Уравнения

Лысенко Надежда Анатольевна

Содержание

1 Понятие уравнения и его свойства

2 Методы решения уравнений

- Метод разложения на множители
- Метод введения новой переменной
- Функционально-графический метод

Теоретическая часть

1 Понятие уравнения (определение, равносильность)

2 Теоремы о равносильности уравнений

3 Понятие алгебраического, рационального, дробно- рационального, иррационального уравнений

4 Суть методов а) разложение на множители

б) замена переменной

в) функционально-графический

Метод разложения на множители

Пример 1. Решить алгебраическое уравнение :

$$(x-\alpha)^3+(x-b)^3=(2x-\alpha-b)^3 .$$

- Соберём все члены в левой части уравнения и сумму кубов $(x-\alpha)^3+(x-b)^3$ разложим на множители. После этого в левой части можно выделить общий множитель $2x-\alpha-b$:

  $(2x-\alpha-b)((x-\alpha)^2-(x-\alpha)(x-b)+(x-b)^2-(2x-\alpha-b)^2)=0,$

  $(2x-\alpha-b)(-3x^2+3(\alpha+b)x-3\alpha b)=0.$

  Отсюда $x_1=(\alpha+b):2,\quad x_2=\alpha,\quad x_3=b.$

- Ответ: $(\alpha+b):2;\ \alpha;\ b.$

- Пример 2. Решите дробно-рациональное уравнение:

$$\frac{2}{x+8}+\frac{5}{x+9}=\frac{3}{x+15}+\frac{4}{x+6}.$$

- Представим уравнение в таком виде

$$\frac{5}{x+9}-\frac{4}{x+6}=\frac{3}{x+15}-\frac{2}{x+8}.$$

Приведем разности в левой и правой частях этого уравнения к общим знаменателям:

$$\frac{x-6}{(x+9)(x+6)}=\frac{x-6}{(x+15)(x+8)},$$

$$(x-6)\left(\frac{1}{(x+9)(x+6)}-\frac{1}{(x+15)(x+8)}\right)=0$$

Приравняем нулю каждый из множителей в левой части последнего уравнения.

Получим $x - 6 = 0$ или $8x = 66$, учитывая при этом, что $x \neq -9$, $x \neq -6$, $x \neq -15$, $x \neq -8$.

Тогда $x = 6$ или $x = -\frac{33}{4}$

Ответ: 6,-33/4.

Пример 3.Решите уравнение:

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}=1.$$

- Возведем обе части уравнения в куб, пользуясь формулой

  $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

- Будем иметь:

$$x-1+2x-1+3\sqrt[3]{(x-1)(2x-1)}\cdot\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}\right)=1$$

$$\sqrt[3]{(x-1)(2x-1)}\cdot\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}\right)=1-x$$

А теперь воспользуемся исходным уравнением, на основании которого сумма в скобках равна 1:

$$\sqrt[3]{(x-1)(2x-1)} = 1 - x.$$

Последнее уравнение также возведем в куб:

$(x-1)(2x-1)=(1-x)^3$, $(x-1)(2x-1+(x-1)^2)=0$, $(x-1)x^2=0$.

Отсюда $x_1=1$, $x_2=x_3=0$.

Проверка по первоначальному уравнению показывает, что значение $x=1$ ему удовлетворяет, а значение $x=0$ – не удовлетворяет.

- Ответ: 1.

Введение новой переменной

Пример 4. Решите уравнение:

$(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)= 4x^2$.

- В левой части уравнения умножим первый множитель на четвёртый, второй на третий, получим: $(x^2-9x+8)(x^2-6x+8)=4x^2$.

  А дальше разделим обе части уравнения на x^2, пользуясь тем, что значение $x=0$ не является корнем уравнения:

$(x-9+\frac{8}{x})(x-6+\frac{8}{x})=4$

Введем подстановку: $x-9+\frac{8}{x}=y$. Будем иметь:

$y(y+3)=4$, $y^2+3y-4=0$; $y_1=1$, $y_2=-4$.

В обоих случаях найдем x совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} x-9+\frac{8}{x}=0, \\ x-9+\frac{8}{x}=-4; \end{array}\right.$

$\pm\sqrt{17}$

$x_{1,2}=5 \pm\sqrt{17}$

- Ответ: 5 .

Пример 5.Решите уравнение: $(x+3)^4+(x+5)^4=16$.

- Положим $x+4=y$,т. к. $\frac{(x+3)+(x+5)}{2}=x+4$.

Имеем: $(y-1)^4+(y+1)^4=16$.

Теперь нужно в левой части уравнения $(y-1)$ и $(y+1)$ возвести в квадрат, а затем то, что получилось, ещё раз возвести в квадрат. После упрощений образуется биквадратное уравнение: $y^4+6y^2-7=0$.

Его корни $y_{1,2} = \pm 1$. Отсюда $x_1=-3$, $x_2=-5$.

- Ответ: -3; -5.

Пример 6. Решите уравнение: $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1.$

- Отнимем от обеих частей уравнения $\frac{2x^2}{x^2+1}$ для того, чтобы получить в левой части квадрат разности:

$$(x - \frac{x}{x+1})^2 = 1 - \frac{2x^2}{x+1}, \qquad \frac{x^4}{(x+1)^2} = 1 - \frac{2x^2}{x+1}.$$

А теперь очевидная подстановка $\frac{x^2}{x+1}$ = y.

- Ответ: $\frac{\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$.

Пример 7. Решите уравнение:

$x^2+8x+8=4(x+2)\sqrt{x+1}$

- Положим $\sqrt{x+1}$ =t.

При $t \geq 0$

это равенство равносильно равенству $x+1=t^2$. Получаем систему рациональных уравнений:

$$\begin{cases} x^2+8x+8=4(x+2)t \\ x+1=t^2 \end{cases}$$

Для ее решения выразим x через t из второго уравнения: $x = t^2-1$.

Подставим это выражение в первое уравнение и новое уравнение упростим

$(t^2-1)^2+8(t^2-1)+8=4(t^2-1)t,$

$t^4-2t^2+1+8t^2-8+8=4t^3+4t,$

$t^4-4t^3+6t^2-4t+1=0.$

Последнее уравнение имеет корень $t=1$. Мало того, проверка показывает, что значение $t=1$ является четырехкратным корнем этого уравнения. Тогда уравнение принимает вид $(t-1)^4=0$. Если $t=1$, то $x=0$.

- Ответ: 0.

Функционально-графический метод

Пример 8.Решите уравнение:

$$\sqrt{x^3 - x} + \sqrt[4]{x - x^2} = x^3 - 3x + 2.$$

Найдём область определения D уравнения. Она совпадает с множеством всех решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^3 - x \geq 0, \\ x - x^2 \geq 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является множество $[-1;0] \cup [1;\infty)$, второго отрезок $[0;1]$. Следовательно, область D состоит всего из двух точек -0 и 1. Значение x=0 не удовлетворяет уравнению, значение x=1- удовлетворяет.

- Ответ: 1.

Пример 9. Решите уравнение:

$$\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{x+25}+x=7.$$

- Очевидно один корень уравнения x=2. Имеет ли оно другие корни?

Левая часть уравнения есть возрастающая функция, как сумма трех возрастающих функций. Но монотонная функция каждое свое значение (в данном случае значение 7) принимает в единственной точке, поэтому других корней у уравнения нет.

- Ответ: 2.