радиус равен 0,03.

В математике «точку сгущения» для членов заданной последовательности принято называть «пределом последовательности».

**Определение 2.** Число  $b$  называют пределом последовательности  $(y_n)$ , если в любой заранее выбранной окрестности точки  $b$  содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Обозначение: 1.  $y_n \rightarrow b$  ( $y_n$  стремится к  $b$  или  $y_n$  сходится к  $b$ );

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  (предел последовательности  $y_n$  при стремлений  $n$  к бесконечности равен  $b$ )

# Примеры

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  ;

2. Если  $|q| < 1$  Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  Если то

⋮

$|q| > 1$

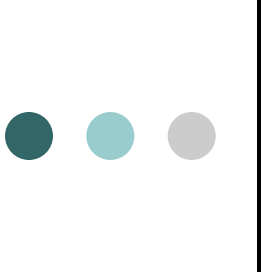
$q^n$

Если то последовательность

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$  то последовательность

Если то последовательность

расходится.

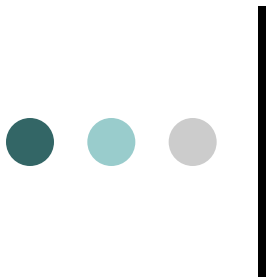


Обсудим результаты, полученные в примерах с геометрической точки зрения. Для этого построим графики последовательностей:

$$y_n = \frac{1}{n},$$

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$y_n = \frac{2n}{n+1}.$$



$$y_n = \frac{1}{n}$$

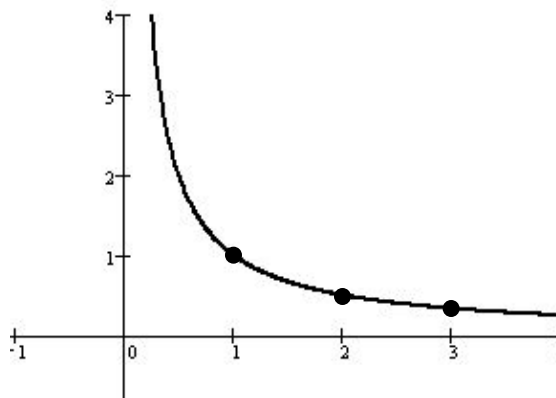


Рис. 1

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

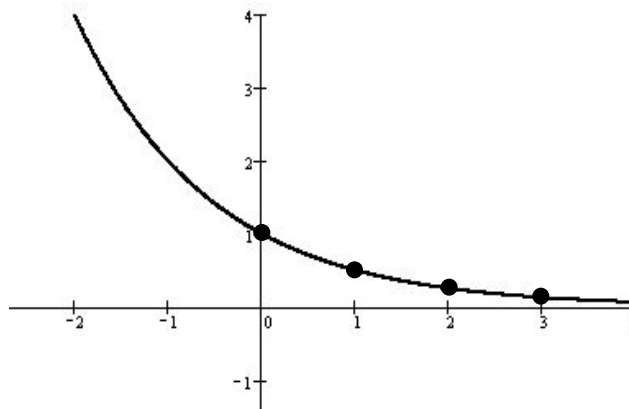


Рис. 2

$$y_n = \frac{2n}{n+1}$$

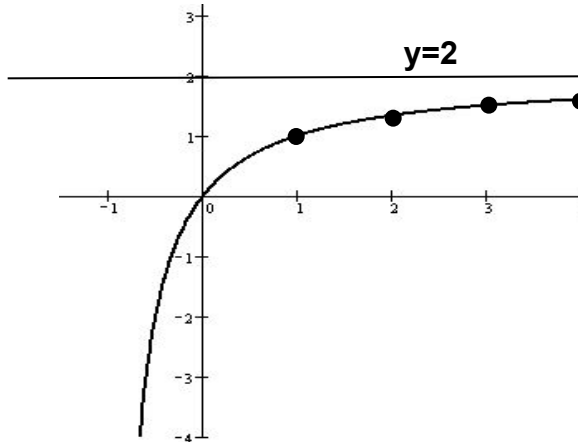


Рис. 3

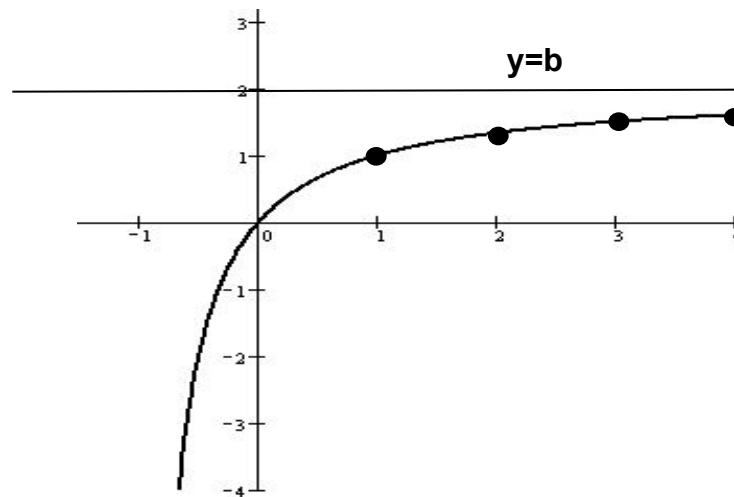


● ● ● Обрати внимание, что на всех трех рисунках точки графика, по мере их ухода вправо, все ближе и ближе подходят к некоторой горизонтальной прямой:

- на рис 1 – к прямой  $y=0$ ,
- на рис 2 – к прямой  $y=0$ ,
- на рис 3 – к прямой  $y=2$ .

Каждую из этих прямых называют *горизонтальной асимптотой* графика.

Вообще равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = b$  означает, что прямая  $y = b$  является горизонтальной асимптотой графика последовательности,  $y_n = f(n)$  т.е. графика функции  $y = f(x), x \in \mathbb{N}$ .





# Свойства сходящихся последовательностей

*Свойство 1.* Если последовательность сходится, то только к одному пределу.

*Свойство 2.* Если последовательность сходится, то она ограничена, обратное неверно.

*Свойство 3.* Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.



# Вычисление пределов последовательности

I. Предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности:

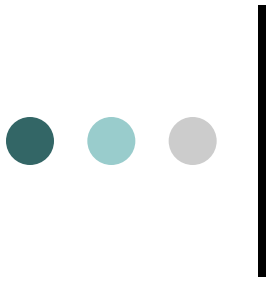
$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$$

● ● ● | Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ .

II. Предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = b + a$$

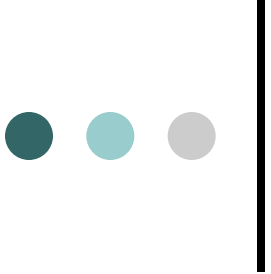
Пример.



III. Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = b \cdot a$$

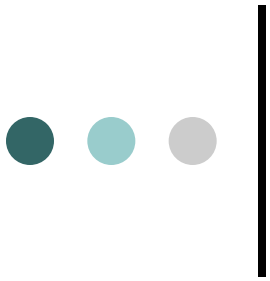
Пример.



IV. Предел частного равен частному от пределов (при условиях, что  $y_n \neq 0, \forall n, a \neq 0$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{b}{a}$$

**Пример.**

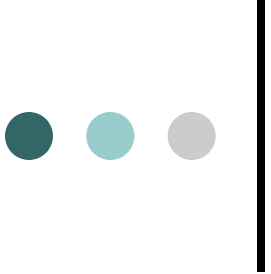


V. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} kx_n = kb$$

Пример.





# Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$

Вычислим суммы двух, трех и т.д. членов прогрессии:  $S_1 = b_1;$

$$S_2 = b_1 + b_2;$$

$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3;$$

...

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n;$$

...



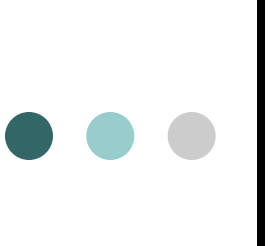
Получилась последовательность

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

Она может сходиться или расходиться. Если последовательность сходится к пределу  $S$ , то число  $S$  называется суммой геометрической прогрессии. Если расходится, то о сумме геометрической прогрессии не говорят.

Формула суммы первых  $n$  членов геометрической прогрессии следующая:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$



**Теорема.** Если знаменатель  $q$   
геометрической прогрессии  $(b_n)$   
удовлетворяет неравенству  $|q| < 1$  ,  
то сумма  $S$  прогрессии вычисляется  
по формуле

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

**Пример.**



# Предел функции

1. Предел функции на бесконечности.
2. Предел функции в точке.

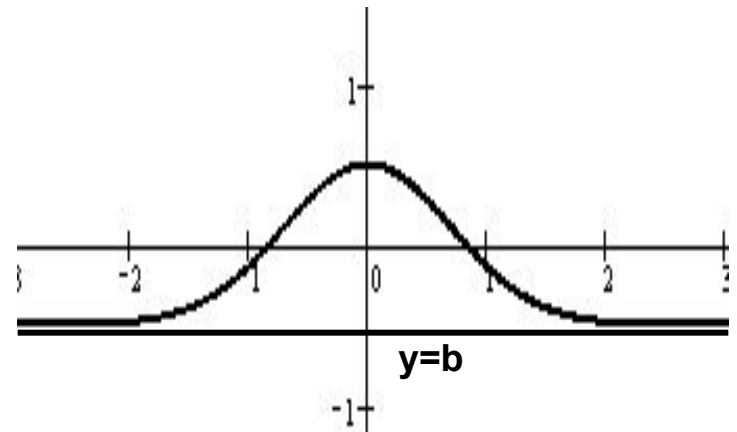
# Предел функции на бесконечности

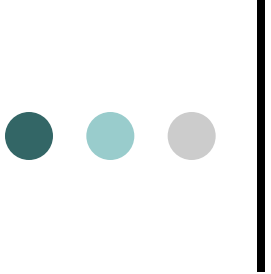
Пусть дана функция  $y = f(x)$ ,  
в области определения  
которой содержится отрезок  
 $(-\infty; +\infty)$ , и пусть прямая  $y = b$

Является горизонтальной  
асимптотой графика функции

тогда  $y = f(x)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{+\infty}{-\infty}} f(x) = b \text{ ИЛИ } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b.$$

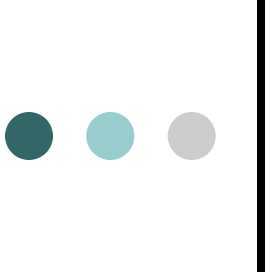




# Вычисление предела функции на бесконечности

1. Для  $\frac{k}{x^m}$  справедливо соотношение  $\forall m \in \mathbb{N}$  и  $\forall k$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{k}{x^m} \right) = 0$$



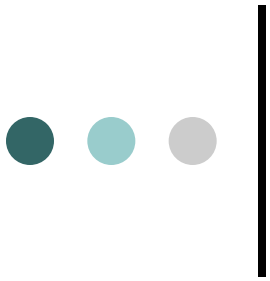
2. Если  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = a$ , то

а) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = b + a$$

б) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot a$$



в) предел частного равен частному от пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{b}{a}$$

г) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} kf(x) = kb$$



Пример.



# Предел функции в точке

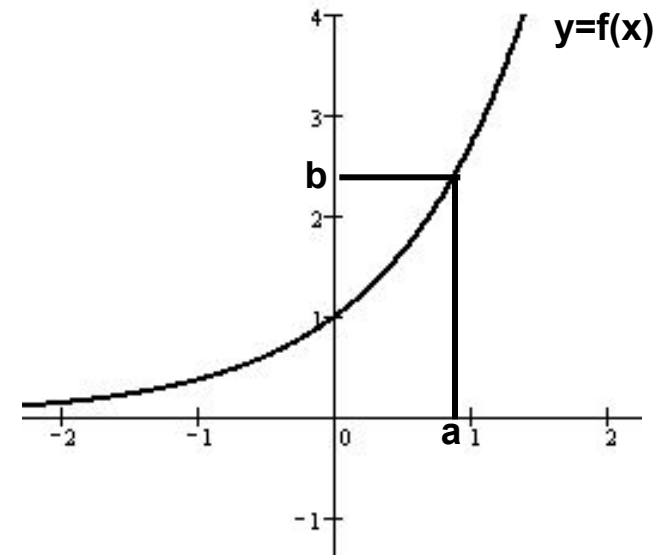
Пусть дана функция  $y = f(x)$

и пусть дана точка  $x = a$ .

Пусть значение функции в этой точке существует и равно  $b$ , тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

(читают: предел функции  $y = f(x)$ , при стремлении  $x$  к  $a$  равен  $b$ )



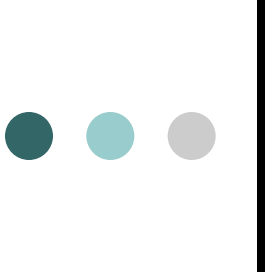
Пример.



# Проверь себя!

Дорогой друг, теперь тебе предстоит проверить свои знания. Для этого нужно ответить на тест, который состоит из 10 вопросов, К каждому вопросу дается на выбор три ответа, один из которых верный.

**Желаю удачи!**

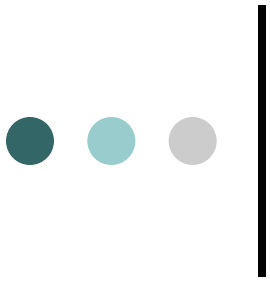


1. Окрестность какой точки является интервал  $(2,1; 2,3)$ ?

а) 2;

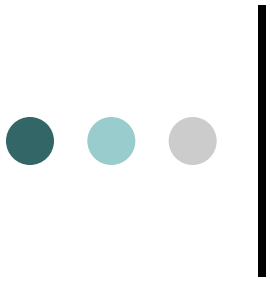
б) 2,15;

в) 2,2.



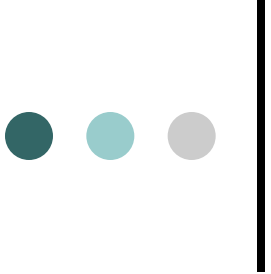
# Неверно!

[Попробуй еще!](#)



**Верно!**

[Дальше!](#)

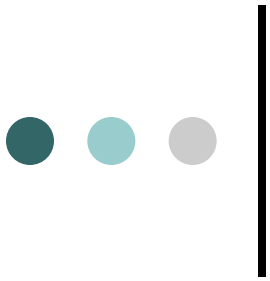


2. Интервал  $(7; 5)$  окрестность точки 6, чему равен радиус этой окрестности?

а) 2;

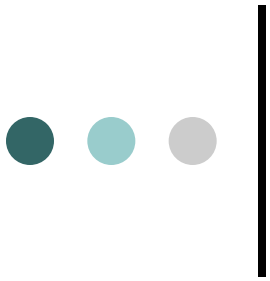
б) 1;

в) 1,5.



# Неверно!

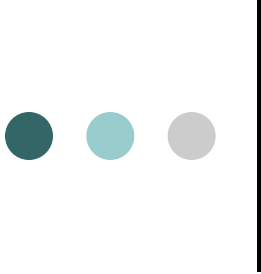
[Попробуй еще!](#)



**Верно!**

[Дальше!](#)

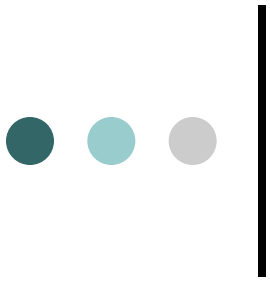




3. Последовательность  
является:

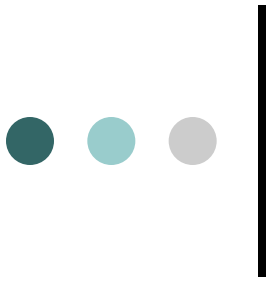
$$y_n = \frac{1}{2n}$$

- а) сходящейся;
- б) расходящейся;
- в) ничего определенного сказать  
нельзя.




# Неверно!

[Попробуй еще!](#)



**Верно!**

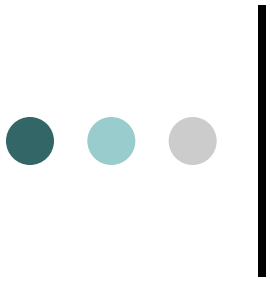
[Дальше!](#)



4. Число  $b$  называют пределом  
последовательности  $(y_n)$ ,  
если:

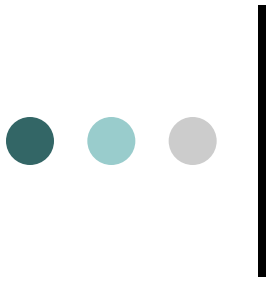
а) в любой окрестности точки  $a$  в любой окрестности точки  $b$  в любой окрестности точки  $b$  содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера;

б) в любой окрестности точки  $b$  в любой окрестности точки  $b$  в любой окрестности точки  $b$  содержатся некоторые члены последовательности, начиная с некоторого номера;




# Неверно!

[Попробуй еще!](#)



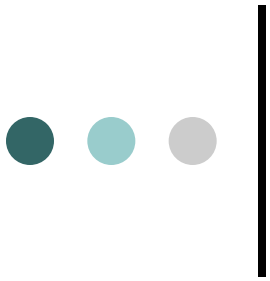
# Верно!

[Дальше!](#)



5. Равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = b$  означает, что прямая  $y = b$  является для графика  $y_n = f(n)$  :

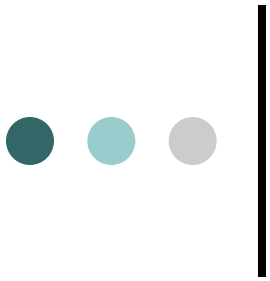
- а) горизонтальной асимптотой;
- б) вертикальной асимптотой;
- в) наклонной асимптотой.



# Неверно!

[Попробуй еще!](#)





**Верно!**

[Дальше!](#)



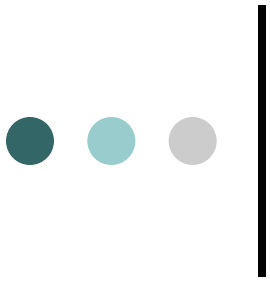
## 6. Какое из утверждений верно?

- а) если последовательность имеет предел, то она монотонна;
- б) если последовательность не монотонна, то она не имеет предела;
- в) если последовательность ограничена, то она имеет предел.



# Неверно!

[Попробуй еще!](#)



**Верно!**

[Дальше!](#)



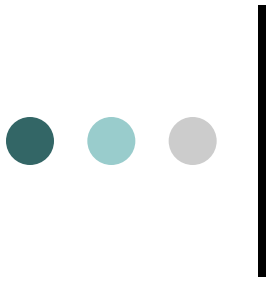
## 7. Предел последовательности

$y_n = \frac{(2n+1)(n-3)}{n^2}$  равен:

а) 0;

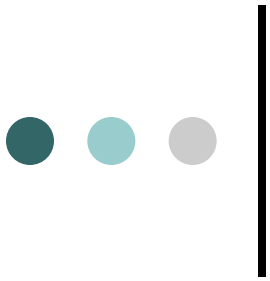
б) 1;

в) 2.



# Неверно!

[Попробуй еще!](#)



**Верно!**

[Дальше!](#)



## 8. Сумма геометрической прогрессии

27, 9, 3,  $\frac{1}{3}, \dots$ , равна:

а) 40;

б) 41;

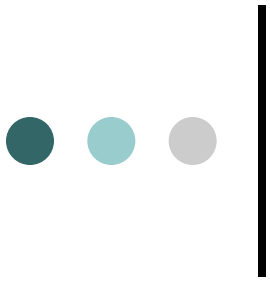
в) 40,5.





# Неверно!

[Попробуй еще!](#)



**Верно!**

[Дальше!](#)



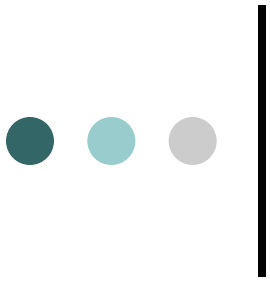
9. Найти

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 9}{6x - 1} :$$

а) 0;

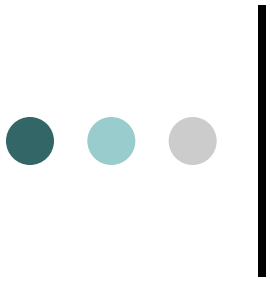
б)  $1\frac{1}{6}$  ;

в)  $2\frac{1}{6}$  .



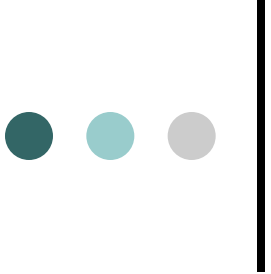
# Неверно!

[Попробуй еще!](#)



**Верно!**

[Дальше!](#)



**10. Найти**  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5)$ :

а) 1;

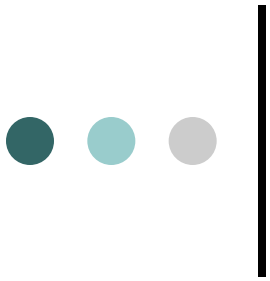
б) 3;

в) 2.



# Неверно!

[Попробуй еще!](#)



# Верно!

[Дальше!](#)





*КОНЕЦ*



Пример. Найти предел последовательности

$$y_n = \frac{1}{n} + 3.$$

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + 3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 0 + 3 = 3$$



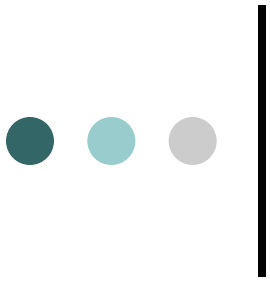


**Пример.** Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 1}$ .

**Решение.** Делим числитель и знаменатель дроби почленно на наивысшую из имеющихся степень переменной  $n$ , т.е. на  $n^2$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{2 + 0}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2$$





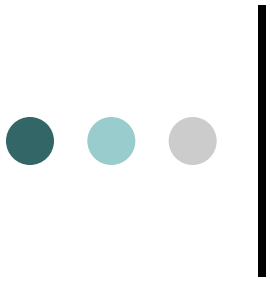
Пример. Найти предел последовательности

$$y_n = \frac{1}{n^2}$$

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$$





**Пример.** Найти предел последовательности

$$y_n = \frac{5}{n}.$$

**Решение.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 5 \cdot \frac{1}{n} \right) = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) = 5 \cdot 0 = 0$$





**Пример.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12}$ .

**Решение.**

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{4} = \frac{-3 - 3}{4} = -1,5.$$

**Ответ:** -1,5.



● ● ● | **Дано**  $(y_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

| **Доказать**, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**Решение.** Возьмем любую окрестность точки 0, с радиусом  $r$ . Подберем натуральное число  $n_0$  так, чтобы выполнялось неравенство  $\frac{1}{n} < r$

Если например,  $r=0,001$ , то в качестве  $n_0$  можно взять 1001; если  $r = \frac{3}{5774}$ , то  $n_0=5774$ .

Член данной последовательности с номером  $n_0$  попадает в выбранную окрестность точки 0. В этой же окрестности будут находиться все последующие члены, тогда по определению 2 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$



**Пример.** Найти сумму геометрической

прогрессии  $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

**Решение.** Здесь  $b_1 = 4, q = \frac{1}{2}$ . Так как знаменатель прогрессии удовлетворяет

неравенству  $|q| < 1$ , то воспользовавшись

формулой  $S = \frac{b_1}{1 - q}$ , получим

$$S = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = 8$$

**Ответ:**

$$S = 8.$$





● ● ● | **Если**  $|q| < 1$  , **то**  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

Пусть  $q = \frac{1}{2}$  , получим  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots$

По аналогии с первым примером, здесь последовательность сходится к 0, значит

·

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

**Если**  $|q| < 1$  , **то** последовательность  $q^n$  **расходится.**

Пусть  $q = 2$  , получим  $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^n, \dots$  Эта последовательность явно не имеет предела, значит она расходится.



Дана последовательность  $\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \dots, \frac{2n}{n+1}, \dots$   
найти ее предел.

Выполним некоторые преобразования выражения

$$\frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2-2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{2}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}$$

Это значит, в частности, что  $\frac{2}{2} = 2 - \frac{2}{1+1}$ ;  $\frac{4}{3} = 2 - \frac{2}{2+1}$ ;  
 $\frac{6}{4} = 2 - \frac{2}{3+1}$ ;  $\frac{8}{5} = 2 - \frac{2}{4+1}$  и т. д.,

Данную последовательность перепишем так:

$$2 - \frac{2}{2}, 2 - \frac{2}{3}, 2 - \frac{2}{4}, 2 - \frac{2}{5}, \dots, 2 - \frac{2}{n+1}, \dots$$

Видно, что «точкой сгущения» является 2, значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$





Рассмотрим пример.

Дана последовательность  
 $(x_n) = 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3, \dots$

Эта последовательность  
ограничена, но не является  
сходящейся.



● ● ● | **Пример.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4} \right)$ .

**Решение.** Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на  $x^2$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{2 + 0}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2$$



**Ответ:** 2.