

# 6. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

# 6.1. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

*Если каждому натуральному числу  $n$  по некоторому закону поставлено в соответствие определенное число  $a_n$ , то говорят, что задана числовая последовательность*

$$\{a_n\} = a_1, a_2 \dots a_n$$

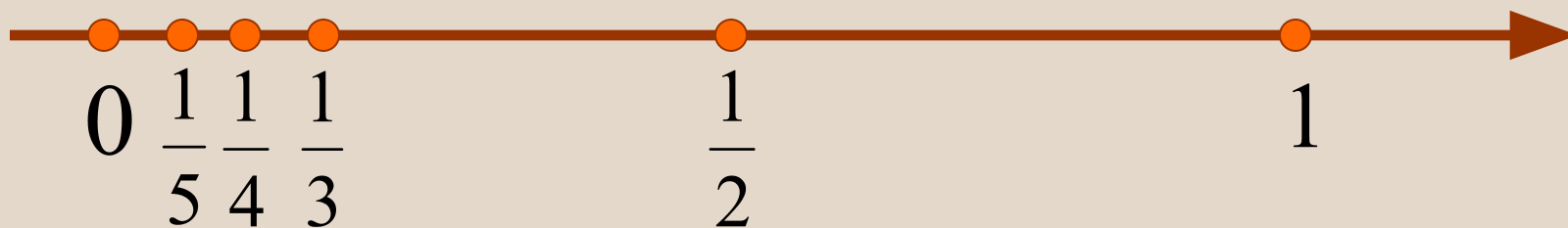
Числа  $a_1, a_2 \dots a_n$  называются членами последовательности, а число  $a_n$  называется общим членом или  $n$ -ым членом данной последовательности.

Например:

1  $2, 4, 6, 8 \dots 2n \dots$

2  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \frac{1}{n} \dots$

**Изобразим члены последовательности (2) точками на числовой оси.**



**Можно заметить, что члены последовательности с ростом  $n$  сколь угодно близко приближаются к нулю.**

*Последовательность  $\{a_n\}$  называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число  $M$  ( $m$ ), что любой элемент этой последовательности удовлетворяет неравенству:*

$$a_n \leq M$$

$$a_n \geq m$$

*Последовательность  $\{a_n\}$  называется  
ограниченной, если она ограничена  
сверху и снизу:*

$$m \leq a_n \leq M$$

Последовательность (1) ограничена снизу, но не сверху.

Последовательность (2) ограничена, т.к. все ее элементы находятся внутри промежутка  $[0,1]$ .

Если выполняется условие

$$a_n \leq a_{n+1}$$

то последовательность называется возрастающей.

Если выполняется условие

$$a_n \geq a_{n+1}$$

то последовательность называется убывающей.

Последовательность (1) возрастающая.

Последовательность (2) убывающая.

*Число  $A$  называется пределом числовой последовательности  $\{a_n\}$ , если для любого, сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$ , найдется такой номер  $N$ , что при всех  $n > N$ , выполняется неравенство:*

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

**Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся.**

**В противном случае последовательность расходящаяся.**

*Смысл определения предела числовой последовательности:*

*Для достаточно больших номеров  $n$  члены последовательности очень мало отличаются от числа  $A$  (меньше, чем на число  $\varepsilon$ , каким бы малым оно не было).*

***ПРИМЕР.***

*Дана последовательность*

3

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \dots \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \dots$$

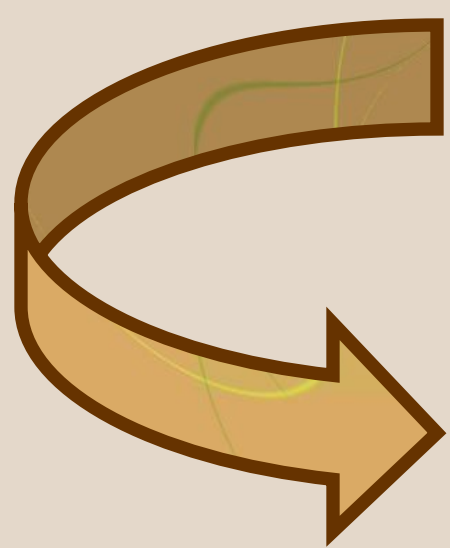
*Показать, что предел этой последовательности  
равен 1.*

**РЕШЕНИЕ:**

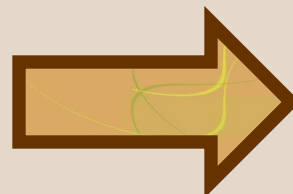
Пусть  $\varepsilon=0.1$

Тогда неравенство  $|a_n - A| < \varepsilon$

примет вид:


$$\left| \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) - 1 \right| < 0.1$$

$$\frac{1}{n} < 0.1$$



$$n > 10$$

Если  $\varepsilon=0.01$ , то неравенство выполняется при

$$n > 100$$

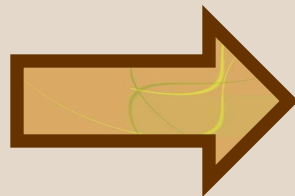
Для любого  $\varepsilon > 0$ , неравенство выполняется при

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $n = \frac{1}{\varepsilon}$

Что для всех  $n > N$ , выполняется неравенство:

$$|a_n - 1| < \varepsilon$$

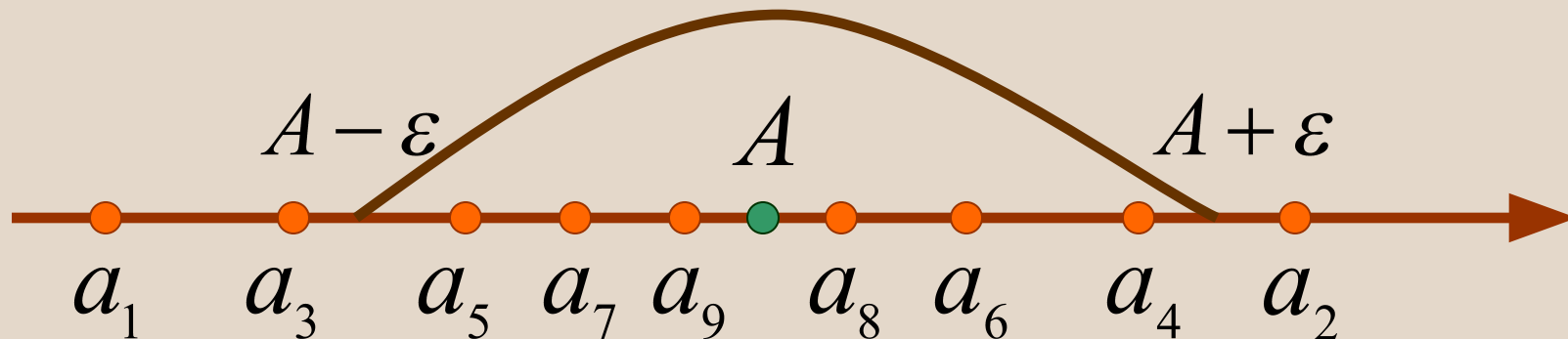


$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

**Рассмотрим геометрический смысл предела числовой последовательности. Для этого изобразим члены последовательности (3) точками на числовой оси.**

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{5}{4}, \quad a_5 = \frac{4}{5}$$

$$a_6 = \frac{7}{6}, \quad a_7 = \frac{6}{7}, \quad a_8 = \frac{9}{8}, \quad a_9 = \frac{8}{9}, \dots$$



**Неравенство**  $|a_n - A| < \varepsilon$

**равносильно двойному неравенству**

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

**которое соответствует попаданию членов  
последовательности в  $\varepsilon$  – окрестность точки  $A$ .**

**Т.е. число  $A$  есть предел числовой последовательности  $\{a_n\}$ , если для любого, сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$ , найдется такой номер  $N$ , начиная с которого все члены последовательности будут заключены в  $\varepsilon$  – окрестности точки  $A$ , какой бы узкой она не была.**

**Вне этой окрестности может быть только конечное число членов последовательности.**