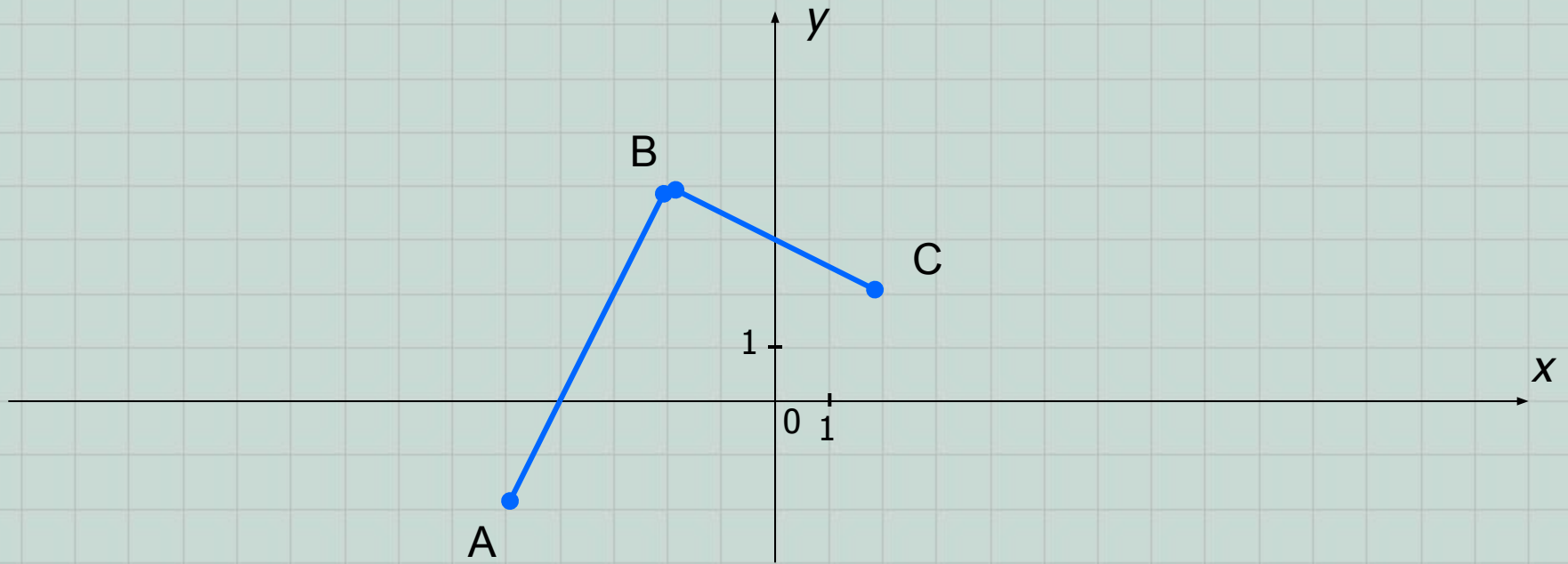


# Преобразования графиков функций.

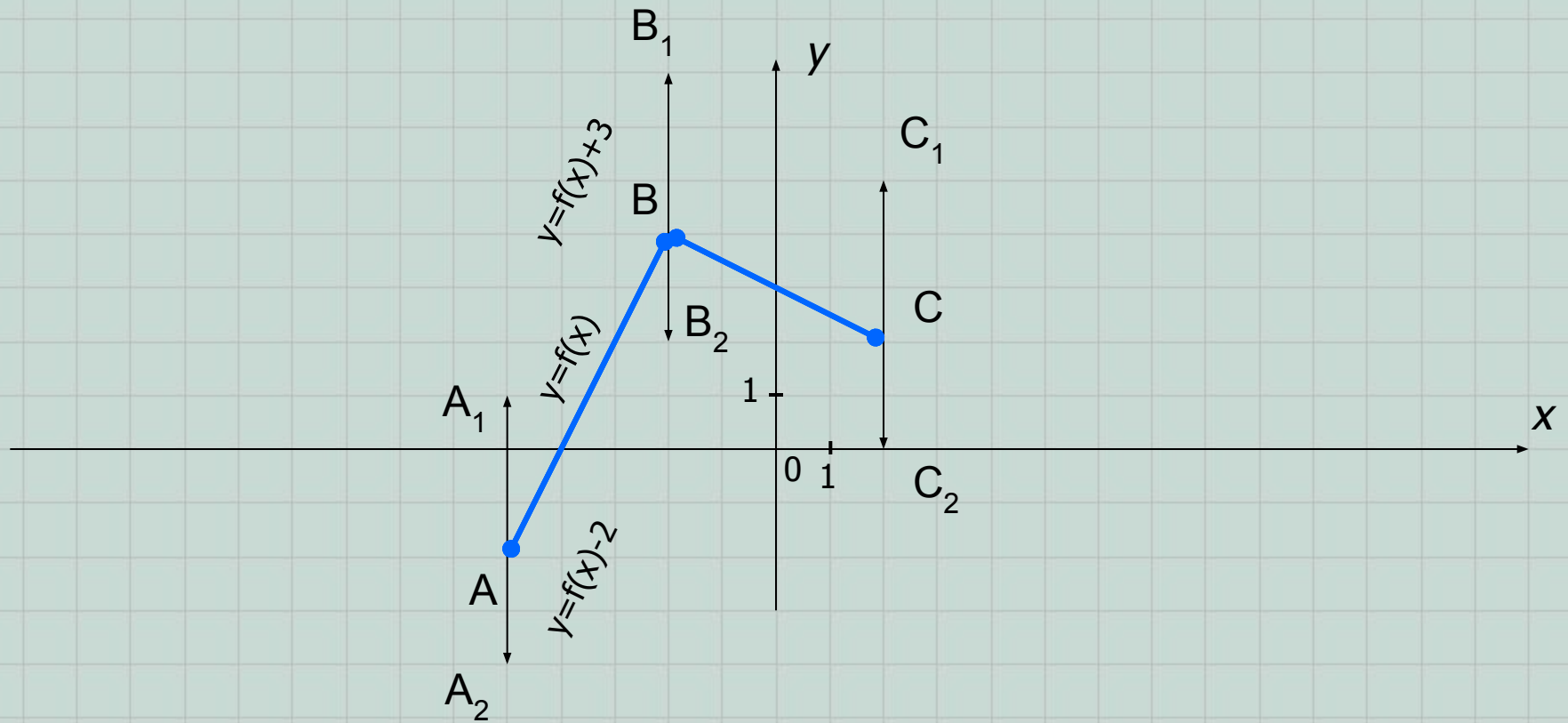
*Алгебра и начала анализа,  
10 класс.*

В качестве исходного графика функции  $y=f(x)$  выберем ломанную, состоящую из двух звеньев, заданных точками  $A(-5;-2)$ ,  $B(-2;4)$  и  $C(2;2)$ .



Рассмотрим случаи преобразования данного графика, связанные с изменениями формулы, задающей эту функцию.

I.  $y=f(x)+a$ , где  $a \in \square$ .

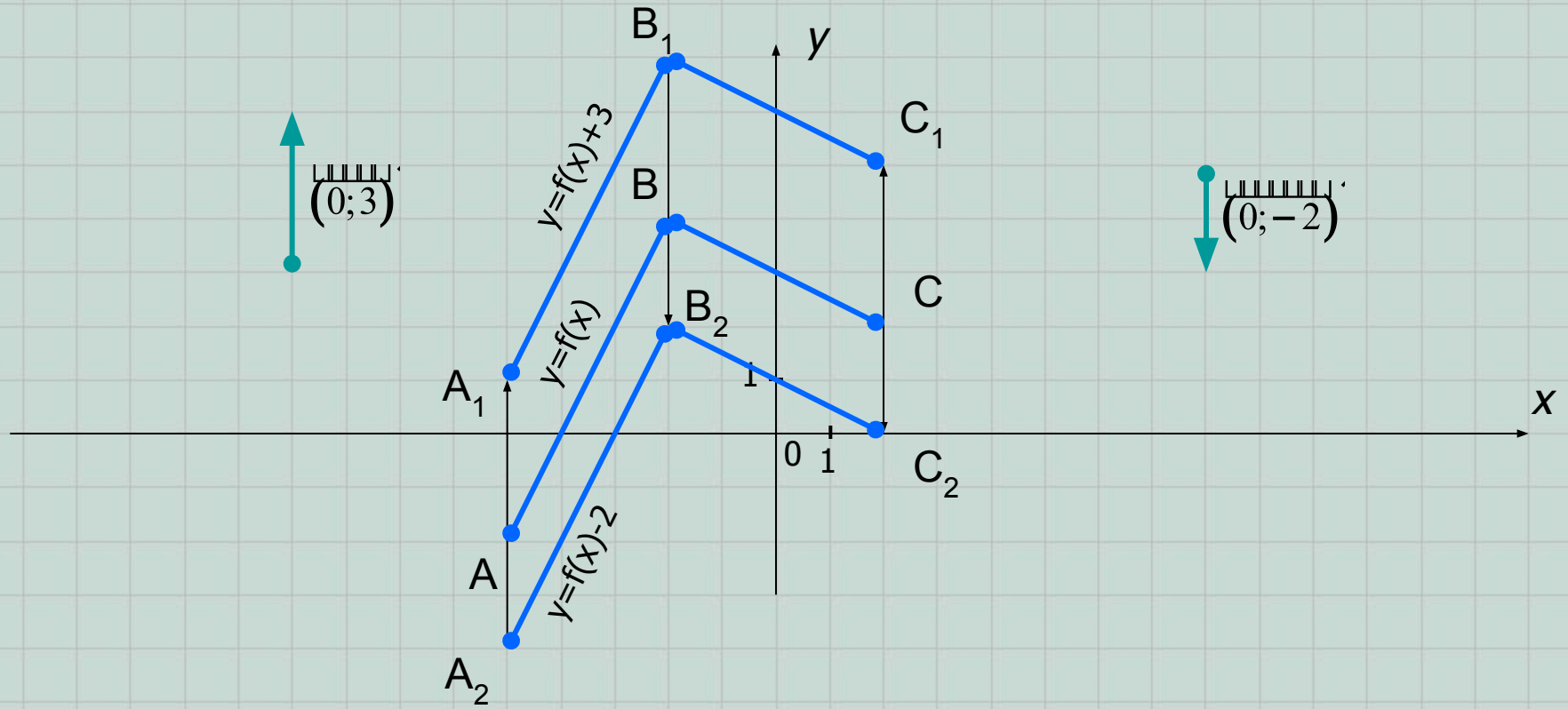


В новой формуле значения функции (ординаты точек графика) изменяются на число  $a$ , по сравнению со «старым» значением функции. Это приводит к параллельному переносу графика функции вдоль оси  $Oy$ :

- 1) **вверх** на  $a$  ед.отр., если  $a > 0$  или
- 2) **вниз** на  $a$  ед.отр., если  $a < 0$ .

Например: 1)  $y=f(x)+3$ ; или 2)  $y=f(x)-2$ .

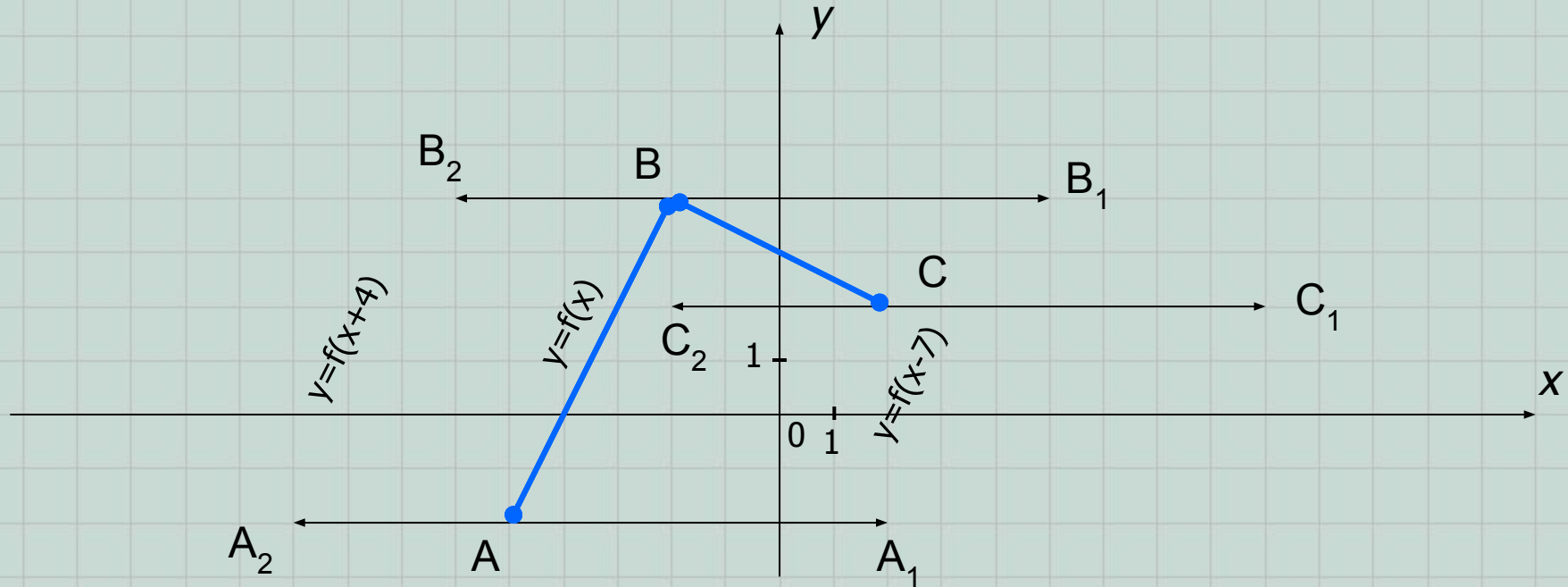
I.  $y=f(x)+a$ , где  $a \in \square$ .



Понятие «параллельного переноса вдоль оси Oy вверх..., вниз...» можно заменить на «параллельный перенос на вектор с координатами  $(0; a)$ ».

**Задание.** Запишите координаты концов новых полученных ломанных и сравните их с исходными.

II.  $y=f(x-a)$ , где  
 $a \in \square$ .

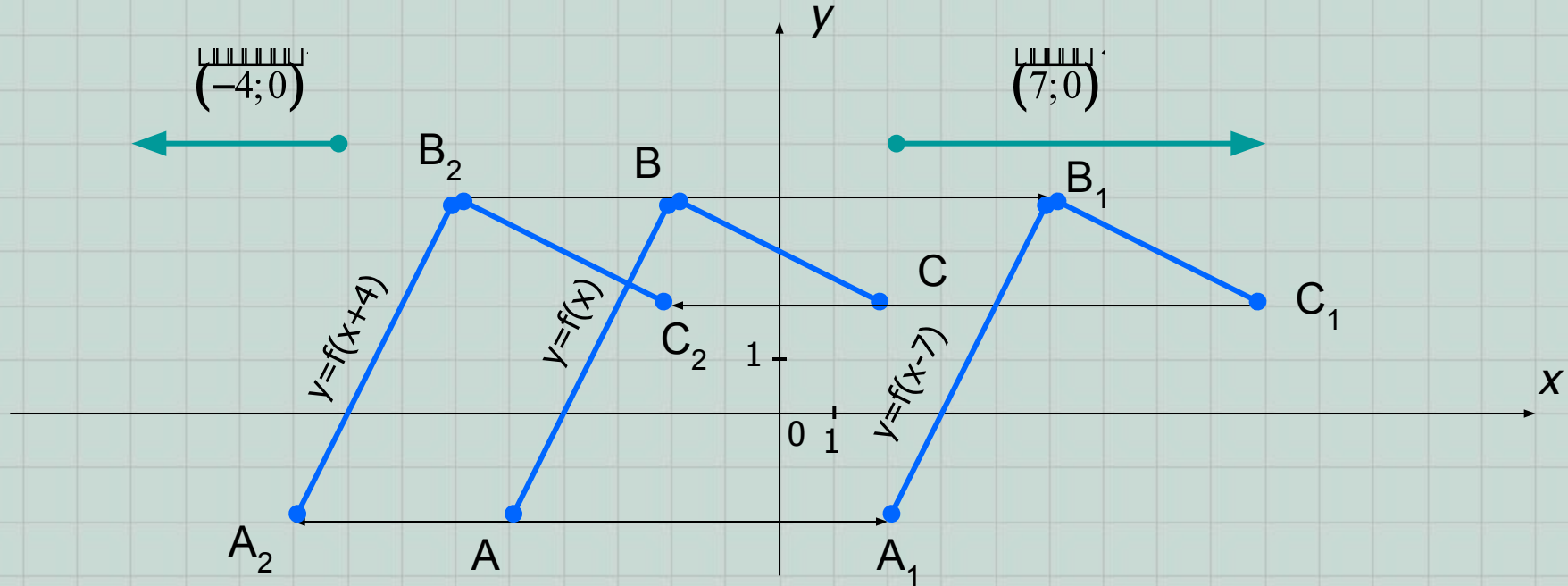


В новой формуле значения аргумента (абсциссы точек графика) изменяются на число  $a$ , по сравнению со «старым» значением аргумента. Это приводит к параллельному переносу графика функции вдоль оси  $Ox$ :

- 1) **вправо** на  $a$  ед.отр., если  $a > 0$  или
- 2) **влево** на  $a$  ед.отр., если  $a < 0$ .

Например: 1)  $y=f(x-7)$  или 2)  $y=f(x-(-4))=f(x+4)$ .

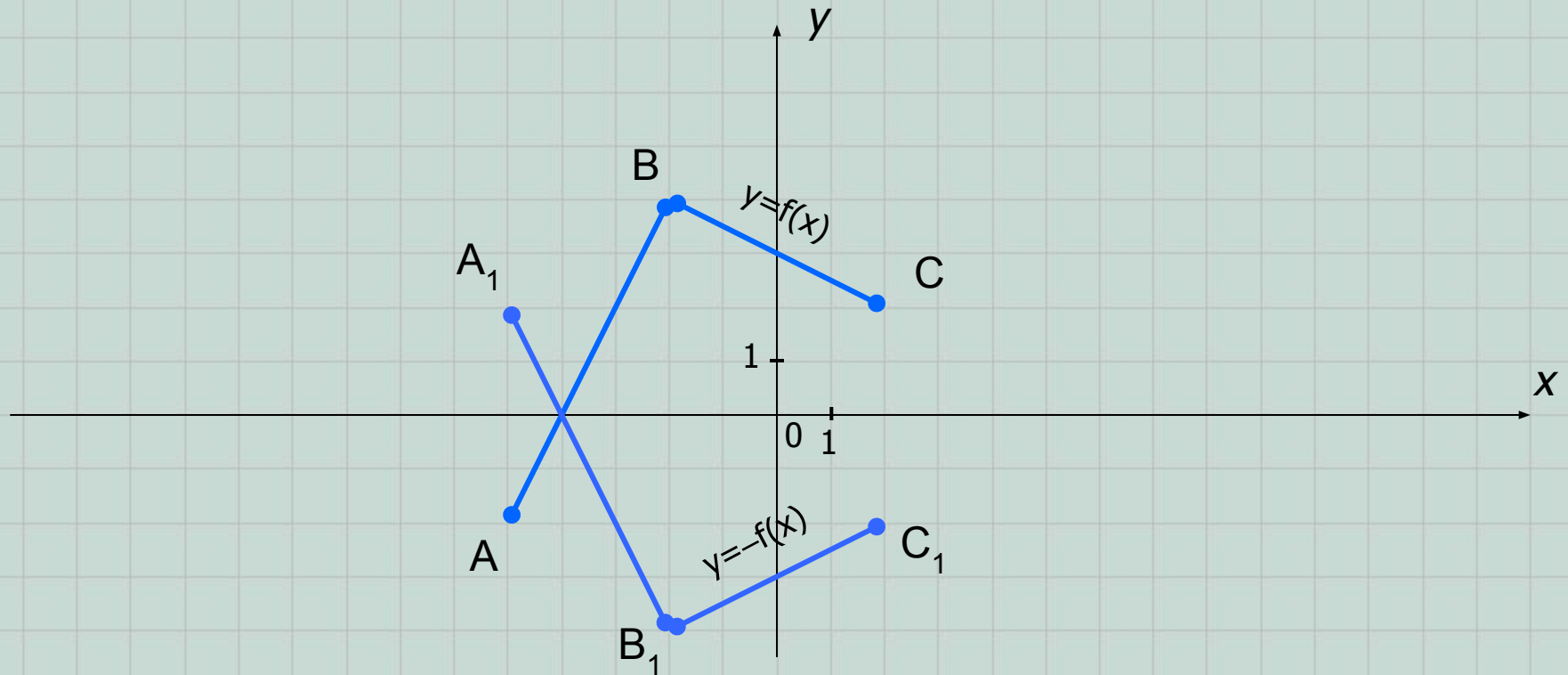
II.  $y=f(x-a)$ , где  $a \in \square$ .



Вместо понятия «параллельный перенос вдоль оси  $Ox$  вправо..., влево...» можно использовать понятие «параллельного переноса на вектор с координатами  $(a; 0)$ .»

**Задание.** Запишите координаты концов новых полученных ломанных и сравните их с исходными.

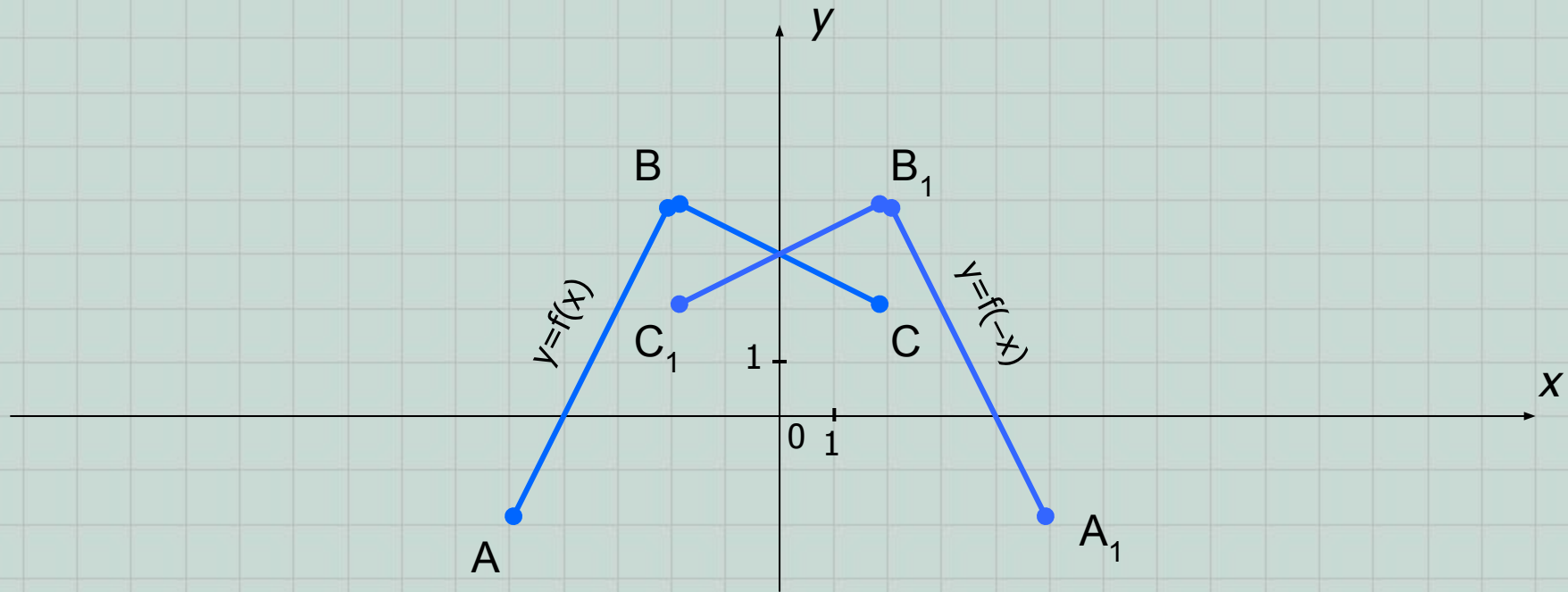
### III. $y = -f(x)$ .



В данной формуле значения функции (ординаты точек графика) изменяются на противоположные. Это изменение приводит к симметричному отображению исходного графика функции относительно оси  $Ox$ .

**Задание.** Запишите координаты концов новой полученной ломанной и сравните их с исходными.

#### IV. $y=f(-x)$ .



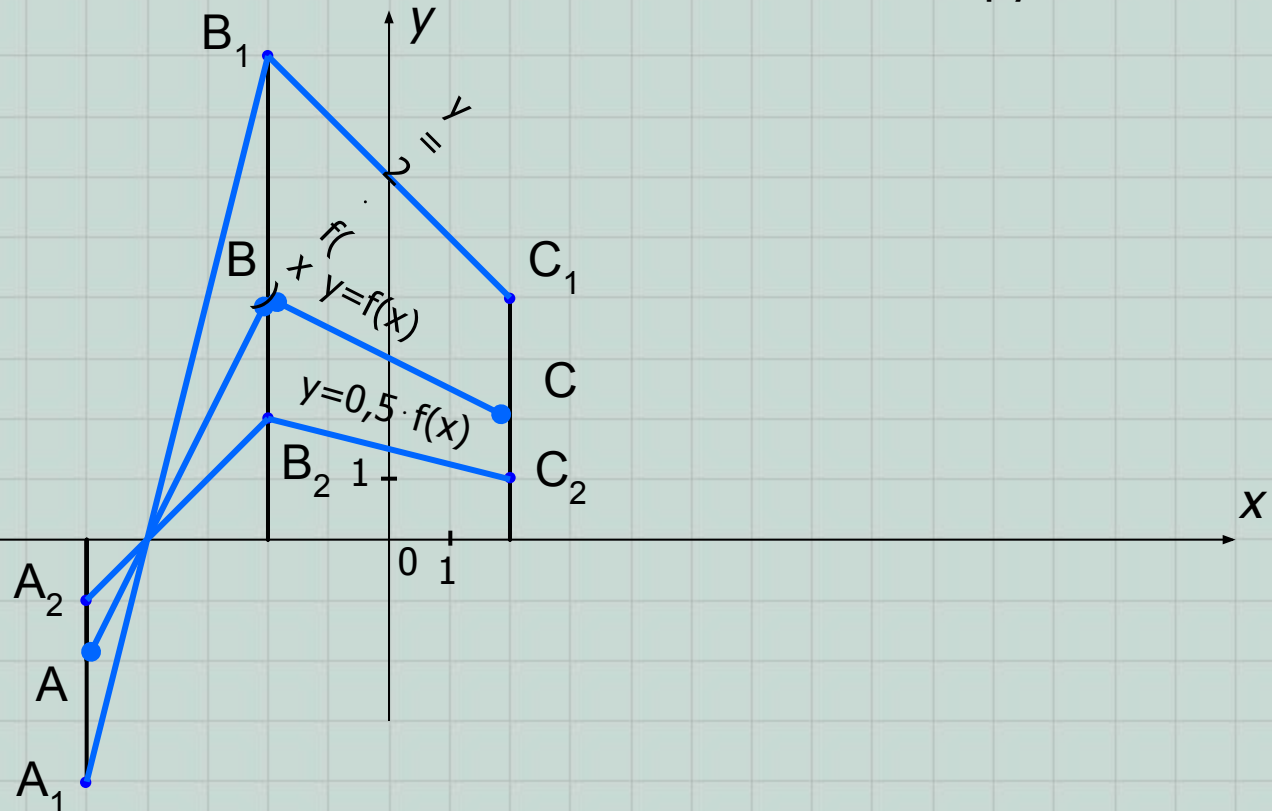
В данной формуле значения аргумента (абсциссы точек графика) изменяются на противоположные. Это изменение приводит к симметричному отображению исходного графика функции относительно оси  $Oy$ .

**Задание.** Запишите координаты концов новой полученной ломанной и сравните их с исходными.



$$V. y = k \cdot f(x), k > 0.$$

Если  $k < 0$ , то данный случай комбинируют с III.



В новой формуле значения функции (ординаты точек графика) изменяются в  $k$  раз, по сравнению со «старым» значением функции. Это приводит к :

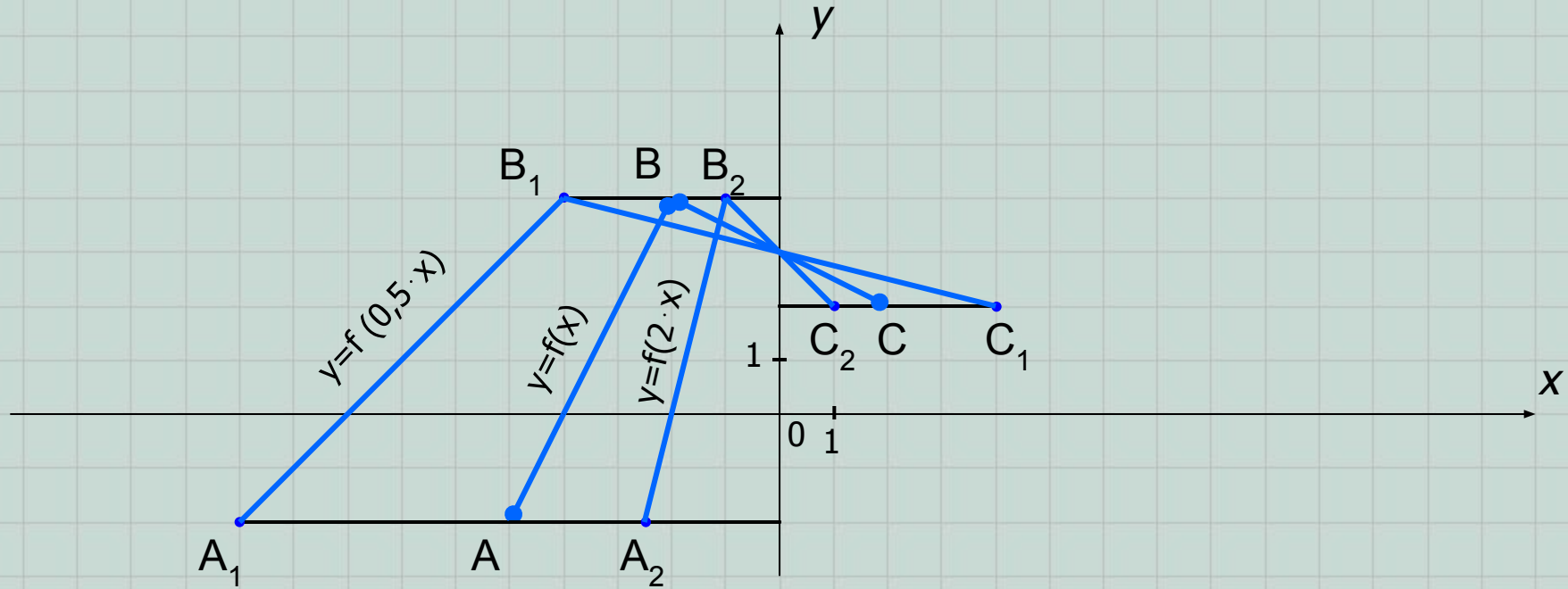
- 1) «растяжению» графика функции от оси  $Ox$  в  $k$  раз, если  $k > 1$  или
- 2) «сжатию» графика функции к оси  $Ox$  в  $\frac{1}{k}$  раз, если  $k < 1$ .

Например: 1)  $y = 2 \cdot f(x)$ ; или 2)  $y = 0,5 \cdot f(x)$ .

**Задание.** Запишите координаты концов новых полученных ломанных и сравните их с исходными.

VI.  $y=f(k \cdot x)$ ,  $k>0$ .

Если  $k<0$ , то данный случай комбинируют с IV.



В новой формуле значения аргумента (абсциссы точек графика) изменяются в  $k$  раз, по сравнению со «старым» значением аргумента. Это приводит к :

- 1) «растяжению» графика функции от оси  $Oy$  в  $\frac{1}{k}$  раз, если  $k<1$  или  $k$
- 2) «сжатию» графика функции к оси  $Oy$  в  $k$  раз, если  $k>1$ .

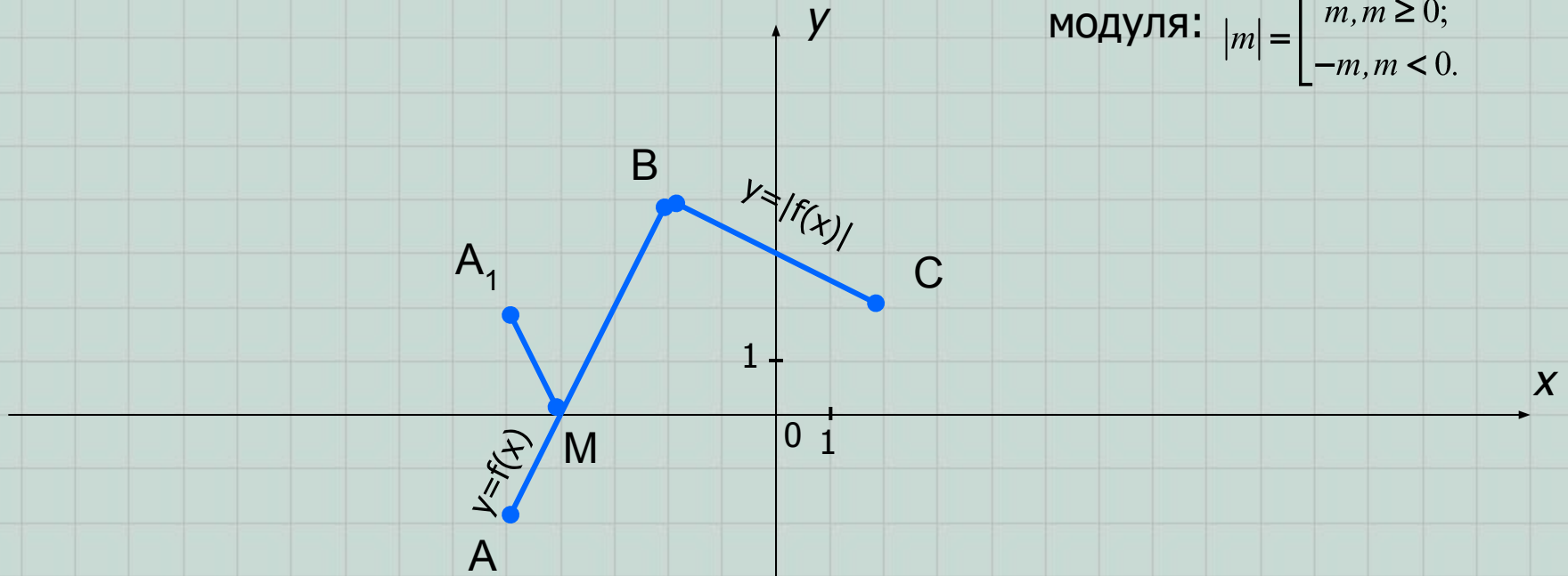
Например: 1)  $y=f(0,5 \cdot x)$ ; или 2)  $y=f(2 \cdot x)$ .

**Задание.** Запишите координаты концов новых полученных ломанных и сравните их с исходными.

## VII. $y=|f(x)|$ .

Вспомните определение

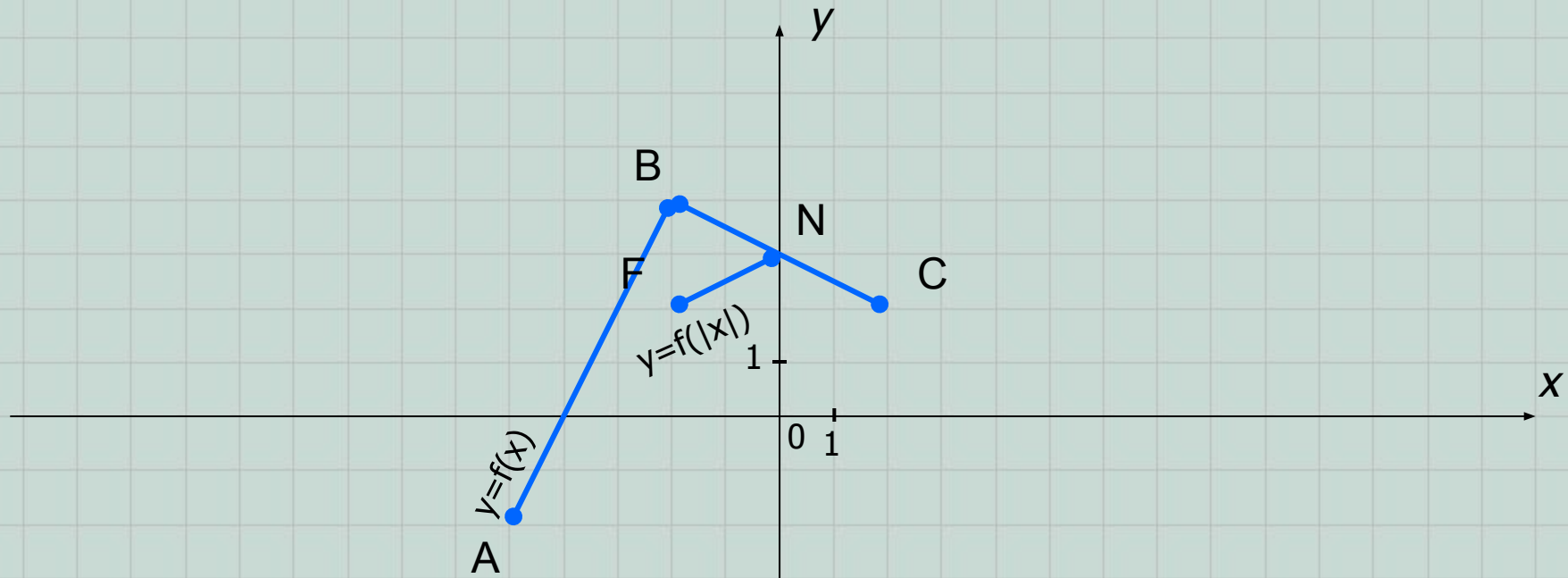
$$\text{модуля: } |m| = \begin{cases} m, & m \geq 0; \\ -m, & m < 0. \end{cases}$$



В новой формуле значения функции (ординаты точек графика) находятся под знаком модуля. Это приводит к исчезновению частей графика исходной функции с отрицательными ординатами (т.е. находящихся в нижней полуплоскости относительно оси  $Ox$ ) и симметричному отображению этих частей относительно оси  $Ox$ .

**Задание.** Запишите координаты концов новой полученной ломанной и сравните их с исходными.

### VIII. $y=f(|x|)$ .



В новой формуле значения аргумента (абсциссы точек графика) находятся под знаком модуля. Это приводит к исчезновению частей графика исходной функции с отрицательными абсциссами (т.е. находящихся в левой полуплоскости относительно оси  $Oy$ ) и замещению их частями исходного графика, симметричными относительно оси  $Oy$ .

**Задание.** Запишите координаты концов новой полученной ломанной и сравните их с исходными.

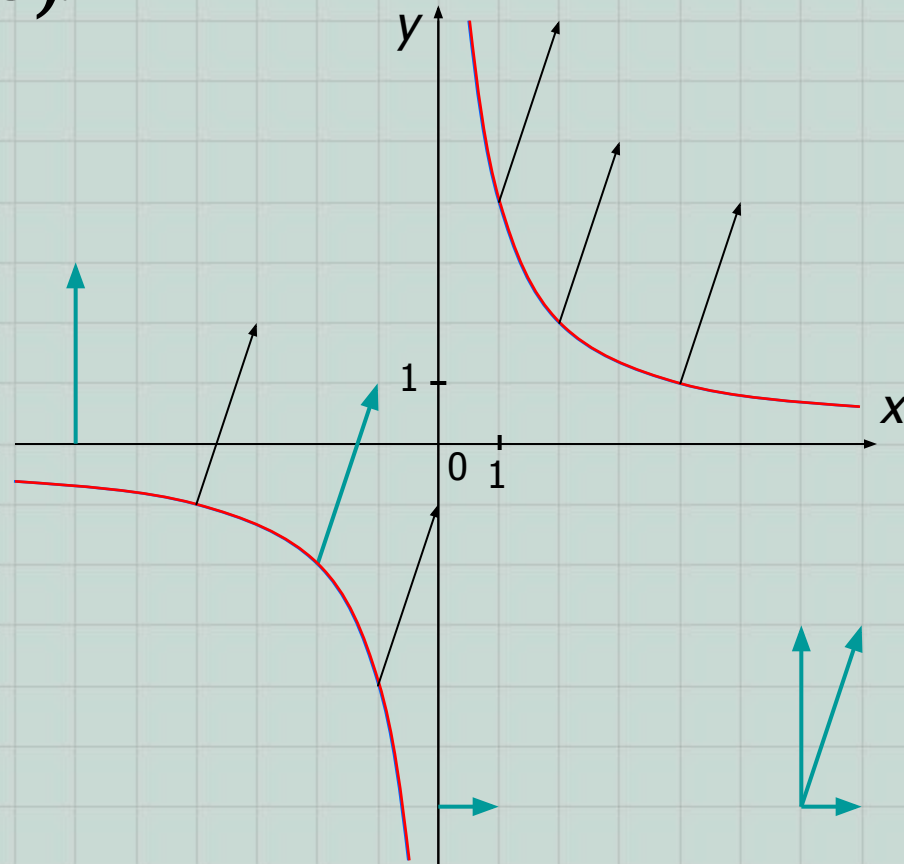
Рассмотрим несколько примеров применения вышеизложенной теории.

**ПРИМЕР 1.** Построить график функции, заданной формулой  $y = \frac{3x+1}{x-1}$ .

**Решение.** Преобразуем данную формулу:  $y = \frac{3x+1}{x-1} = \frac{3(x-1)+4}{x-1} = \frac{4}{x-1} + 3$ .

1) Построим график функции  $y = \frac{4}{x}$ .

2) Выполним параллельный перенос построенного графика на вектор  $(1; 3)$ .

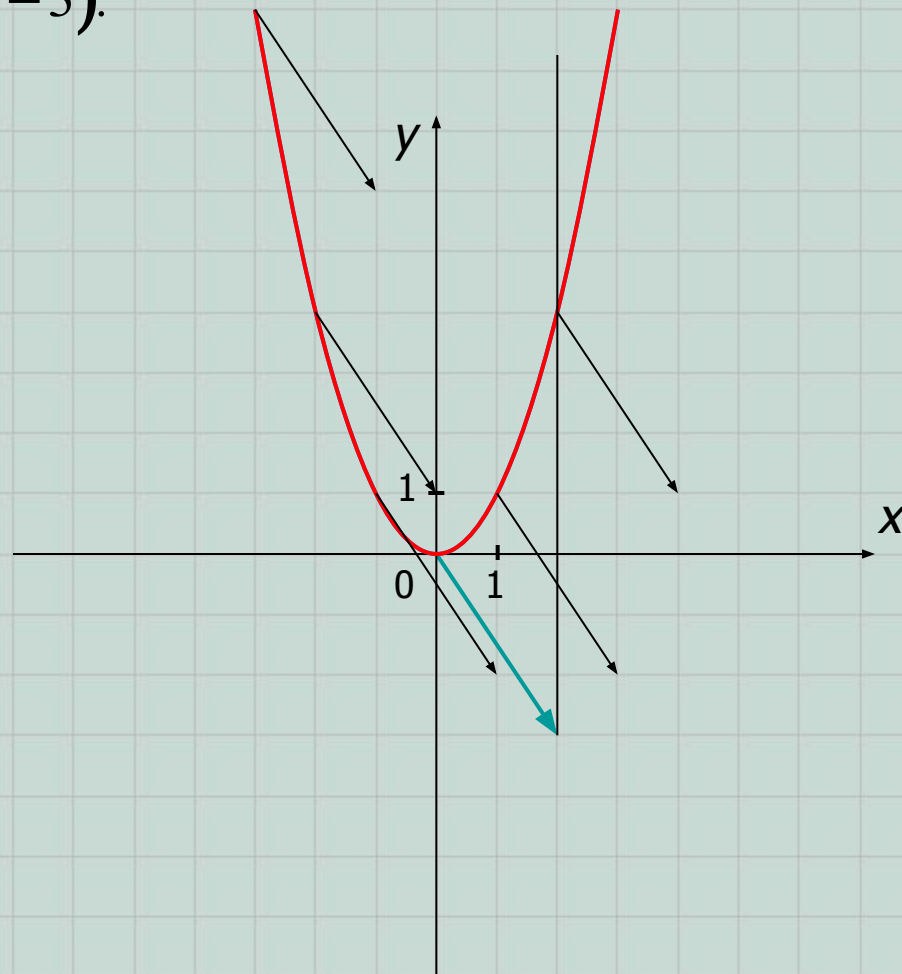


**ПРИМЕР 2.** Построить график функции, заданной формулой  $y = x^2 - 4x + 1$ .

**Решение.** Преобразуем данную формулу, выделив в данном квадратном трехчлене квадрат двучлена:  $y = x^2 - 4x + 1 = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) - 4 + 1 = (x - 2)^2 - 3$ .

1) Построим график функции  $y = x^2$ .

2) Выполним параллельный перенос построенного графика на вектор  $(2; -3)$ .



**ПРИМЕР 3.** Построить график функции, заданной формулой  $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ .

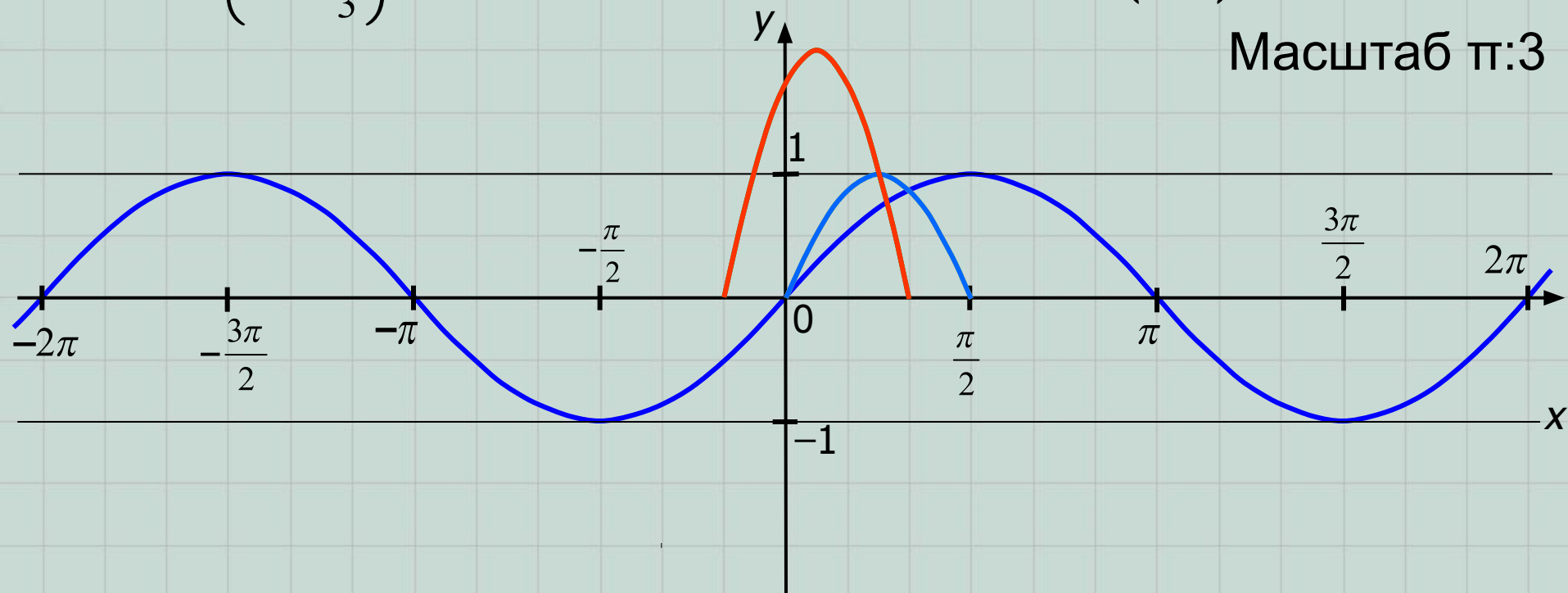
**Решение.** 1)  $y = \sin x$ ; 2)  $y = \sin(2x)$  – «сжатие» к оси  $Oy$  в два раза;

3)  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\left(2\left(x - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)$  – параллельный перенос вдоль оси  $Ox$  влево на  $\frac{\pi}{6}$  ед.отр.;

4)  $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  – «растяжение» от оси  $Ox$  в два раза;

5)  $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$  – параллельный перенос на вектор  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Масштаб  $\pi:3$



Остается воспользоваться свойством периодичности любой тригонометрической функции (определите наименьший положительный период самостоятельно) и достроить полученную часть до полного графика на всей числовой оси:

Масштаб  $\pi:3$

