



# ПРОГРЕССИИ

## (9 КЛАСС)

*Разработано учителем математики  
МОУ «СОШ» п. Аджером  
Корткеросского района Республики Коми  
Мишариной Альбиной Геннадьевной*



# Содержание

- **Числовая  
последовательность**
- **Арифметическая  
прогрессия**
- **Геометрическая  
прогрессия**



# Числовая последовательность

Функцию  $y=f(x)$ , определённую на множестве натуральных чисел  $x \in \mathbb{N}$  (или его конечном подмножестве), называют **числовой последовательностью** и обозначают  $y=f(n)$ ,

или  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ , или  $(y_n)$ .

**Виды числовой последовательности:**

- конечная



# Числовая последовательность

## Способы задания последовательности:

- **Аналитический** (указывается формула  $n$ -го члена последовательности).
- **Словесный** (правило составления последовательности выражается словесным описанием).
- **Рекуррентный** (указывается правило позволяющее вычислить  $n$ -й член данной последовательности, если известны все её предыдущие члены).



# Числовая последовательность

Решаем:

**№1.** Известно, что  $(a_n)$ -возрастающая последовательность кубов всех натуральных чисел.

Назовите  $a_1; a_2; a_3; a_4$ .

**№2.** Известно,  $(c_n)$ -возрастающая последовательность всех натуральных степеней числа 2.

Назовите  $c_1; c_2; c_3; c_4; c_5$



# Числовая последовательность

**№3.** По заданной формуле  $n$ -го члена последовательности вычислите первые пять членов последовательности:

а)  $a_n = 4n + 1$

б)  $c_n = -7n + 3$

в)  $b_n = -\frac{2}{3} - n$

г)  $x_n = n^2 + 1$



# Числовая последовательность

**№4.** Выпишите первые шесть членов последовательности  $(x_n)$ , заданной рекуррентно:

а)  $x_1=1; x_n= -x_{n-1}+5$  ( $n = 2;3;4;...$ )

б)  $x_1=-5; x_n= x_{n-1}+10$  ( $n = 2;3;4;...$ )

в)  $x_1=-512; x_n= 0,5x_{n-1}$  ( $n = 2;3;4;...$ )



# Получилось?

## МОЛОДЕЦ!!!







# Арифметическая прогрессия

**Определение.** Арифметическая прогрессия – это числовая последовательность, где каждый последующий член равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом **d**.  
Число **d** называется **разностью** арифметической прогрессии.



# Арифметическая прогрессия

- Если  $d > 0$  — арифметическую прогрессию называют **возрастающей**;
- Если  $d < 0$  — арифметическую прогрессию называют **убывающей**;
- В случае, если  $d = 0$  — все члены прогрессии равны числу  $a$ , то арифметическую прогрессию называют **стационарной**.



# Основные формулы арифметической прогрессии

1) **формула n-го члена прогрессии**

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

2) **формула СУММЫ n-первых членов  
прогрессии**

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

3) **свойство арифметической  
прогрессии**

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$



# Арифметическая прогрессия

**Характеристическое свойство  
арифметической прогрессии :**

**Числовая последовательность**

**является арифметической**

**прогрессией** тогда и только тогда, когда  
каждый ее член, кроме первого (и  
последнего, в случае конечной  
последовательности), равен среднему  
арифметическому предшествующего и  
последующего членов.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$



# Решаем

В арифметической прогрессии, первый член которой равен  $-3,4$ , а разность равна  $3$ , найдите пятый и одиннадцатый члены.

**Решение:**

Для нахождения  $n$ -ого члена арифметической прогрессии воспользуемся формулой:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Имеем:

$$a_5 = a_1 + (5 - 1)d = -3,4 + 4 \cdot 3 = 8,6;$$

$$a_{11} = a_1 + (11 - 1)d = -3,4 + 10 \cdot 3 = 26,6.$$

**Ответ:**  $8,6$  и  $26,6$



# Решаем

$(a_n)$  – арифметическая прогрессия

$a_{10} = 8, a_{12} = -2$ . Найдите  $a_{11}$ .

Решение:

Согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии:

$$a_n = (a_{n+1} + a_{n-1})/2;$$

Имеем  $a_{11} = (8 - 2)/2 = 3$

Ответ:  $a_{11} = 3$



# Решаем

Пятый член арифметической прогрессии на 15 меньше второго. Сумма третьего и седьмого её членов равна -6. Найдите третий и четвёртый члены этой прогрессии.

**Решение:** составим систему уравнений

$$\begin{cases} a_2 - a_5 = 15, \\ a_3 + a_7 = -6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + d - (a_1 + 4d) = 15, \\ (a_1 + 2d) + (a_1 + 6d) = -6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = -5, \\ a_1 = 17; \end{cases}$$

Итак:  $a_3 = a_1 + 2d$ , т.е.  $a_3 = 7$ ,  
 $a_4 = a_3 + d$ ,  $a_4 = 2$ .

Ответ:  $a_3 = 7$ ,  $a_4 = 2$ .



Для арифметической прогрессии  
заполните таблицу:

$a_1$	$d$	$a_n$	$n$	$S_n$
7	4		13	
2	2	80		
56		26	11	
2		87		801
		21	7	105





# Проверим ответы

1)  $a_n = 55; S_n = 403$

2)  $n = 40; S_n = 1640$

3)  $d = -3; S_n = 451$

4)  $d = 5; n = 18$

5)  $a_1 = 9; d = 2$



# Решаем

**Вычислите сумму:**

$$50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + 46^2 - 45^2 + \dots \\ \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$$

**Решение:**

1) Воспользуйтесь формулой разности квадратов:  
 $(50-49)(50+49) + (48-47)(48+47) +$   
 $(46-45)(46+45) + \dots + (4-3)(4+3) +$   
 $(2-1)(2+1)$

2) Выполните действия в скобках:

$99 + 95 + 91 + 87 + \dots + 7 + 3$ ; эти числа образуют убывающую арифметическую прогрессию  $a_1=99$ ,  $a_n=3$ ,  $n=25$ .

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25})}{2} \cdot 25$$

$$S_{25} = \frac{(99 + 3)}{2} \cdot 25 = 51 \cdot 25 = 1275$$

**Ответ:** сумма равна 1275.



# Решить самостоятельно

1. Найдите семнадцатый член арифметической прогрессии (a):  
-18; -15; -12;... .
2. Найдите сумму первых двадцати членов этой прогрессии (a):  
-18; -15; -12;... .
3. Найдите разность арифметической прогрессии (a), если:  
 $a_1 = -28$ ,  $a_{16} = 16$ .

Ответы: 1) 30 2) 210 3) -4



# Получилось?

## МОЛОДЕЦ!!!





# Геометрическая прогрессия

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Геометрической прогрессией называется числовая последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число  $q$ .

Число  $q$  называется **знаменателем** геометрической прогрессии.

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Если  $q < 1$ , то геометрическая прогрессия называется **бесконечно убывающей**



# Это интересно

**Какие явления в  
природе  
напоминают  
геометрическую  
прогрессию?**

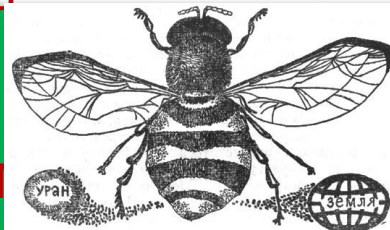
# КАК БЫСТРО РАЗМНОЖАЕТСЯ

ВСЕМИРОВАЯ МУХА ОДНА КОМНАТНАЯ И

ПУСТЬ В ТЕЧЕНИЕ ЛЕТА УСПЕВАЕТ ПОЯВИТЬСЯ 7  
ПОКОЛЕНИЙ МУХ, ПОЛОВИНА КОТОРЫХ - САМКИ.

ЗА НАЧАЛО ПЕРВОЙ КЛАДКИ ПРИМЕМ 15 АПРЕЛЯ И  
БУДЕМ СЧИТАТЬ, ЧТО МУХА-САМКА В 20 ДНЕЙ  
ВЫРАСТАЕТ НАСТОЛЬКО, ЧТО САМА ОТКЛАДЫВАЕТ  
ЯЙЦА. ТОГДА РАЗМНОЖЕНИЕ БУДЕТ  
ПРОИСХОДИТЬ ТАК:

•15 АПРЕЛЯ - САМКА ОТЛОЖИЛА 120 ЯИЦ; В НАЧАЛЕ МАЯ  
ВЫШЛО 120 МУХ, ИЗ НИХ 60 САМОК.

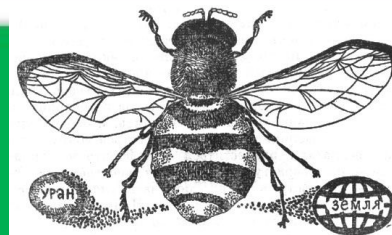


•5 МАЯ - КАЖДАЯ САМКА КЛАДЕТ 120 ЯИЦ; В СЕРЕДИНЕ  
ВЫХОДИТ  $60 \times 120 = 7200$  МУХ, ИЗ НИХ 3600 САМОК;

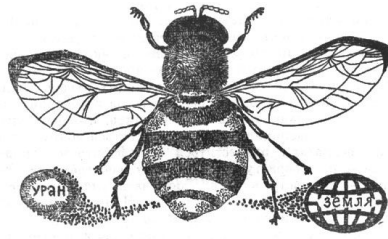
•25 МАЯ - КАЖДАЯ ИЗ 3600 САМОК КЛАДЕТ ПО 120 ЯИЦ; В  
НАЧАЛЕ ИЮНЯ - ВЫХОДИТ  $3600 \times 120 = 432\ 000$  МУХ, ИЗ НИХ  
216000 САМОК;

•14 ИЮНЯ - КАЖДАЯ ИЗ 216000 САМОК КЛАДЕТ ПО 120 ЯИЦ; В  
КОНЦЕ ИЮНЯ - ВЫХОДИТ 25920000 МУХ, В ИХ ЧИСЛЕ 1296000  
САМОК;





- **5 июля - 12960000 самок кладут по 120 яиц; в июле - выходит 1555200000 мух, среди них 777600000 самок;**
- **25 июля - выходит 93312000000 мух, среди них 46656000000 самок;**
- **13 августа - выходит 5598720000000 мух, среди них 2799360000000 самок;**
- **1 сентября - выходит 355923200000000 мух.**



**Чтобы яснее представить себе эту огромную массу мух, которые при беспрепятственном размножении могли бы в течение одного лета народиться от одной пары, вообразим, что они выстроены в прямую линию, одна около другой. Так как длина мухи 5 мм, то все эти мухи вытянулись бы на 2500 млн. км - в 18 раз больше, чем расстояние от Земли до Солнца (т. е. примерно, как от Земли до далекой планеты Уран)...**



## По определению геометрической прогрессии:

$$b_2 = b_1 * q$$

$$b_3 = b_2 * q = b_1 * q * q = b_1 * q^2$$

$$b_4 = b_3 * q = b_1 * q^2 * q = b_1 * q^3$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

**Формула n-го  
члена**



# Основные формулы геометрической прогрессии

1) формула n-го члена прогрессии .

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

2) формула суммы n-первых членов  
прогрессии

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{(q - 1)}$$

3) Свойство геометрической  
прогрессии

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} .$$



# Геометрическая прогрессия

4) **сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ,**

$$S = \frac{b_1}{1 - q} \quad \text{где } q < 1.$$



# **Запомни**

**Хорошо освоив  
формулы, можно  
научиться с легкостью  
решать задачи с  
арифметической и  
геометрической  
прогрессиями.**



# Геометрическая прогрессия

**Решаем:** Дано :  $b_1 = 81, q = \frac{1}{3}$       Найти :  $b_7$

**Решение:**

$$b_n = b_1 * q^{n-1}$$

$$b_7 = b_1 * q^{7-1} = \frac{81}{3^6} = \frac{3^4}{3^6} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$



# Решаем

Дано :  $b_1 = 2, b_2 = 6, b_n = 486$

Найти :  $n$

Решение

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$b_n = b_1 * q^{n-1}$$

$$486 = 2 * 3^{n-1}$$

$$243 = 3^{n-1}$$

$$3^5 = 3^{n-1}$$

$$n - 1 = 5$$

$$n = 6$$

Ответ : 6





# Решаем

Найдем, например,  
сумму первых  
восьми  
членов  
геометрической  
прогрессии ( $b_n$ ), в  
которой  $b_1 = 3$  ;  $q = -2$ .

Решение:

$$\begin{aligned} S_8 &= b_1(q^8 - 1)/(q - 1) = 3 \\ &\bullet ((-2)^8 - 1)/(-2 - 1) = \\ &= 3 \cdot 255/(-3) = -255 \end{aligned}$$

**Ответ:**  $S_8 = -255$

# Решить самостоятельно



## 1 вариант

Дана геометрическая прогрессия

1)  $b_1 = -4$ ,  $q = 2$ . Найти  $S_5$

2)  $b_1 = 4$ ,  $b_2 = 16$ . Найти  $S_6$

## 2 вариант

Дана геометрическая прогрессия

1)  $b_1 = -9$ ,  $q = 2$ . Найти  $S_6$

2)  $b_1 = 3$ ,  $b_2 = 9$ . Найти  $S_5$



# Проверь себя

## 1 вариант

$$1) S_5 = \frac{-4(2^5 - 1)}{2 - 1} = -124$$

$$2) q = \frac{16}{4} = 4$$

$$S_6 = \frac{4(4^6 - 1)}{4 - 1} = 5460$$

## 2 вариант

$$1) S_6 = \frac{-9(2^6 - 1)}{2 - 1} = -567$$

$$2) q = \frac{9}{3} = 3$$

$$S_5 = \frac{3(3^5 - 1)}{3 - 1} = 363$$

# Математический диктант

1. Запишите формулу, по которой можно найти неизвестный 25-й член арифметической прогрессии, если известен предыдущий член и разность.
2. Вычислите 7-й член геометрической прогрессии, если известно, что 6-й член равен 50, а знаменатель 0,1.
3. Запишите формулу по которой можно вычислить 37-й член геометрической прогрессии, если вам известен первый член и знаменатель.
4. Запишите формулу, по которой можно найти неизвестный 16-й член арифметической прогрессии, если известен первый член и разность.
5. Вычислите 6-й член геометрической прогрессии, если ее первый член 3, а знаменатель равен 2.



# Математический диктант (продолжение)

6. Найдите первый член арифметической прогрессии, если ее десятый член равен 5, а разность 4.
7. Запишите формулу для нахождения первого члена геометрической прогрессии, если известен  $n$ -й член и знаменатель.
8. Выразите разность арифметической прогрессии из рекуррентного правила.
9. Выразите разность из формулы  $n$ -го члена арифметической прогрессии.
10. Выразите знаменатель геометрической прогрессии из рекуррентного правила.
11. Выразите знаменатель из формулы  $n$ -го члена геометрической прогрессии.



# Ответы к математическому диктанту

1.  $a_{25} = a_{24} + d$

2.  $B_7 = B_6 \cdot q^6 = 50 \cdot 0,1^6 =$

3.  $B_{37} = B_1 \cdot q^{36}$

4.  $a_{16} = a_1 + d \cdot 15$

5.  $B_6 = B_1 \cdot q^5 = 3 \cdot 2^5 = 96$

6.  $a_{10} = a_1 + d \cdot 9 ;$

$$a_1 = a_{10} - d \cdot 9 = 5 - 4 \cdot 9 = -31$$

7.  $B_n = B_1 \cdot q^{n-1} ;$

$$B_1 = B_n : q^{n-1}$$

8.  $d = a_{n+1} - a_n$

9.  $a_n = a_1 + d(n-1);$

$$d = (a_n - a_1) : (n-1)$$

10.  $q = B_{n+1} : B_n$

11.  $B_n = B_1 \cdot q^{n-1};$

$$q^{n-1} = B_n : B_1;$$

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{B_n}{B_1}}$$

**Критерии оценок:**

5 - 6 правильно выполненных заданий выставляется отметка «3»;

7 – 8 заданий выставляется отметка «4»;

9 -10 заданий выставляется отметка «5».



Получилось?

**МОЛОДЕЦ!!!**





# Интересные факты:

- 1) **Химия.** При повышении температуры по арифметической прогрессии скорость химических реакций растет по геометрической прогрессии.
- 2) **Геометрия.** Вписанные друг в друга правильные треугольники образуют геометрическую прогрессию.

Какие величины в треугольнике образуют геометрическую прогрессию?

- 3) **Физика.** И в физических процессах встречается эта закономерность. Нейтрон, ударяя по ядру урана, раскалывает его на две части. Получаются два нейтрона. Затем два нейтрона, ударяя по двум ядрам, раскалывает их еще на 4 части и т.д. – это геометрическая прогрессия.





# Интересные факты:

- 4) **Биология.** Микроорганизмы размножаются делением пополам, поэтому при благоприятных условиях, через одинаковый промежуток времени их число удваивается.
- 5) **Экономика.** Вклады в сбербанке ежегодно увеличиваются на одинаковый процент.

Вклад составляет 1000 рублей при 4% годовых. Какую сумму получит вкладчик через 3 года?



# Проектная работа

Составить две  
задачи

по теме "Прогрессии",

их условия и решения

оформить на альбомных листах



# Интернет ресурсы

Картинки [www.google.ru](http://www.google.ru) Картинки [www.google.ru](http://www.google.ru),  
<http://forchel.ru/1345-klipart-detskie-yemocii.html>

Шаблон\_Шаблон <http://aida.ucoz.ru>

Автор <http://mim58.ucoz.ru/>

А.Г. Мордкович, Алгебра 9 класс, М.,  
Мнемозина, 2007

А.Н. Рурукин и др., Поурочные разработки по  
алгебре 9 класс, М., Вако, 2011