

*Применение свойств
функций к решению
уравнений и неравенств*

*Знакомство с методом
мажорант*

Метод мажорант

На самом деле, вы встречались с этим методом, просто не знали, как он называется.

Некоторые математики называют этот метод

по-другому:

«метод математической оценки»,

«метод mini-max».

Это очень красивый метод, и ему непременно следует научиться

Определение

Мажорантой (от *magiorante* – главенствующий)

данной функции $f(x)$ на множестве $D(f)$

называется такое число M , что

либо $f(x) \leq M$ для всех $x \in D(f)$,

либо $f(x) \geq M$ для всех $x \in D(f)$.

Метод мажорант или метод оценки

используется (чаще всего) в уравнениях вида

$f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – ограниченные функции,

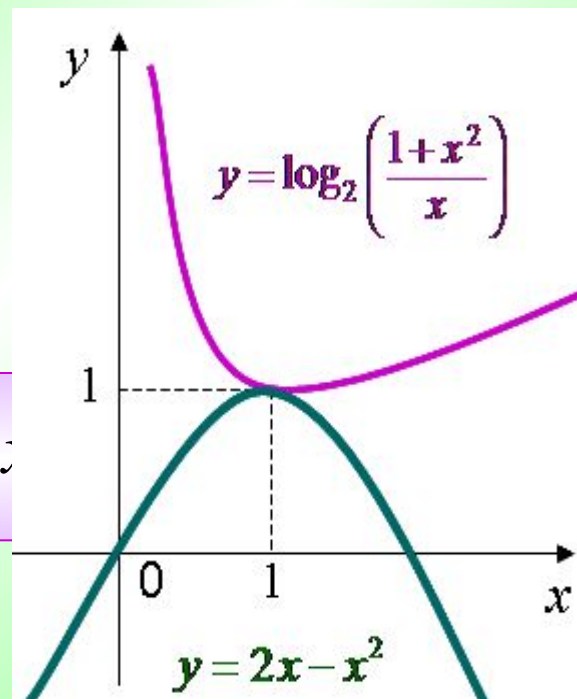
и на области определения данного уравнения

наибольшее значение M одной из них

равно наименьшему значению M другой.

Эту ситуацию хорошо иллюстрирует график.

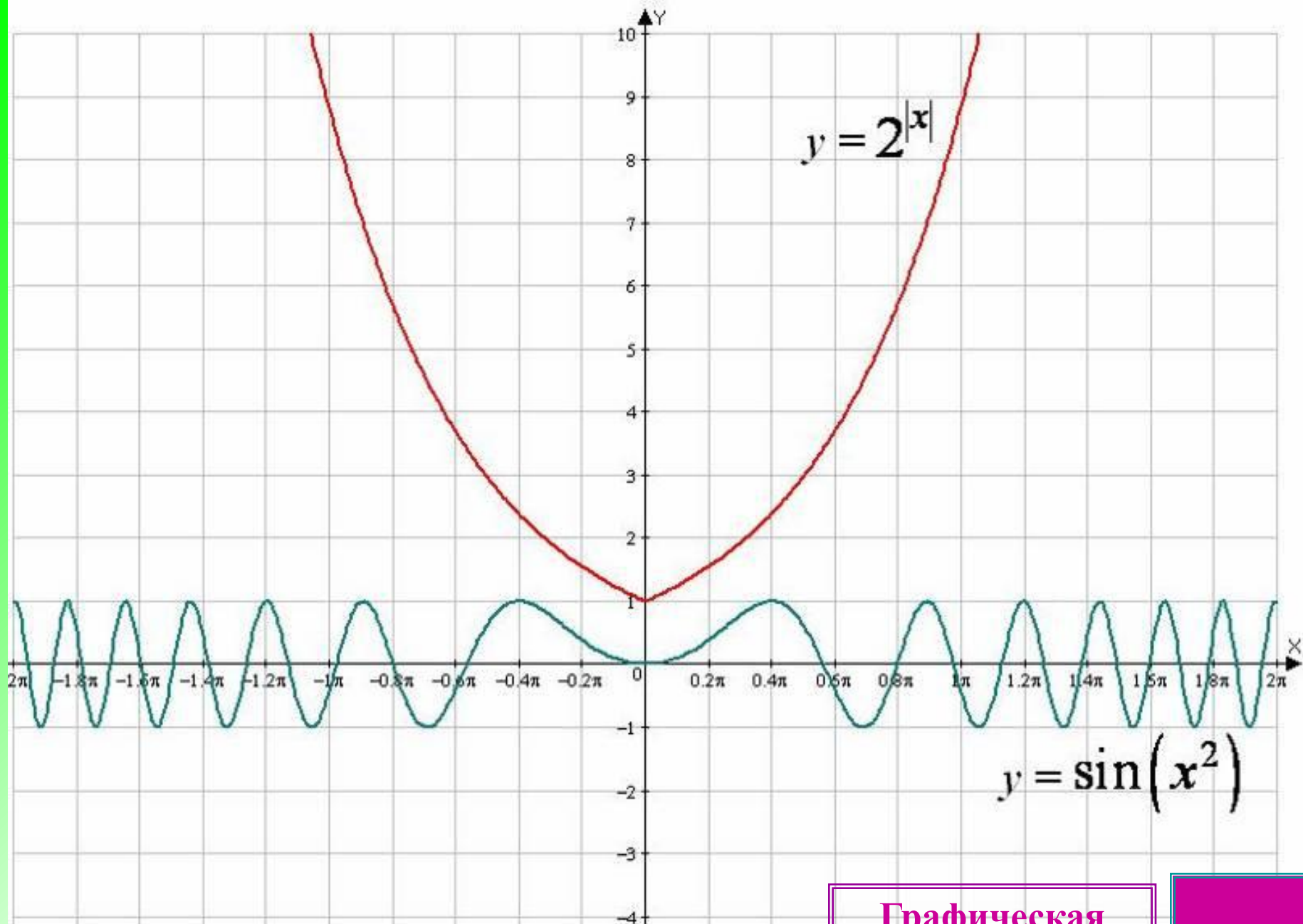
Как начинать решать такие задачи?



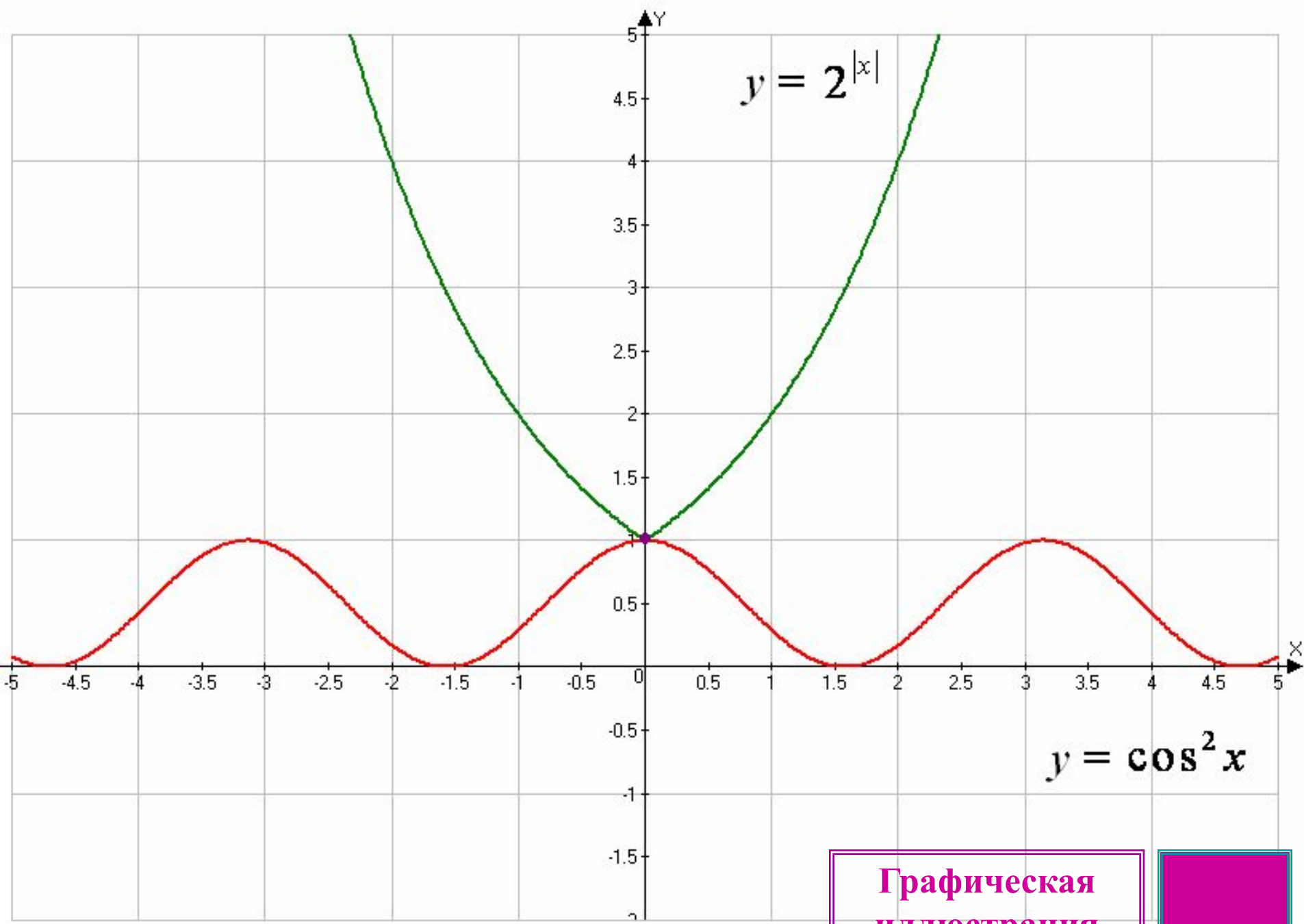
Привести уравнение или неравенство к виду $f(x) = g(x)$

Сделать оценку обеих частей. Пусть существует такое число M , из области определения (уравнения или неравенства), что $f(x) \leq M$ и $f(x) \geq M$.

Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} \mathcal{M}(x) = \quad , \\ \mathcal{M}(x) = \quad . \end{cases}$$

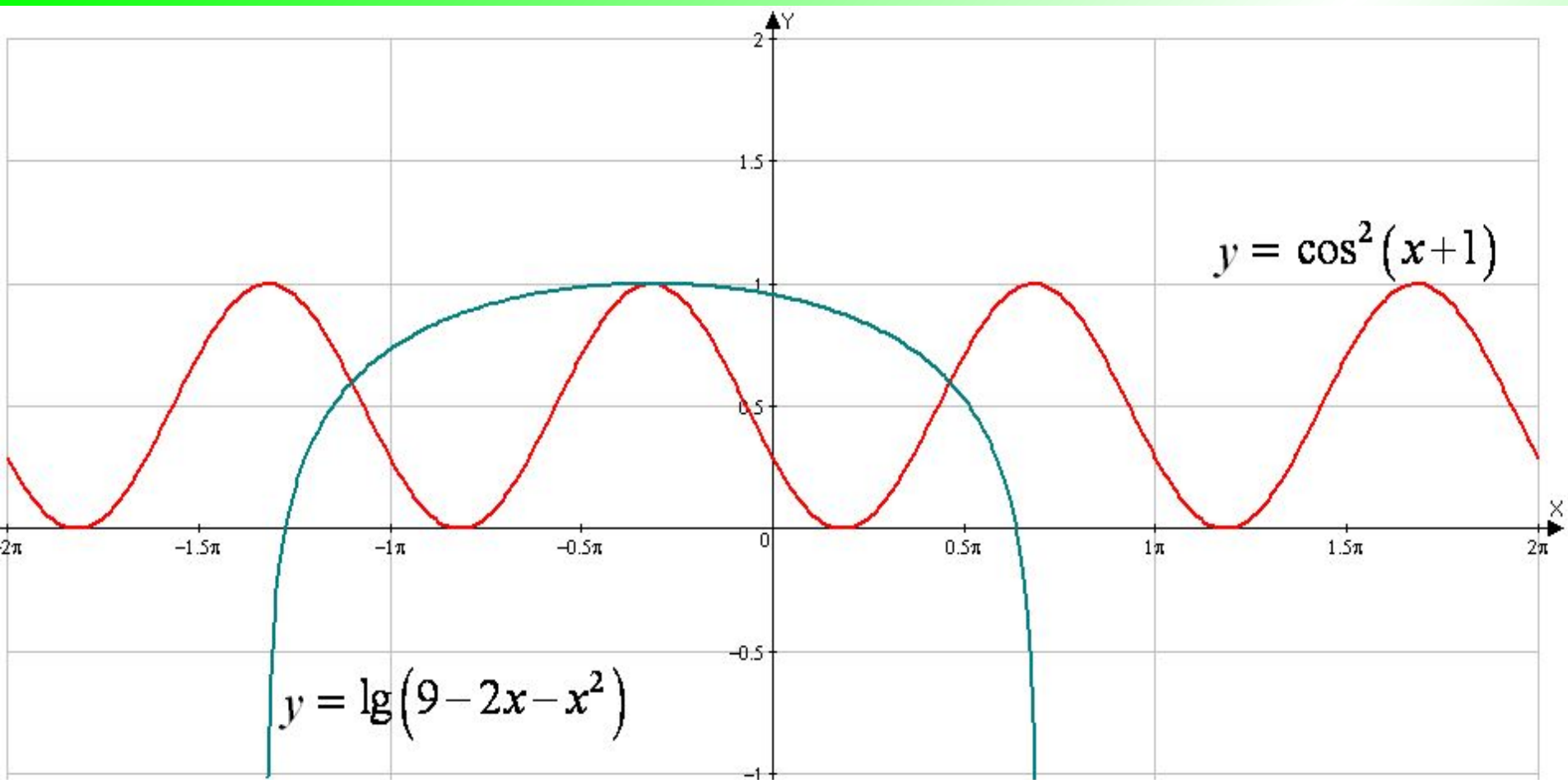


Графическая
иллюстрация

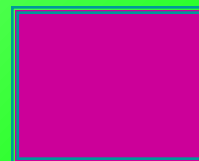


Графическая
иллюстрация





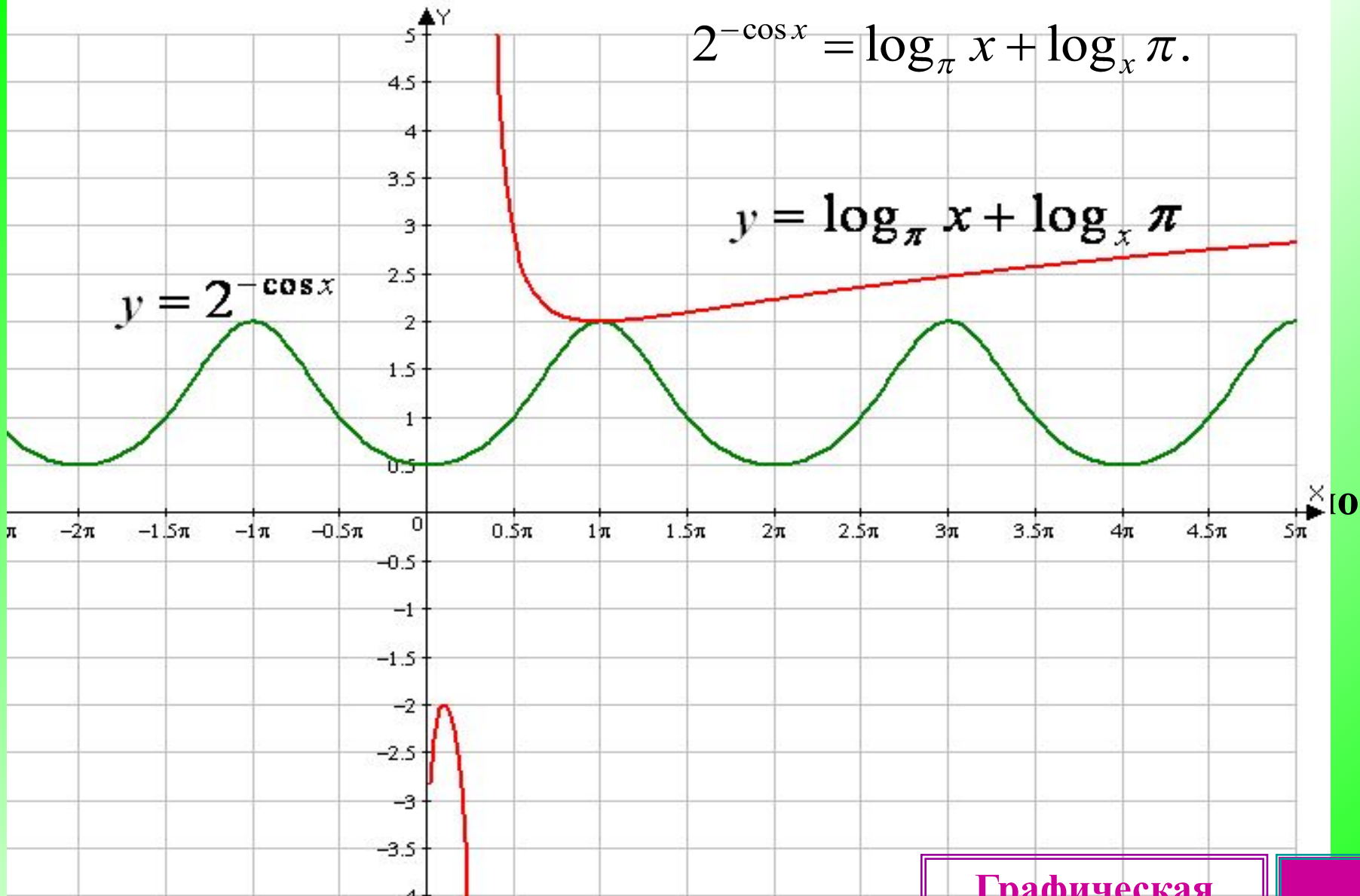
Графическая
иллюстрация



$$2^{-\cos x} = \log_{\pi} x + \log_x \pi.$$

$$y = \log_{\pi} x + \log_x \pi$$

$$y = 2^{-\cos x}$$



Графическая
иллюстрация

Пример 5. Решить уравнение $\sin x + \sin 9x = 2$.

Решение. Оценим обе части уравнения.

Поскольку $-1 \leq \sin x \leq 1$ и $-1 \leq \sin 9x \leq 1$, то равенство $\sin x + \sin 9x = 2$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 9x = 1. \end{cases}$$
 Решением первого уравнения системы являются значения

$$\tilde{\alpha} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При этих x найдем $\sin 9x = \sin\left(9 \cdot \frac{\pi}{2} + 18\pi n\right) = 1$.

Следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ решение системы.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Пример 6. Решить уравнение $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 2y) \cdot (3 + \sin 3z) = 4.$

Решение. Очевидно, что $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \geq 2,$

$(1 + \operatorname{tg}^2 2y) \geq 1, \quad (3 + \sin 3z) \geq 2.$ Заметим, что перемножив

почленно эти неравенства, получаем:

$$\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 2y) \cdot (3 + \sin 3z) \geq 4.$$

Следовательно, левая часть равна правой, лишь при условии:

одновременно $\operatorname{tg} 2y = 0, \quad \sin 3z = -1$

Значит, данное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1 & \text{Решая} \\ \operatorname{tg}^2 2y = 0 & \text{систему} \\ \sin 3z = -1 & \text{уравнений, получаем:} \end{cases}$$

$$x = \pi m, m \in Z; \quad y = \frac{\pi}{2} k, k \in Z; \quad z = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \pi l, l \in Z$$

Пример 7. Решите уравнение $\cos^2(x \cdot \sin x) = 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Решение. Для решения уравнения **оценим его части:**

$$0 \leq \cos^2(x \cdot \sin x) \leq 1, \quad 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} \geq 1.$$

Равенство возможно только при условии
$$\begin{cases} \cos^2(x \cdot \sin x) = 1 \\ 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 1 \end{cases}.$$

Сначала решим второе уравнение: $\log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 0,$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = 1, \quad x^2 + x + 1 = 1, \quad x^2 + x = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -1.$$

Проверим справедливость первого равенства, подставив эти корни:

$$x = 0: \cos^2(0 \cdot \sin 0) = \cos^2 0 = 1 \quad (\text{верное равенство}).$$

При $x = -1$ имеем: $\cos^2(-1 \cdot \sin(-1)) = \cos^2(\sin 1) \neq 1$ (неверное равенство).

Итак, данное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Ответ: 0.

Пример 8. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4^{49x^2-70x+26} = \cos 14\pi x - 81a^2 - 72a - 13$ имеет решения. Найдите эти решения.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$4^{(7x-5)^2+1} = 3 + \cos(14\pi x) - (9a+4)^2.$$

При всех значениях x выражение $(7x-5)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow 4^{(7x-5)^2+1} \geq 4$.

При всех значениях x выражения $-1 \leq \cos 14\pi x \leq 1$, $(9a+4)^2 \geq 0$.

Поэтому $3 + \cos 14\pi x - (9a+4)^2 \leq 3 + 1 = 4$.

Следовательно, левая часть уравнения не меньше 4, а правая часть – не больше 4. Получаем систему:

$$\begin{cases} 4^{(7x-5)^2+1} = 4, \\ 3 + \cos 14\pi x - (9a+4)^2 = 4; \end{cases} \begin{cases} (7x-5)^2 = 0, \\ \cos 14\pi x = 1, \\ (9a+4)^2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{5}{7}, \\ a = -\frac{4}{9}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{5}{7}$ при $a = -\frac{4}{9}$.