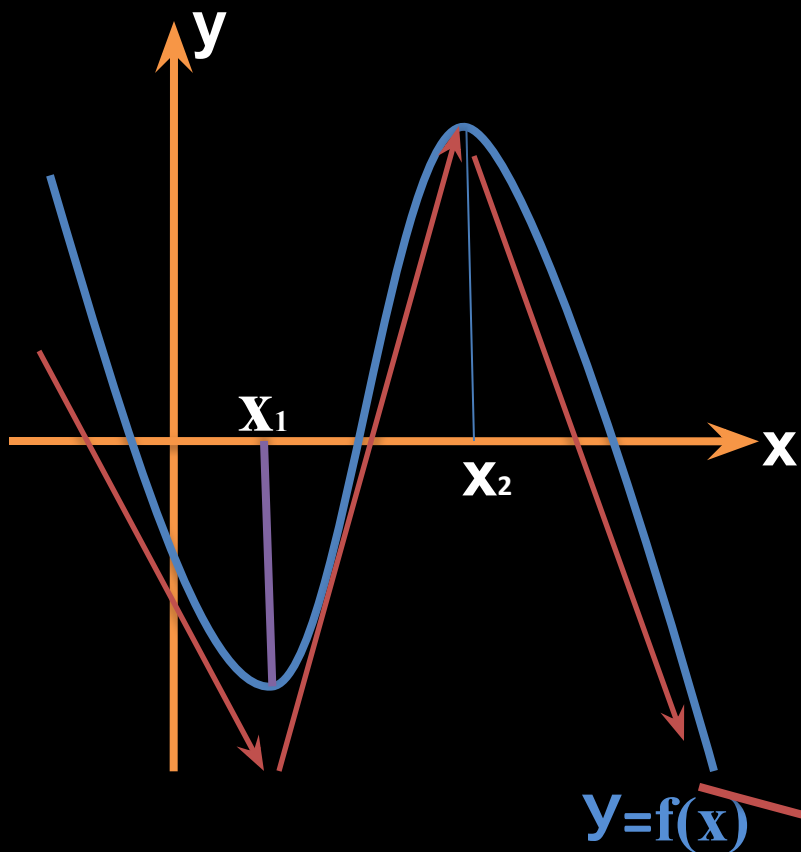


Применение производной для исследования функций.

1. Нахождение промежутков возрастания функции.
2. Нахождение промежутков убывания функции.
3. Нахождение промежутков постоянства функции.
4. Нахождение экстремумов.
5. Решение уравнений.
6. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции, непрерывной на отрезке.

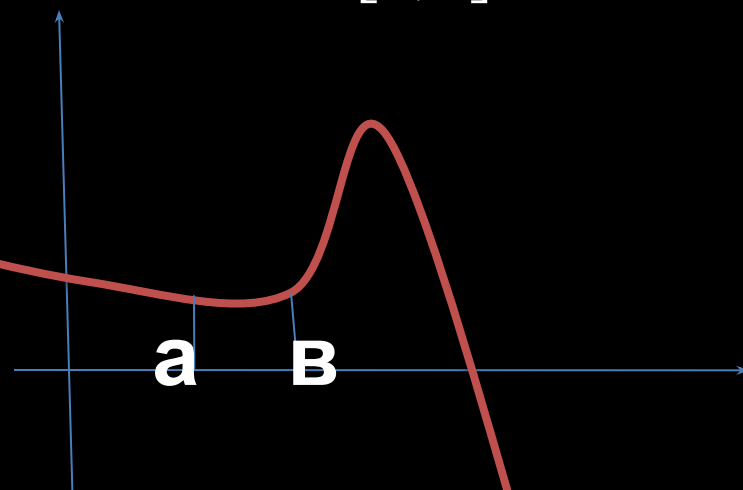
Монотонность функции



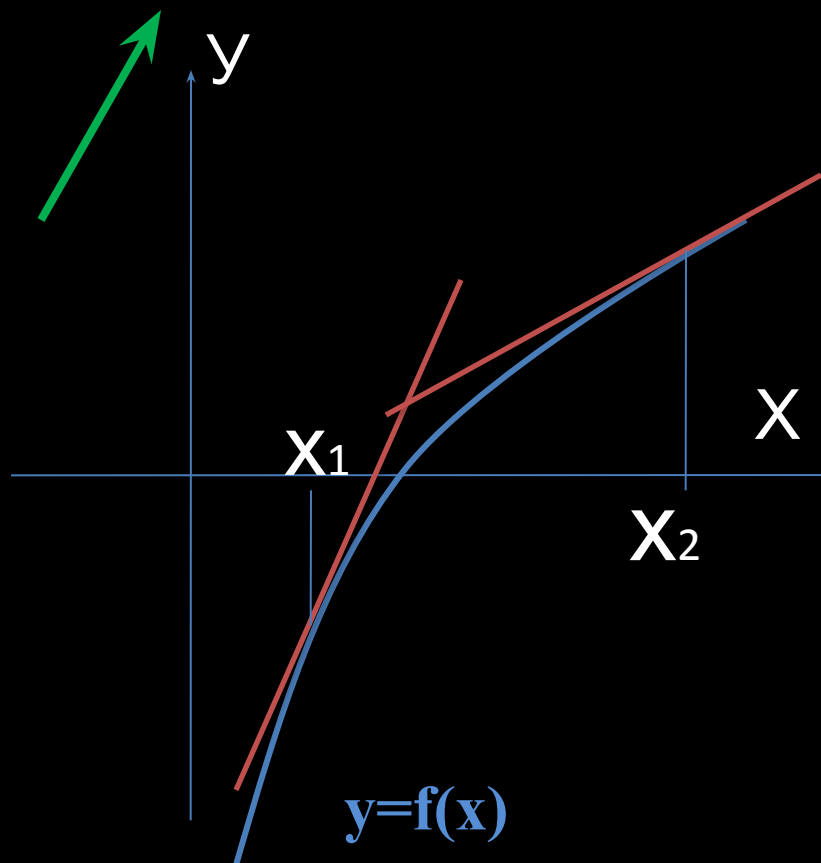
Убывает на
 $(-\infty; x_1], [x_2; +\infty)$

Возрастает на
 $[x_1; x_2]$.

Постоянна на
 $[a; b]$



Исследование функции на возрастание



Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I , то функция f монотонно возрастает на интервале I .

АЛГОРИТМ

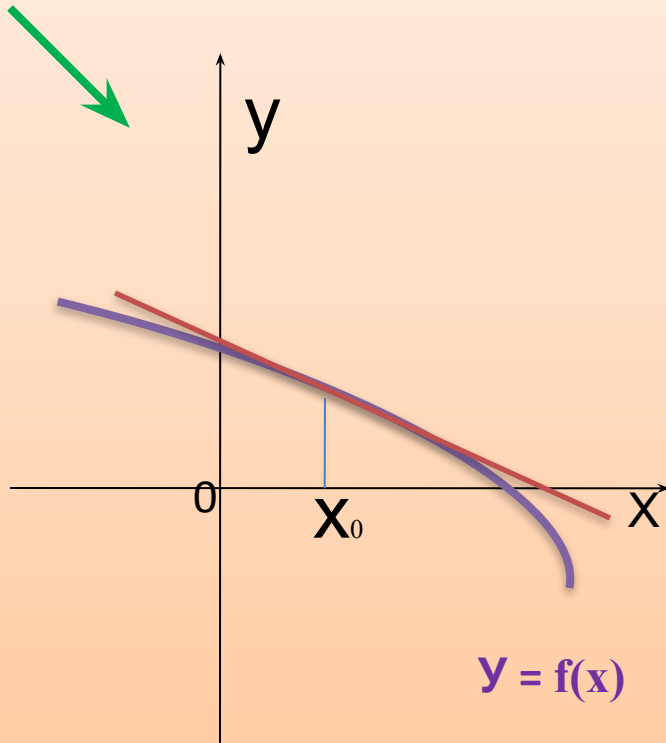
1. $D(f)$
2. $f'(x)$
3. Решить неравенство $f'(x) > 0$
4. Выписать промежутки, где производная имеет знак «+».

Исследование функции на убывание

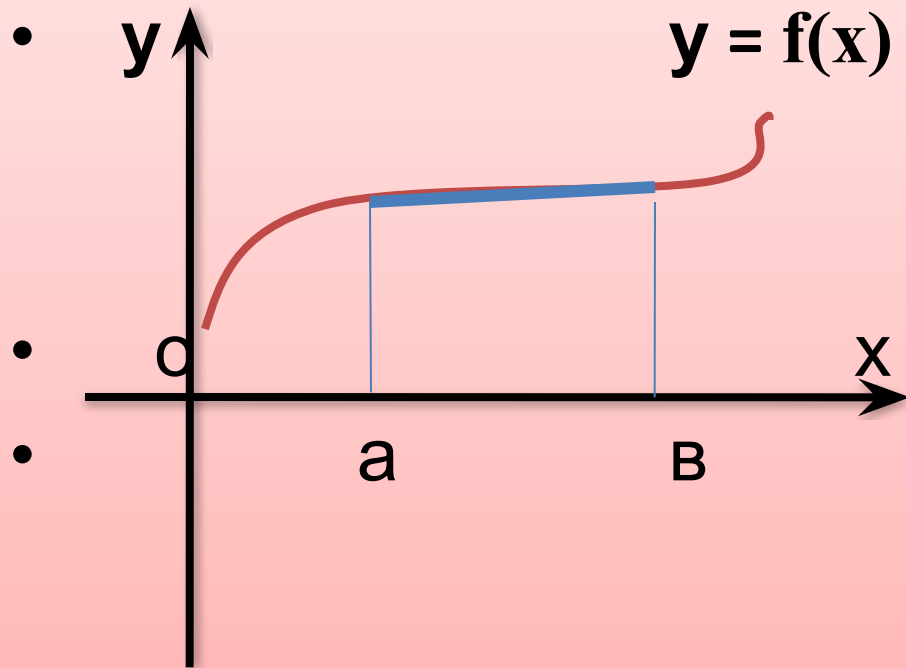
Если в каждой точке интервала I $f'(x) < 0$, то функция $y = f(x)$ монотонно убывает на этом промежутке.

АЛГОРИТМ

1. $D(f)$
2. $f'(x)$
3. Решить неравенство $f'(x) < 0$
4. Выписать промежутки, где производная имеет знак «-».



Исследование функции на ПОСТОЯНСТВО



- Функция $y = f(x)$ постоянна на интервале $(a; b)$ тогда и только тогда, когда
- $f'(x) = 0$ в каждой точке этого интервала.

ЭКСТРЕМУМЫ

Необходимое условие экстремума

Если X_0 – точка экстремума функции

$Y = f(x)$, то эта точка является критической точкой данной функции, т. е. в этой точке производная либо равна нулю, либо она не существует.

Если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$
и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$,
то X_0 – точка максимума.

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке X_0 и производная $f'(x)$ меняет знак в этой точке, то X_0 – ТОЧКА ЭКСТРЕМУМА функции $y = f(x)$

Если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$
и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$,
то X_0 – точка минимума.

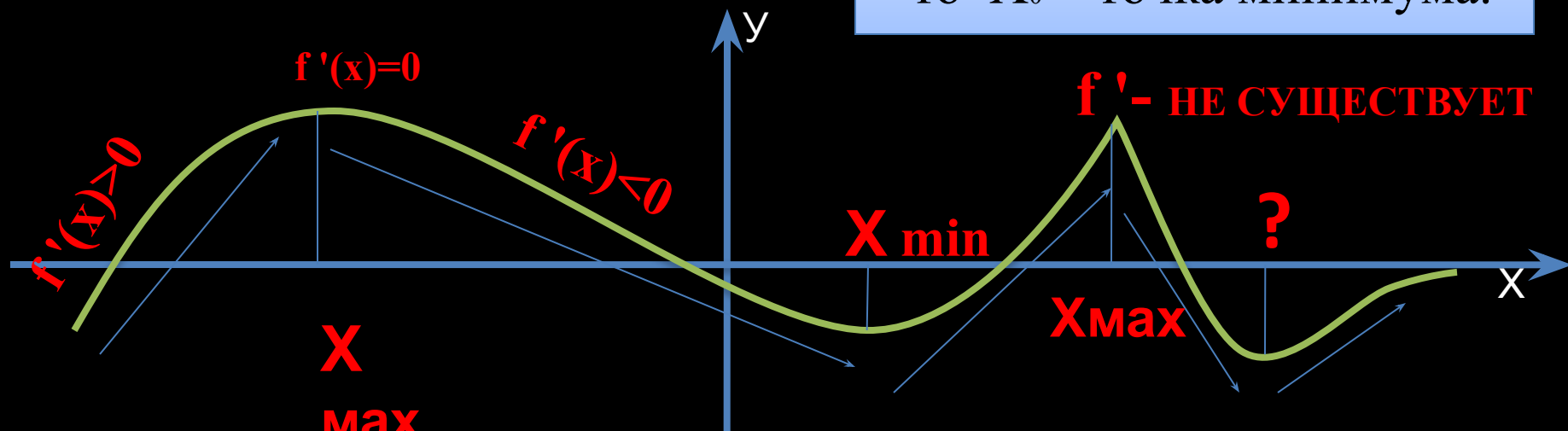


СХЕМА ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ИНТЕРВАЛОВ МОНОТОННОСТИ И ЭКСТРЕМУМОВ

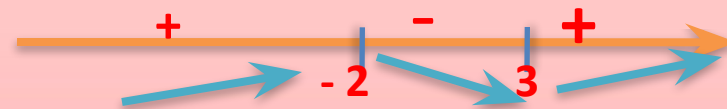
ЭТАПЫ

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную
3. Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная функции равна нулю или не существует.
4. В каждом из интервалов, на которые область определения разбивается критическими точками, определить знак производной и характер изменения функции.
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума или минимума, или не является точкой экстремума.
6. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 5$$

1. $D(y) = R$. Функция непрерывна во всей области определения.
2. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$
3. $f'(x) = 0$, $6x^2 - 6x - 36 = 0$ при $x = -2$, $x = 3$.

4. знак f' .



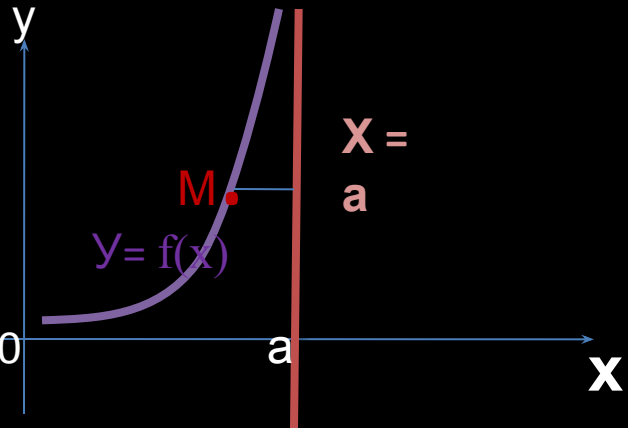
Характер изменения

функции
 $x = -2$ - точка максимума
 $x = 3$ - точка минимума

6. Функция возрастает на $(-\infty; -2]$ и на $[3; +\infty)$. Убывает на $[-2; 3]$.
 $x_{\max} = -2$ $U_{\max} = 49$;
 $x_{\min} = 3$ $U_{\min} = -76$

А С И М П Т О Т Ы

Прямая $y = kx + b$ называется асимптотой графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки M графика функции до прямой $y = kx + b$ стремится к нулю при бесконечном удалении точки M .



Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции

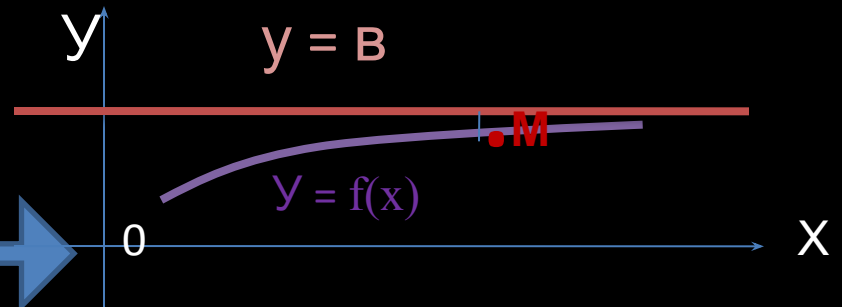
$$y = f(x), \text{ если } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

$$x \rightarrow a$$

Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

$$x \rightarrow \infty$$



Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$

$$x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$$

$$x \rightarrow \infty$$

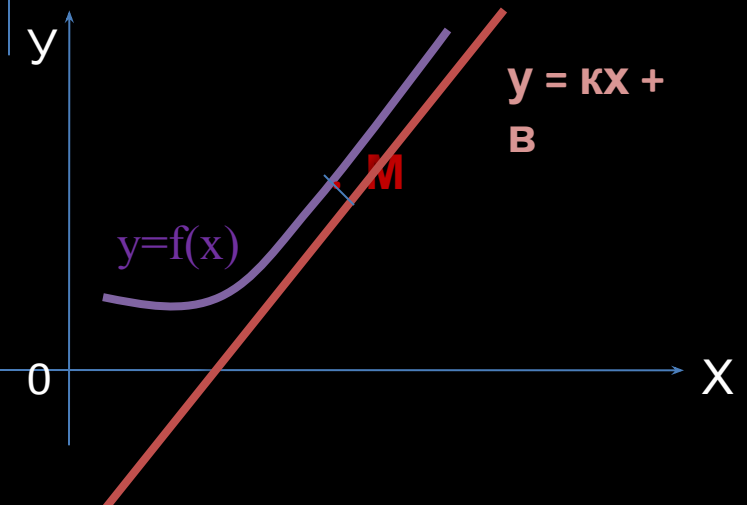
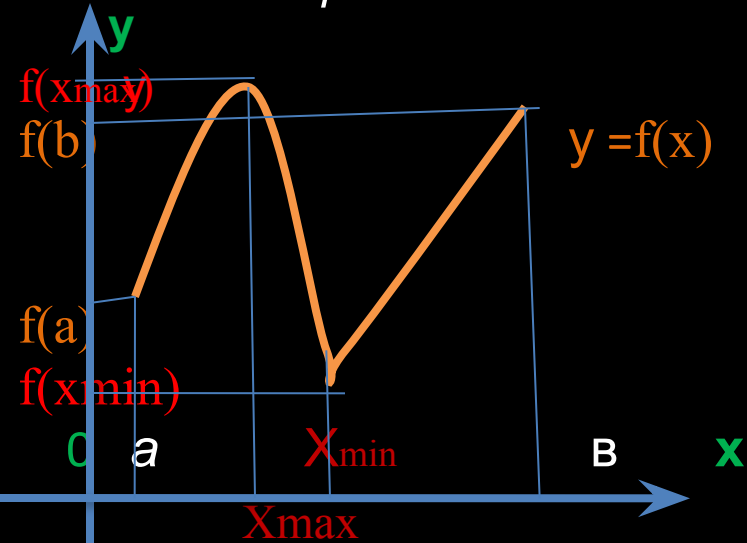


СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЁ ГРАФИКА.

- 1. НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ.**
- 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ НА ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ.**
- 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ НА ПЕРИОДИЧНОСТЬ.**
- 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГРАФИКА ФУНКЦИИ С ОСЯМИ КООРДИНАТ И ИНТЕРВАЛОВ, ГДЕ ФУНКЦИЯ СОХРАНЯЕТ ЗНАК.**
- 5. НАХОЖДЕНИЕ АСИМПТОТ ГРАФИКА ФУНКЦИИ.**
- 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИИ**

Наибольшее и наименьшее значение функции, непрерывной на отрезке.

Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.

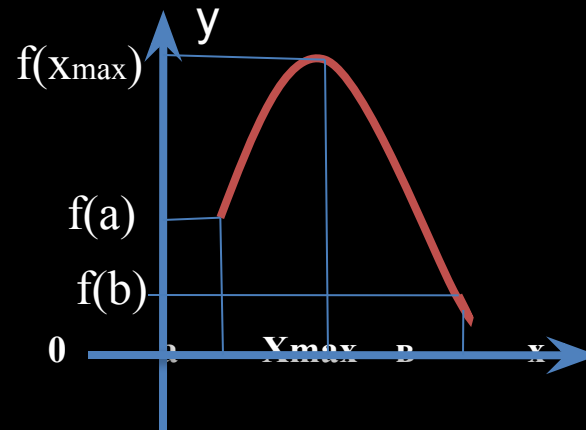


$$\max f(x) = f(x_{max})$$

$$[a; b]$$

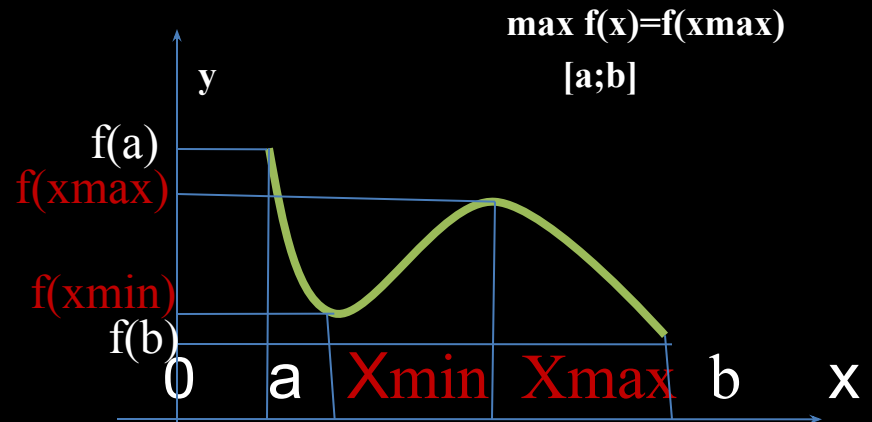
$$\min f(x) = f(x_{min})$$

$$[a; b]$$



$$\min f(x) = f(b)$$

$$[a; b]$$



$$\max f(x) = f(a)$$

$$[a; b]$$

$$\min f(x) = f(b)$$

$$[a; b]$$



Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке

ЭТАПЫ

1. Найти производную
2. Найти на данном отрезке критические точки, т.е. точки, в которых $f'(x)=0$ или не существует
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее.

пример для функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$ на отрезке $[0;4]$

1. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$
2. $f'(x) = 0$ при $x = -2$ и при $x = 3$.
Отрезку $[0;4]$ принадлежит только одна критическая точка: $x = 3$.
3. $f(0) = 5$; $f(3) = -76$; $f(4) = -59$
4. $\max_{[0;4]} f(x) = f(0) = 5$; $\min_{[0;4]} f(x) = f(3) = -76$