

**УМК: А.Г.
Мерзляк**

ВСЁ о квадратных уравнениях

8 класс



*Разработано учителем математики
МОУ «СОШ» п. Аджером
Корткеросского района Республики Коми
Мишариной Альбиной Геннадьевной*

Содержание

- * Основные понятия и виды квадратных уравнений
- * Решение неполных квадратных уравнений
- * Решение полных квадратных уравнений через формулу корней
- * Решение полных квадратных уравнений через свойства коэффициентов
- * Решение приведённых квадратных уравнений через теорему Виета
- * Решение полных квадратных уравнений через выделение полного двучлена
- * Разложение квадратного трёхчлена на множители
- * Биквадратные уравнения и их решение
- * Для самостоятельной работы

Определение

* **Квадратным уравнением**

(или уравнением второй степени)

называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0 ,$$

где x – переменная,

a , b и c – некоторые числа, и $a \neq 0$

* Числа a , b и c – называются коэффициентами квадратного уравнения.

* Число a – первый коэффициент (старший коэффициент),
 b – второй коэффициент (коэффициент при X),
 c – свободный член



Чему равны значения коэффициентов a , b и c ?

* $2x^2 + x + 7 = 0$

* $10x^2 + 7x + 5 = 0$

* $4a^2 - 3a = 0$

* $10 - 3x^2 = 0$

* $2y - y^2 = 0$



Является ли квадратным уравнение?

- а) $2x^2 + 7x - 3 = 0$;
- б) $5x - 7 = 0$;
- в) $-x^2 - 5x - 1 = 0$;
- г) $3x + 4 = 0$;
- д) $x^2 - 6x + 1 = 0$;
- е) $7x + 5x = 0$;
- ж) $4x^2 + 1 = 0$;
- з) $x^2 - 36 = 0$.



Запомним

$$ax^2 + bx + c = 0$$

это стандартный вид
квадратного уравнения

Приведите уравнение к виду

$$ax^2 + bx + c = 0:$$

а) $-x + 2x^2 - 4 = 0;$

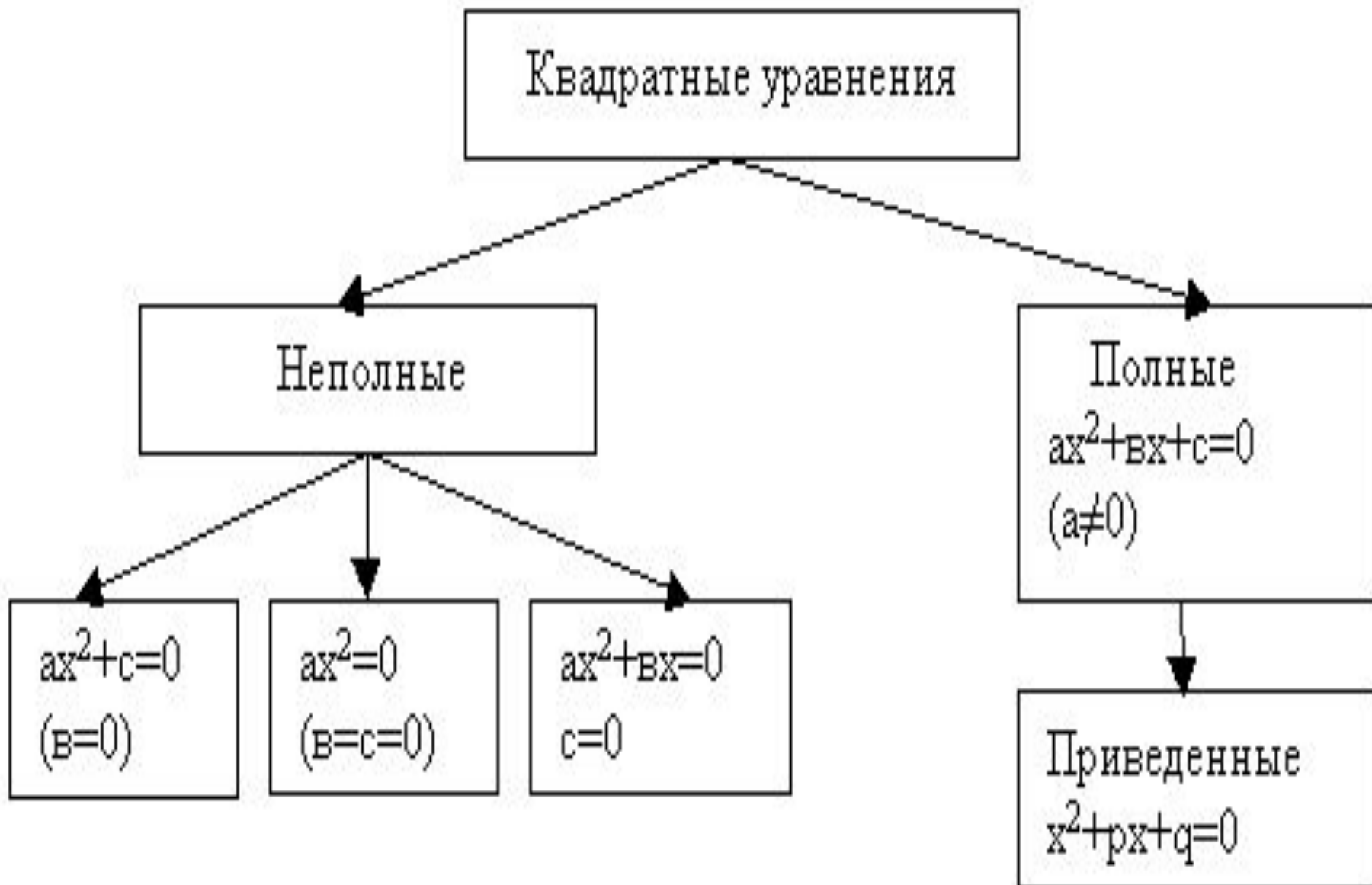
б) $2x^2 - 3x = 5x - 1;$

в) $(x - 2)(3x - 5) = 0;$

г) $(x - 3)(x + 3) = 2;$

д) $(x - 1)^2 = 2x + 4.$

Виды квадратных уравнений



Определение

* Квадратное уравнение называется **полным**, если в его записи присутствуют все коэффициенты (**а**, **в** и **с**).

Например:

$$3x^2 - 15x + 300 = 0$$



Определение

* Полное квадратное уравнение называется **приведённым квадратным уравнением**, если его старший коэффициент равен 1.

(т.е. если **$a = 1$**)

Например: $x^2 - 15x + 300 = 0$

Определение

* **Неполным квадратным**

уравнением называют

уравнение, в котором

хотя бы один из

коэффициентов

b или **c** равен нулю.



Виды **неполных** квадратных уравнений

*если **$b=0$** , то **$ax^2+c=0$**

*если **$c=0$** , то **$ax^2+bx=0$**

*если **$b=0$** и **$c=0$** ,
то **$ax^2=0$**



Например

1). $b=0$: $-2x^2+7=0$

2). $c=0$: $3x^2-10x=0$

3). $b=0$ и $c=0$: $4x^2=0$

Виды квадратных уравнений.

1) $2x^2 + 6x + 5 = 0$

2) $x^2 - 7x + 10 = 0$

3) $3x^2 - 25x + 28 = 0$

4) $2x^2 + 4x = 0$

5) $4x^2 - 25 = 0$

6) $x^2 - 64 = 0$

Работаем по учебнику

Стр. 158 № 621

№ 622



Решение

квадратных

уравнений



* **Неполные квадратные уравнения решаются....**

**(см. стр. 157
Таблица)**



*). $-3x^2+15=0$

$$-3x^2=-15$$

$$x^2=5$$

$$x_1=\sqrt{5} \quad x_2=-\sqrt{5}$$

Например:

Ответ: $\pm\sqrt{5}$

2). $4x^2+9x=0$

$$x(4x+9)=0$$

$$x_1=0 \text{ или } 4x+9=0$$

$$4x=-9$$

$$x_2=-2\frac{1}{4} \quad \text{Ответ: } 0; -2,25$$

3). $4x^2+3=0$

$$4x^2=-3$$

$$x^2=-\frac{3}{4} \quad - \text{ нет корней}$$

Ответ: нет корней



Работаем по учебнику

Решаем:

стр. 159 №626

№ 627



ПОВТОРИМ

$$3x^2 + 4x + 1 = 0,$$

$$3x^2 + 3 = 10x$$

$$6x + 9 = x^2$$

$$-x^2 - 5x + 14 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 9$$

Способы решения полных квадратных уравнений

- * Любое квадратное уравнение можно решить через дискриминант и формулу корней
- * Полное квадратное уравнение можно решить и через **свойства коэффициентов** (если они работают)
- * Приведённое (полное) квадратное уравнение можно решить и через **теорему Виета**

АЛГОРИТМ решения через формулу корней

- 1). Привести уравнение к стандартному виду ($ax^2+bx+c=0$)
- 2). Определить коэффициенты **a, b, c**
- 3). Вычислить **ДИСКРИМИНАНТ**
(определитель количества корней уравнения)

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = b^2 - 4ac$$

- если $D < 0$, то корней нет

- если $D > 0$, то два различных корня,
которые вычисляются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

- если $D = 0$, то два одинаковых корня

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Запомним (если b - чётное)

$$b - \text{чётное} \Rightarrow k = \frac{b}{2}$$

$$D = k^2 - ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a}$$



Например

1). $3x^2 + 3 = 10x$

2). $6x + 9 = x^2$

3). $x^2 - 5x + 14 = 0$

Работаем по учебнику

Решаем:

стр. №



Вспомним

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Свойства коэффициентов полных квадратных уравнений

1).

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$

$$a + b + c = 0, \text{ то } x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$$

Например

$$2x^2 - 5x + 3 = 9$$

Т.к. $a + b + c = 2 - 5 + 3 = 0$, то $x_1 = 1$;

$$x_2 = 3/2 = 1,5$$

Свойства коэффициентов полных квадратных уравнений

2).

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$

$$a - b + c = 0, \text{ то } x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$$

Например

$$3x^2 + 4x + 1 = 0,$$

Т.к. $a - b + c = 3 - 4 + 1 = 0$, то $x_1 = -1$;

$$x_2 = -1/3$$

Например

1). $4x^2 + 7x + 3 = 0$

2). $3x^2 - 5x + 2 = 0$

3). $3x^2 + 8x - 3 = 0$

4). $3x^2 - 7x + 4 = 0$

5). $x^2 - 15x - 16 = 0$



Работаем по учебнику

Решаем:



стр.

№

Свойства коэффициентов полных квадратных уравнений

3). Если $a = c$, $b = a^2 + 1$, то
 $x_1 = -a = -c$ $x_2 = -1/a = -1/c$.

*Например: $4x^2 + 17x + 4 = 0$

Т.к. $a=c$ и $b = a^2+1$, то $x_1 = -a = -4$

$x_2 = -1/a = -1/4$

Свойства коэффициентов полных квадратных уравнений

4). Если $a = c$, $b = -(a^2 + 1)$, то

$$x_1 = a = c \quad x_2 = 1/a = 1/c$$

*Например: $4x^2 - 17x + 4 = 0$

Т.к. $a=c$ и $b = -(a^2+1)$, то $x_1 = a = 4$

$$x_2 = 1/a = 1/4$$

Свойства коэффициентов полных квадратных уравнений

5). $b = a^2 - 1, c = -a$, то $x_1 = -a; x_2 = \frac{1}{a}$.

*Например: $4x^2 + 15x - 4 = 0$

Т.к. $-a=c$ и $b = (a^2 - 1)$, то $x_1 = -a = -4$

$$x_2 = 1/a = 1/4$$

Свойства коэффициентов полных квадратных уравнений

6). $b = -(a^2 - 1), c = -a$, то $x_1 = a; x_2 = -\frac{1}{a}$.

*Например: $4x^2 - 15x - 4 = 0$

Т.к. $-a=c$ и $b = -(a^2 - 1)$, то $x_1 = a = 4$

$$x_2 = -1/a = -1/4$$

Работаем по учебнику

Решаем:

стр. №



Вспомним

Какое квадратное
уравнение называется

приведённым?

Теорема Виета

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

**Для приведённых квадратных уравнений
теорема Виета выглядит так:**

$$x^2 + bx + c = 0 \quad x_1 + x_2 = -b,$$

$$x_1 \cdot x_2 = c,$$

где x_1 и x_2 - корни уравнения

Алгоритм решения квадратного уравнения через теорему Виета

- 1) Привести уравнение к **ПРИВЕДЁННОМУ** виду (для этого все коэффициенты уравнения поделить на коэффициент **a**)
- 2) Подбором найти числа, чтобы выполнялись равенства:

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

$$x_1 + x_2 = -b$$

Например

$$x_1 \cdot x_2 = c$$
$$x_1 + x_2 = -b$$

*). $x^2 + 3x - 4 = 0$

Подбором находим:

$$x_1 = ? \quad 2 \quad 4 \quad -4$$

$$x_2 = ? \quad 2 \quad 1 \quad 1$$

Т.к. $x_1 \cdot x_2 = -4$; $x_1 + x_2 = +3$, то

$$x_1 = -4; \quad x_2 = 1$$

Ответ: -4; 1

Например:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = c$$


$$x_1 + x_2 = -b$$

Подбором находим:

$$x_1 = ? \quad 2 \quad -2$$

$$x_2 = ? \quad 1 \quad 1$$

Ответ: -2; 1



Решите уравнения

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x^2 - 10x - 39 = 0$$

У данных уравнений



$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x^2 - 10x - 39 = 0$$

*Найдите сумму и произведение
корней*

$$x_1 + x_2 = 2 + 4 = 6$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 4 = 8$$

$$x_1 + x_2 = -3 + 5 = 2$$

$$x_1 \cdot x_2 = -3 \cdot 5 = -15$$

$$x_1 + x_2 = -3 + 13 = 10$$

$$x_1 \cdot x_2 = -3 \cdot 13 = -39$$

Без решения уравнений, найдите
сумму корней и произведение
корней этих уравнений

$$x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x^2 - 15x - 16 = 0$$

$$x^2 + 11x - 12 = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 =$$

$$x_1 + x_2 =$$

Работаем по учебнику

Решаем:

стр. №



Выделение полного квадрата

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- Например: $x^2 - 10x + 16 = 0,$

$$x^2 - 2 * 5x + 25 - 25 + 16 = 0,$$

$$(x - 5)^2 - 9 = 0,$$

$$(x - 5)^2 = 9,$$

$$x - 5 = -3; x - 5 = 3,$$

$$x_1 = 2; x_2 = 8$$

$$\text{Ответ} : x_1 = 2; x_2 = 8.$$



Решение квадратного уравнения выделением квадрата двучлена

$$\underline{x^2 + 6x - 7 = 0}$$

1. $x^2 + 2x \cdot 3 + 9 - 9 - 7 = 0$

2. $(x + 3)^2 - 16 = 0$

3. $(x + 3)^2 = 16$

4. $x + 3 = 4$ или $x + 3 = -4$

5. $x = 1$ $x = -7$

Ответ: -7; 1.

$$\underline{x^2 + 8x - 9 = 0}$$

1.

2.

3.

4.

5.

Ответ:

Решение квадратного уравнения выделением квадрата двучлена

■ ПРИМЕР 1:

$$x^2 + 10x + 25 = 0,$$

$$(x + 5)^2 = 0,$$

$$x + 5 = 0,$$

$$x = -5.$$

Ответ: -5.

■ ПРИМЕР 2:

$$x^2 + 8x - 1 = 0,$$

$$x^2 + 2x \cdot 4 - 1 = 0,$$

$$x^2 + 2x \cdot 4 + 16 = 16 - 1,$$

$$(x + 4)^2 = 17,$$

$$x + 4 = -\sqrt{17} \text{ или } x + 4 = \sqrt{17},$$

$$x_1 = -4 - \sqrt{17}, \quad x_2 = -4 + \sqrt{17}.$$

Работаем по учебнику

Решаем:

стр. №



Разложение квадратного трёхчлена на множители

Выражение вида

$$ax^2 + bx + c$$

называется квадратным
трёхчленом.

АЛГОРИТМ разложения квадратного трёхчлена на множители

- *1).** Решить соответствующее квадратное уравнение и найти его корни x_1 и x_2 .
- 2).** Записать разложение квадратного трёхчлена по формуле

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$$

Разложите квадратный трехчлен на множители:

1 вариант

1) $x^2 - 11x + 24$

2) $x^2 + 7x + 12$

3) $-x^2 - 8x + 9$

4) $3x^2 + 5x - 2$

5) $-5x^2 + 6x - 1$

2 вариант

1) $x^2 - 2x - 15$

2) $x^2 + 3x - 10$

3) $-x^2 + 5x - 6$

4) $5x^2 + 2x - 3$

5) $-2x^2 + 9x - 4$



Работаем по учебнику

Решаем:

стр. №



Определение

* Биквадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Решение биквадратных уравнений

Биквадратные уравнения
решают с помощью
введения дополнительной
переменной

Алгоритм решения

1. Ввести замену переменной.
2. Составить квадратное уравнение с новой переменной.
3. Решить новое квадратное уравнение.
4. Вернуться к замене переменной.
5. Решить получившиеся квадратные уравнения.
6. Сделать вывод о числе решений уравнения.
7. Записать ответ.



Например

1). Приводят уравнение к стандартному виду

2). Вводят дополнительную (новую) переменную

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

Для решения таких уравнений применяется **метод введения новой переменной**.

Пусть $x^2 = t$,
тогда

Алгоритм решения

3). Составить
квадратное
уравнение с новой
переменной

4). Решить новое
квадратное
уравнение

$$*t^2 - 5t - 36 = 0$$

по т. Виета
имеем:

$$t_1 = 9$$

$$t_2 = -4$$

Алгоритм решения

5). Вернуться к замене переменной **и** решить полученные квадратные уравнения

* Сделаем обратный переход к переменной **x**:

1) если $t_1 = 9$, то $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

2) если $t_2 = -4$, то $x^2 = -4 \Rightarrow$ нет реш.

Алгоритм решения

6). Сделать вывод о числе решений уравнения

7). Записать ответ

Данное биквадратное уравнение имеет **2 решения.**

Ответ: ± 3

Решаем вместе

$$б) y^4 - 6y^2 + 8 = 0$$

$$в) 4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$$

$$г) x^4 - 25x^2 + 144 = 0$$

$$д) 5y^4 - 5y^2 + 2 = 0$$


$$е) t^4 - 2t^2 - 3 = 0$$

Работаем по учебнику

Решаем:

стр. №





**Для
самостоятельной
работы**

Решите уравнения

$$1) 2x^2 + 3x + 1 = 0;$$

$$2) x^2 - 2x - 35 = 0;$$

$$3) 3x^2 + 2x - 1 = 0.$$



Решите уравнения

а) $x^2 + 5x - 6 = 0$

б) $25x^2 - 10x + 1 = 0,$

в) $(4 + x)^2 = 3x + 40,$

г) $(2x - 1)(x + 3) = x(1 + 6x)$

Решить квадратное уравнение

$$6x^2 + x - 1 = 0$$

$$5x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$2x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$-x^2 + 7x - 10 = 0$$

$$3x^2 + 8x - 3 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 9$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$5x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$3x^2 + 2x - 5 = 0$$

□ Какие из следующих уравнений мы умеем решать, объясните прием решения каждого из этих уравнений:

1) $3x - 4 = x + 10$

2) $x^2 - 5x = 0$

3) $2x + 6x^2 = 0$

4) $5x^2 - 2x + 6 = 0$

5) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$



РЕШИ УРАВНЕНИЯ с помощью формулы :

1 вариант: а) $-7x + 5x^2 + 1 = 0$

б) $(x - 1)(x + 1) = 2(5x - 10,5)$

2 вариант: а) $2x^2 + 5x - 7 = 0$

б) $-x^2 = 5x - 14$

3 вариант: а) $x^2 - 8x + 7 = 0$

б) $6x - 9 = x^2$

Используемые ресурсы

- * «Незнайка» - Интернет-портал:
- * <http://nnm.me/blogs/assa82/nikolay-nosov-priklyucheniya-neznayki/>
- * <http://deti-online.com/skazki/rassказы-nosova/neznayka-v-solnechnom-gorode/>
- * <http://vashlogoped-online.ru/dochkolniki/konspekt-itogovogo-zanyatiya-po-podgotovke-k-obucheniyu-gramote>
- * http://www.psychologos.ru/articles/view/neustoychivyy_tip
- * <http://madmax.livejournal.com/332914.html>
- * Некоторые данные взяты с презентации «Квадратные уравнения и его корни» автор заимствования неизвестен.

Используемые ресурсы

- * А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. Алгебра: 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Вентана-Граф, 2018
- * А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, Е.М. Рабинович, М.С. Якир.: Алгебра : 8 класс: дидактический материал: пособие для учащихся общеобразовательных организаций / – М.: Вентана-Граф, 2016
- * <https://fso3.metod-kopilka.ru/images/doc/55/59065/img10.jpg>
- * http://images.myshared.ru/6/775142/slide_3.jpg
- * <https://ds02.infourok.ru/uploads/ex/0824/00078233-0d2aeca2/img12.jpg>
- * https://myslide.ru/documents_4/96fe0d235508f6cd6d50fda3ae378ff9/img6.jpg
- * <https://cf2.ppt-online.org/files2/slide/v/VGYbKWfZJemXkoUsaLOgwpP65RyMNq92FB7uzx3v8c/slide-14.jpg>
- * http://images.myshared.ru/5/485417/slide_17.jpg
- * <https://ds04.infourok.ru/uploads/ex/0c16/00048c6d-2d342099/img16.jpg>

Используемые ресурсы

- * http://images.myshared.ru/6/682293/slide_9.jpg
- * <https://cf.ppt-online.org/files2/slide/c/ClhFPnmsGi4Jxwlv8ojY6D9BRyogNMkA2pbrH3/slide-5.jpg>
- * <https://cf.ppt-online.org/files2/slide/g/gmfab5uzJcrXt4pnjH9vLsoTkWhqdIQU6A2iVSeB1/slide-5.jpg>
- * <https://ds02.infourok.ru/uploads/ex/0a88/00054e2f-863706ed/2/img3.jpg>
- * <https://cf.ppt-online.org/files2/slide/g/gmfab5uzJcrXt4pnjH9vLsoTkWhqdIQU6A2iVSeB1/slide-5.jpg>
- * https://botana.biz/prepod/_bloks/pic/ztno8sl-002.gif
- * <http://v.5klass.net:10/datas/algebra/Razlichnye-sposoby-reshenija-kvadratnykh-uravnenij/0014-014-Reshite-uravnenija.jpg>
- * https://ds05.infourok.ru/uploads/ex/0701/00065c18-7a015b2e/hello_html_m3d67554a.gif
- * <https://ds03.infourok.ru/uploads/ex/101b/0003e0aa-93dc6c64/img12.jpg>
- * <https://ds04.infourok.ru/uploads/ex/1188/00045747-4e20285a/img6.jpg>
- * https://myslide.ru/documents_2/6cf4d35c22d787041b4139a022315d43/img9.jpg

Используемые ресурсы

<https://ds02.infourok.ru/uploads/ex/0ee9/000356co-0ec7cca9/img6.jpg>

- * <http://900igr.net/up/datas/140424/015.jpg>
- * <https://pptcloud3.ams3.digitaloceanspaces.com/slides/pics/002/668/965/original/Slide9.jpg?1489628962>
- * <https://fs00.infourok.ru/images/doc/218/1537/1/img4.jpg>
- * <http://900igr.net/up/datas/208224/020.jpg>
- * http://images.myshared.ru/5/400782/slide_2.jpg
- * <https://ds05.infourok.ru/uploads/ex/1028/0002e2cf-38208df8/img14.jpg>
- * <https://cf.ppt-online.org/files1/slide/r/RJeGnO7bW34vTcZNooXP9k8u1EyQAaMhix2FzSVsq/slide-14.jpg>
- * http://images.myshared.ru/6/775142/slide_3.jpg
- * <https://ds05.infourok.ru/uploads/ex/ocfb/00053d1a-49ee136a/img5.jpg>
- * <https://fs03.metod-kopilka.ru/images/doc/55/59065/img10.jpg>
- * https://doc4web.ru/uploads/files/67/67304/hello_html_20926b3.gif
- * <http://900igr.net/up/datas/208224/048.jpg>
- * <https://cloud.prezentacii.org/19/05/144557/images/screen8.jpg>