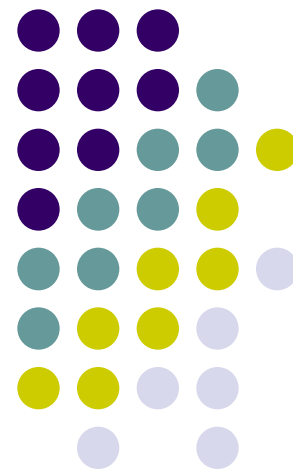


Применение формул сокращённого умножения





Примеры основных формул сокращённого умножения:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

А также:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a + b)(a^{2m} - a^{2m-1}b + \dots + (-1)^k a^{2m-k}b^k + \dots - ab^{2m-1} + b^{2m})$$

Исторические сведения



Формулы сокращённого умножения были известны еще 4000 лет назад. Ученые Древней Греции представляли величины не числами или буквами, а отрезками прямых. Вместо «произведение a и b » говорилось «прямоугольник, содержащийся между a и b », вместо a^2 - «квадрат на отрезке a ».

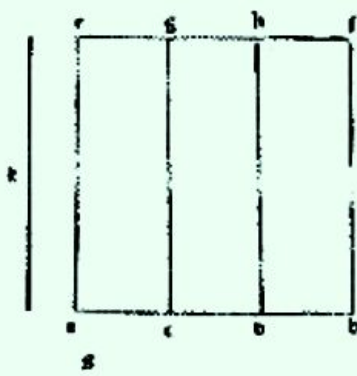
Евклид «Начала»

II



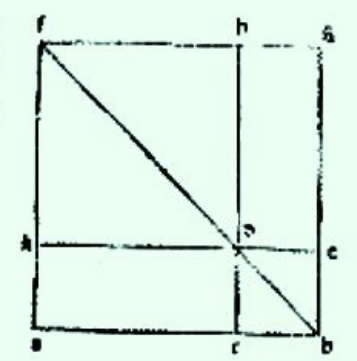
Propositio 2

Si fuerit linea i ptes diuisa illud qd ex ductu totius linee in seipſa fiet equu erit dis q ex ductu cuiusde i oes suas ptes. Et sic linea. a. b. diuisa fit. a. c. e. d. k. b. dico qd illud qd fit ex ductu totius. a. b. in se qd fit. a. c. e. d. k. b. equu est bis que sunt ex ipſo tota in vnaniquaqz ptesum qd palam patet. ductis. e. g. e. d. b. equu / ductu. a. c. e. b. f. Et aliter linatur. k. e. g. h. a. b. cuiusqz p ptes. Nam qd fit ex ductu. k. in totam. a. b. equu est qd fit ex ductu. k. in omnes ptes. a. b. et qd ex. k. i. a. b. ca. ut fit quatuor ex. a. b. in se. e. ex. k. in omnes ptes. a. b. quatuor ex. a. b. in omnes ptes eiusde. patet id qd. k. a. b. sit equalis patet ex esse propofitum.



Propositio 3

Si fuerit linea in duas ptes diuisa illud qd fiet ex ductu toto in alterutra parte equu erit bis q ex ductu eiusde par te in se vltima et alterius in alteram.



Propositio 4

Si fuerit linea in duas ptes diuisa illud qd ex ductu totius i seipſa fit equu e bis q ex ductu vtriusqz pte i seipſa et altera i altera bis. Ex hoc manifestu e qd i oi qdrato due superficies quas diam eter secat p mediū sunt ambe quadrate.

Et sic linea. a. b. diuisa fit. a. c. e. b. c. dico qd quadratum totius a. b. equum est duobus quadratis quarum linearum. a. c. e. b. c. duplo cuius qd fit ex ductu vnius eoz in alteram. describam quadratum alterius partialium. Bqz e. d. b. e. quadratu linee. e. b. cui adinquam p rone seculu ductu directuſi linee alterius. e. g. a. c. qd factam hoc mo. in quadrato vltimo prostrabam diametru b. d. et p puncto. a. educam perpendicularem sup lineam. a. b. que fit. a. k. qd. a. k. et diametru. b. d. pducant vsqz quo conuertat in puncto. f. et a puncto. f. producam f. b. quid illantur linec. a. b. qua. f. b. et. b. e. producam vsqz quo conuertat i puncto. g. et produca. e. d. vsqz ad. h. et. e. d. vsqz ad. k. Et quia duo latera. d. e. et. e. c. b. trian guli. d. e. b. sunt equalia. erit p. s. pmi duo anguli. e. d. b. et. e. b. d. equalia. et qz angulus. e. c. b. rectus erit p. s. pmi vtriusqz eoz medietas recti. Eade rone vter qz duoru anguloru. e. d. b. et. e. b. d. erit medietas recti. quare p seculu piam. et p mi erit vniquisqz quatuor angulor qui sunt. b. f. d. et. b. d. f. e. k. f. d. et. k. d. f. trie dices recti. ergo p. s. pmi. f. g. et. g. b. sunt equalia. similiter queqz. f. a. e. a. b. pari rone. f. b. et. b. d. itoz. f. k. et. k. d. quare vtriusqz duoru superficiu. a. b. g. f. e. k. d. b. f. est quadrato et qz totale quadratum. a. b. f. g. est quadratu linee. a. b. con ſtat ex duobus quadratis que consistunt circa diametru que sunt quadrata quarum linearum. a. c. e. b. c. et ex duobus supplementis quoz vniquisqz pducit ex. a. c. in b. c. patet propofitum nostru. Et aliter fit linea. a. b. vt pmo diuisa in. a. c. e. c. b.



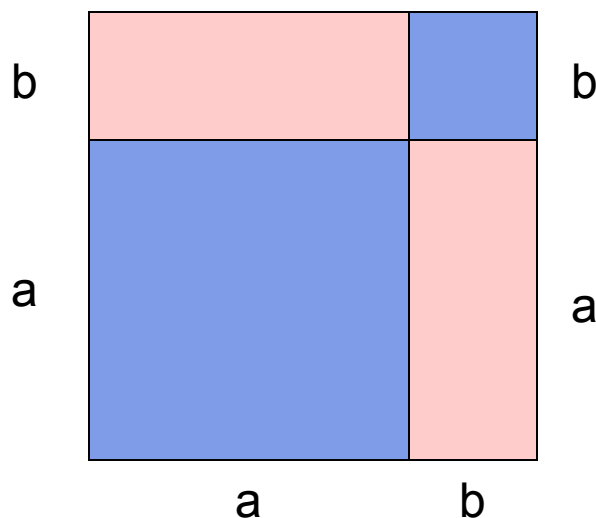


Евклид «Начала»

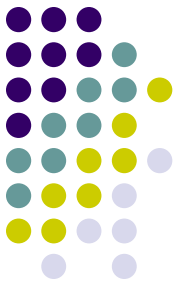
«Если отрезок как-либо разбит на два отрезка, то площадь квадрата, построенного на всем отрезке, равна сумме площадей квадратов, построенных на каждом из двух отрезков, и удвоенный площади прямоугольника, сторонами которого служат эти два отрезка».

Суть этой фразы в формуле:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



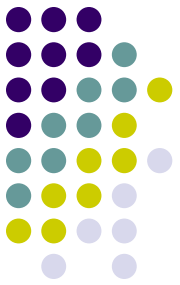
Применение формул сокращённого умножения:



- в алгебре
- в геометрии



Разложение многочленов на множители

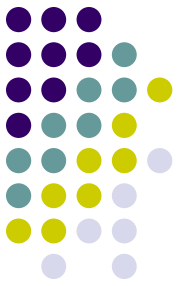


- $(a^2 + 1)^2 - 4a^2 = ((a^2 + 1) - 2a)((a^2 + 1) + 2a) = (a^2 + 1 - 2a)(a^2 + 1 + 2a) = (a^2 - 2a + 1)(a^2 + 2a + 1) = (a - 1)^2(a + 1)^2$
- $a^2 - b^2 - a - b = (a - b)(a + b) - (a + b) = (a + b)(a - b - 1)$

В разложении данных многочленов использовались формулы:

- 1) разность квадратов
- 2) квадрат разности
- 3) квадрат суммы

Представление выражения в виде многочлена



Представить в виде многочлена $(x^2 - \sqrt{5})^2$.

$$(x^2 - \sqrt{5})^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = x^4 - 2\sqrt{5}x^2 + 5$$

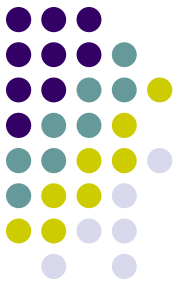
Ответ: $x^4 - 2\sqrt{5}x^2 + 5$

Представить в виде многочлена $-(\sqrt{3} - x) \cdot (x^2 - 3) \cdot (x + \sqrt{3})$.

$$-(\sqrt{3} - x) \cdot (x^2 - 3) \cdot (x + \sqrt{3}) = (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x^2 - 3) = (x^2 - 3) \cdot (x^2 - 3) = (x^2 - 3)^2 = x^4 - 6x^2 + 9$$

Ответ: $x^4 - 6x^2 + 9$

Решение уравнения



1 способ

$$(x - 2)^3 + (x + 2)^3 = 2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 2(x^3 - 27)$$

$$2x^3 + 24x = 2x^3 - 54$$

$$24x = -54$$

$$\underline{\underline{x = -2,25}}$$

В решении данного уравнения первым способом использовались формулы:

- 1) куб разности
- 2) куб суммы

Решение уравнения

2 способ

$$(x - 2)^3 + (x + 2)^3 = 2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$(x-2+x+2)((x-2)^2 - (x-2)(x+2) + (x+2)^2) = 2(x^3-27)$$

$$2x(x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4 + x^2 + 4x + 4) = 2x^3 - 54$$

$$2x(x^2 + 12) = 2x^3 - 54$$

$$2x^3 + 24x - 2x^3 = - 54$$

$$24x = - 54$$

$$\underline{\underline{x = - 2,25}}$$



В решении данного уравнения вторым способом использовались формулы:

- 1) сумма кубов; 2) квадрат разности; 3) квадрат суммы;
- 4) разность квадратов.

Доказательство неравенства



Доказать неравенство:

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}, \text{ если } a, b, c, d > 0$$

$$ac + ad + bc + bd \geq ac + bd + 2\sqrt{abcd}$$

$$ad + bc - 2\sqrt{abcd} \geq 0$$

$$\left(\sqrt{ad}\right)^2 - 2\sqrt{ad} \cdot \sqrt{bc} + \left(\sqrt{bc}\right)^2 \geq 0$$

$$\left(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right)^2 \geq 0, \text{ что верно.}$$

Делимость

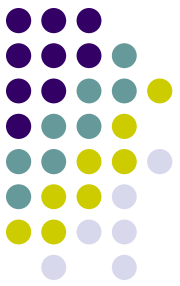


Докажем, что число $n^3 - n$, где n – натуральное число, делится на 6:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$$

Заданное число есть произведение трёх последовательных чисел, из которых одно обязательно делится на 3 и хотя бы одно делится на 2. Если произведение делится и на 3, и на 2, то оно делится и на 6.

Тождественные преобразования



Докажем тождество: $\left(\frac{x}{x-3} + \frac{x^2+1}{x^3+1} \cdot \frac{x^2-x+1}{x-3} \right) \div \frac{2x^2+x+1}{x+1} = \frac{1}{x-3}$.

$$\frac{x^2+1}{x^3+1} \cdot \frac{x^2-x+1}{x-3} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x-3} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-3)},$$

$$\frac{x}{x-3} + \frac{x^2+1}{x^3+1} \cdot \frac{x^2-x+1}{x-3} = \frac{x}{x-3} + \frac{x^2+1}{(x+1)(x-3)} = \frac{x(x+1)+x^2+1}{(x+1)(x-3)} = \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-3)},$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{x-3} + \frac{x^2+1}{x^3+1} \cdot \frac{x^2-x+1}{x-3} \right) \div \frac{2x^2+x+1}{x+1} &= \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-3)} \div \frac{2x^2+x+1}{x+1} = \\ &= \frac{(2x^2+x+1)(x+1)}{(x+1)(x-3)(2x^2+x+1)} = \frac{1}{x-3}. \end{aligned}$$

Итак, с помощью тождественных преобразований с применением формул сокращённого умножения мы левую часть равенства привели к виду правой его части. Тождество доказано.

Задача Пифагора



«Всякое нечётное число, кроме единицы, есть разность двух квадратов».

Решение:

n – натуральное число

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1 - n)(n + 1 + n) = 2n + 1$$

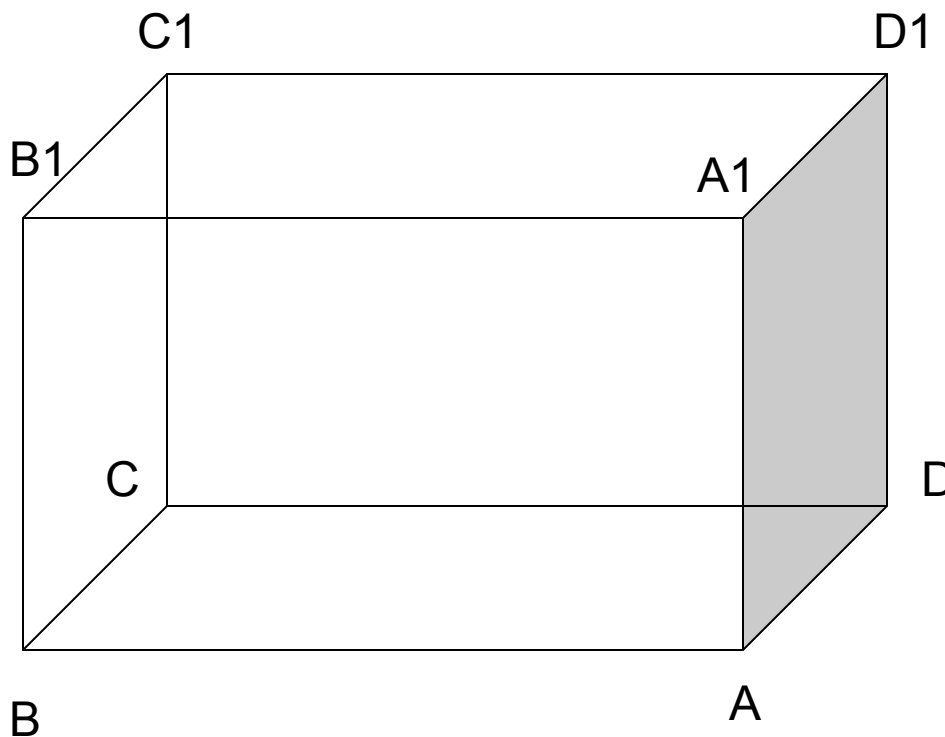
$2n + 1$ – нечётное число



Геометрическая задача



В прямоугольном параллелепипеде длина на 5 см больше ширины и на 5 см меньше высоты. Площадь поверхности равна 244 см^2 . Найдите измерения параллелепипеда (длину, ширину, высоту).



Геометрическая задача



Пусть x см – AB (длина), тогда $(x+5)$ см – AA_1 (высота), $(x-5)$ см – AD (ширина).

$S = 2S_{ABCD} + 2S_{AA_1D_1D} + 2S_{AA_1B_1B}$, а по условию – 244 см^2

$S_{ABCD} = x(x-5)$; $S_{AA_1D_1D} = (x-5)(x+5)$;

$S_{AA_1B_1B} = x(x+5)$

Составим и решим уравнение:

$$2x(x-5) + 2(x-5)(x+5) + 2x(x+5) = 244$$

$$x(x-5) + (x-5)(x+5) + x(x+5) = 122$$

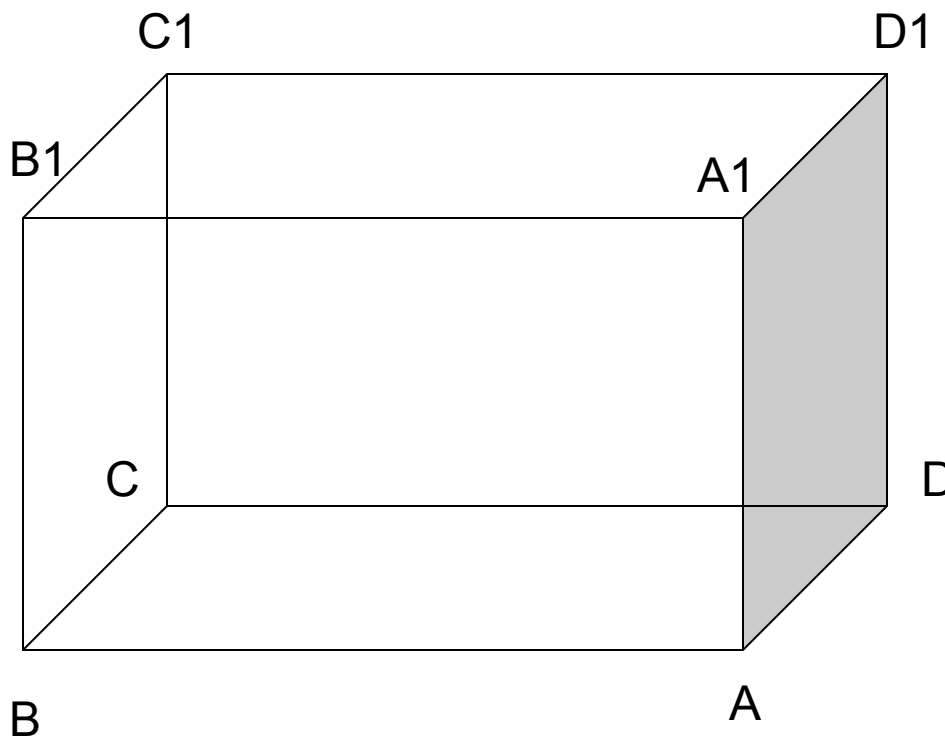
$$x^2 - 5x + x^2 - 5^2 + x^2 + 5x = 122$$

$$3x^2 = 122 + 25$$

$$3x^2 = 147$$

$$x^2 = 49, x > 0 \text{ (по смыслу задачи)}$$

$$\underline{\underline{x = 7}}$$



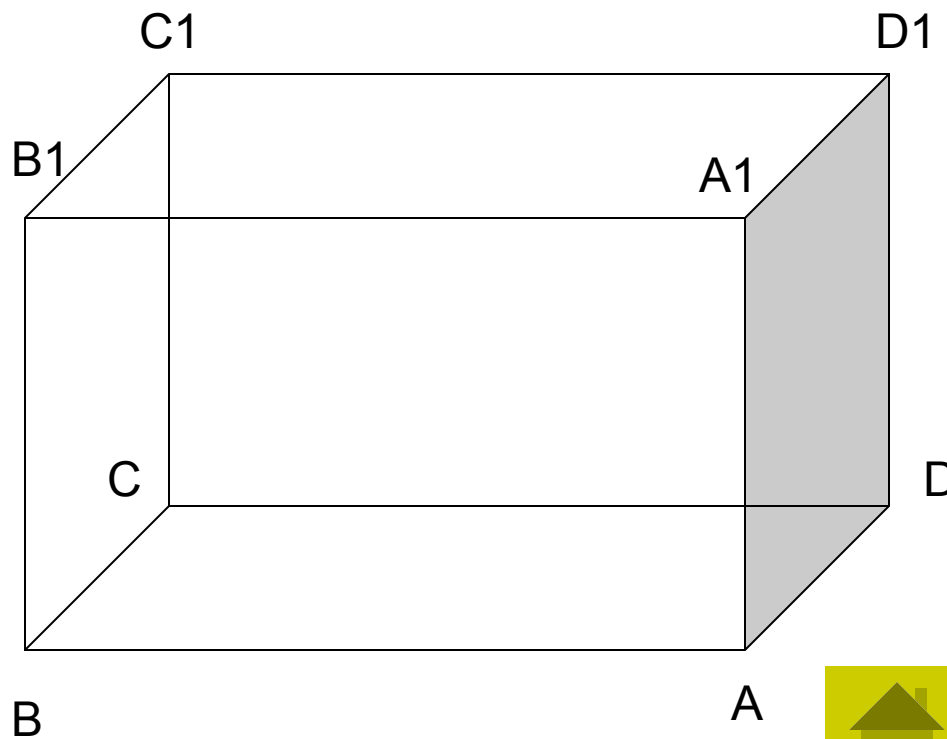
Геометрическая задача



$AB = 7$ см – длина

$AA_1 = 7$ см + 5 см = 12 см –
высота

$AD = 7$ см – 5 см = 2 см –
ширина



Ответ: 7 см; 12 см; 2 см.





Спасибо за внимание.

Презентацию подготовили:

Плеханова Полина, Уткина
Екатерина

8 «А» класс, ГОУ гимназия

№144

