Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств

Знакомство с методом мажорант

Метод мажорант

На самом деле, вы встречались с этим методом, просто не знали, как он называется.

Некоторые математики называют этот метод

по-другому:

«метод математической оценки»,

«метод mini-max».

Это очень красивый метод, и ему непременно следует научиться

Определение

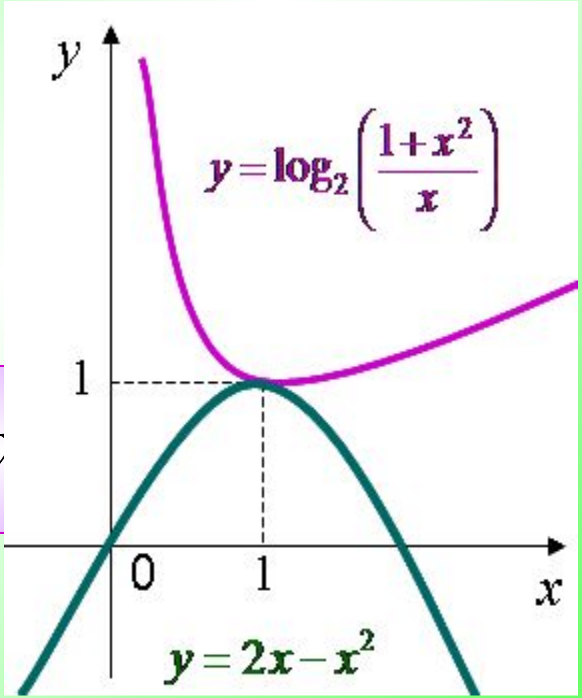
Мажорантой (от magiorante – главенствующий) данной функции $f(x)$ на множестве $D(f)$ **называется такое число M, что**

либо $f(x) \le M$ для всех $x \in D(f)$,

либо $f(x) \ge M$ для всех $x \in D(f)$.

Метод мажорант или метод оценки используется (чаще всего) в уравнениях вида $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – **ограниченные функции,** и на **области определения** данного уравнения наибольшее значение M одной из них **равно** наименьшему значению M другой.

Эту ситуацию хорошо иллюстрирует график.

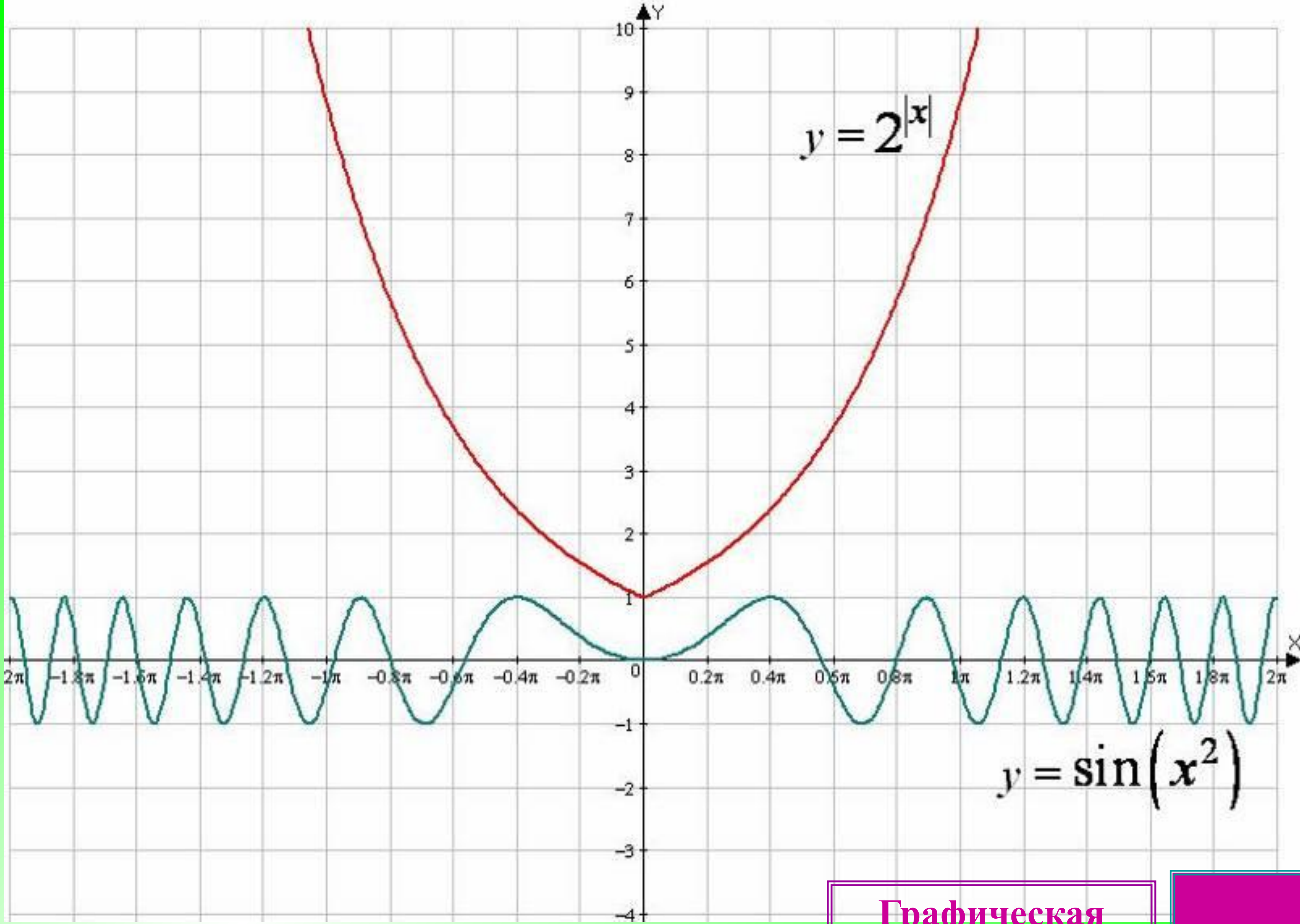


Как начинать решать такие задачи?

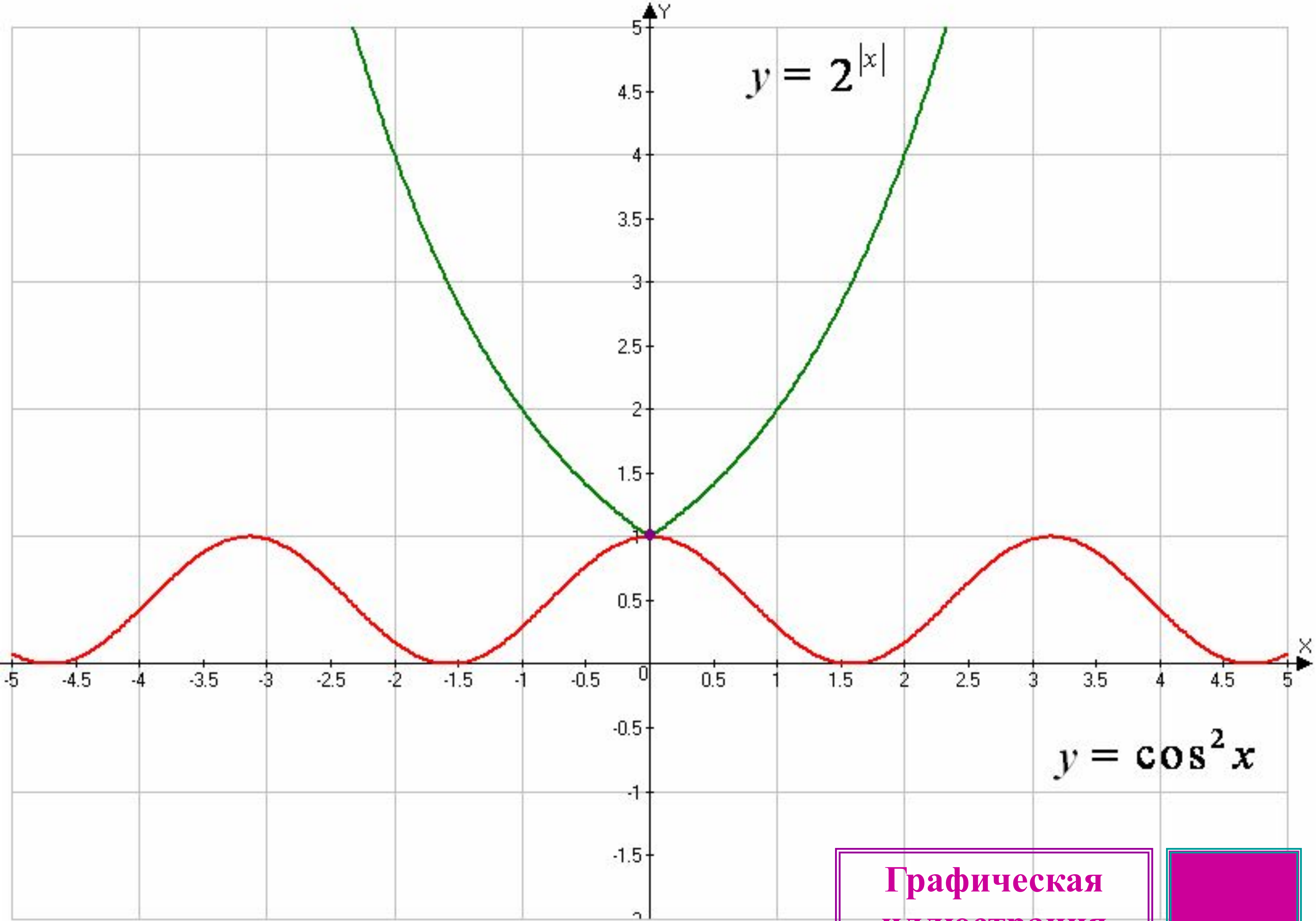
Привести уравнение или неравенство к виду $f(x) = g($

Сделать оценку обеих частей. Пусть существует такое число *M*, из области определения (уравнения или неравенства), что *f*(*x*) ≤ *M* и *f*(*x*) ≥ *M*.

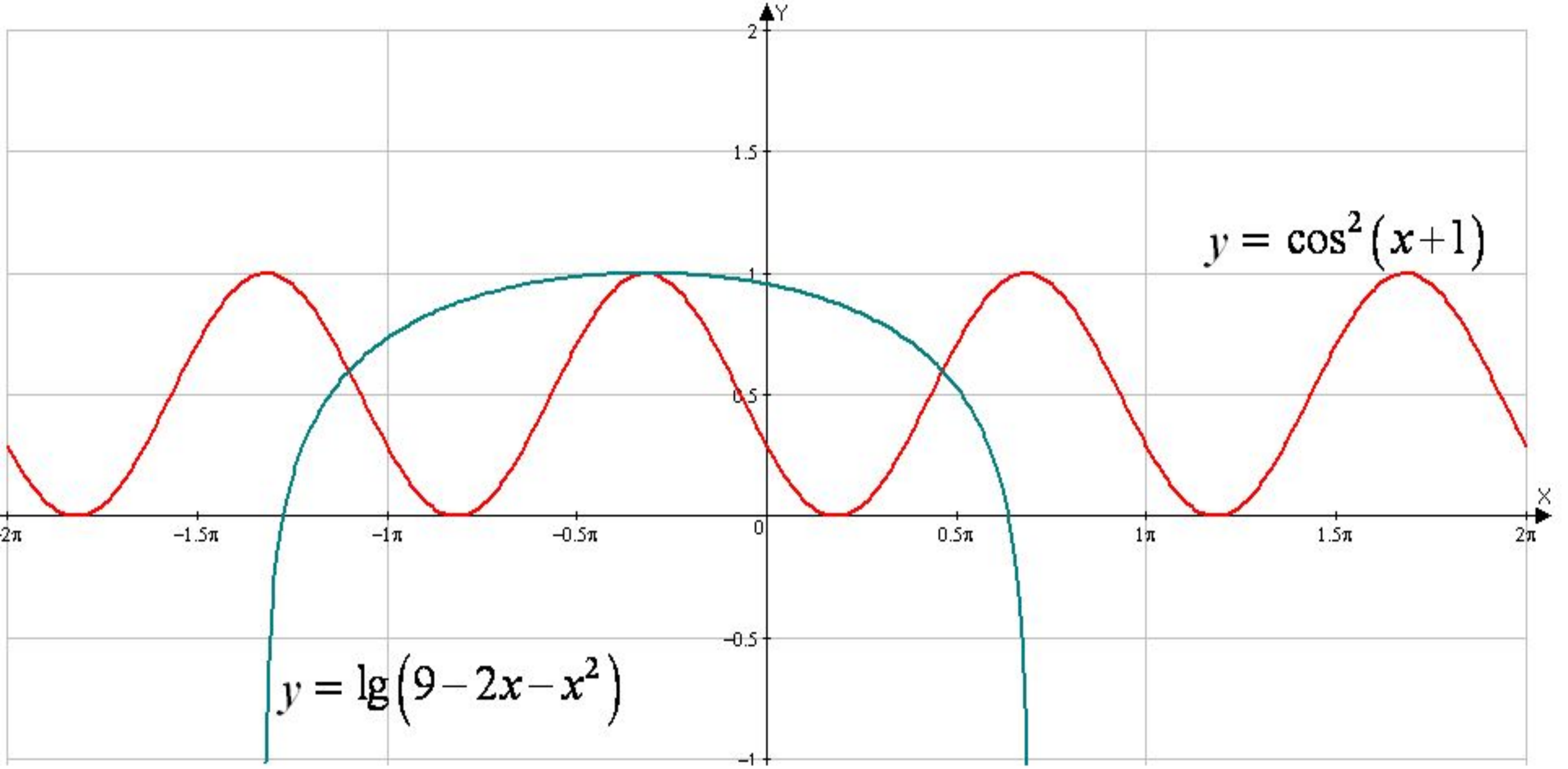
Решить систему уравнений: $\begin{cases} f(x) = M, \\ g(x) = M. \end{cases}$



Графическая иллюстрация

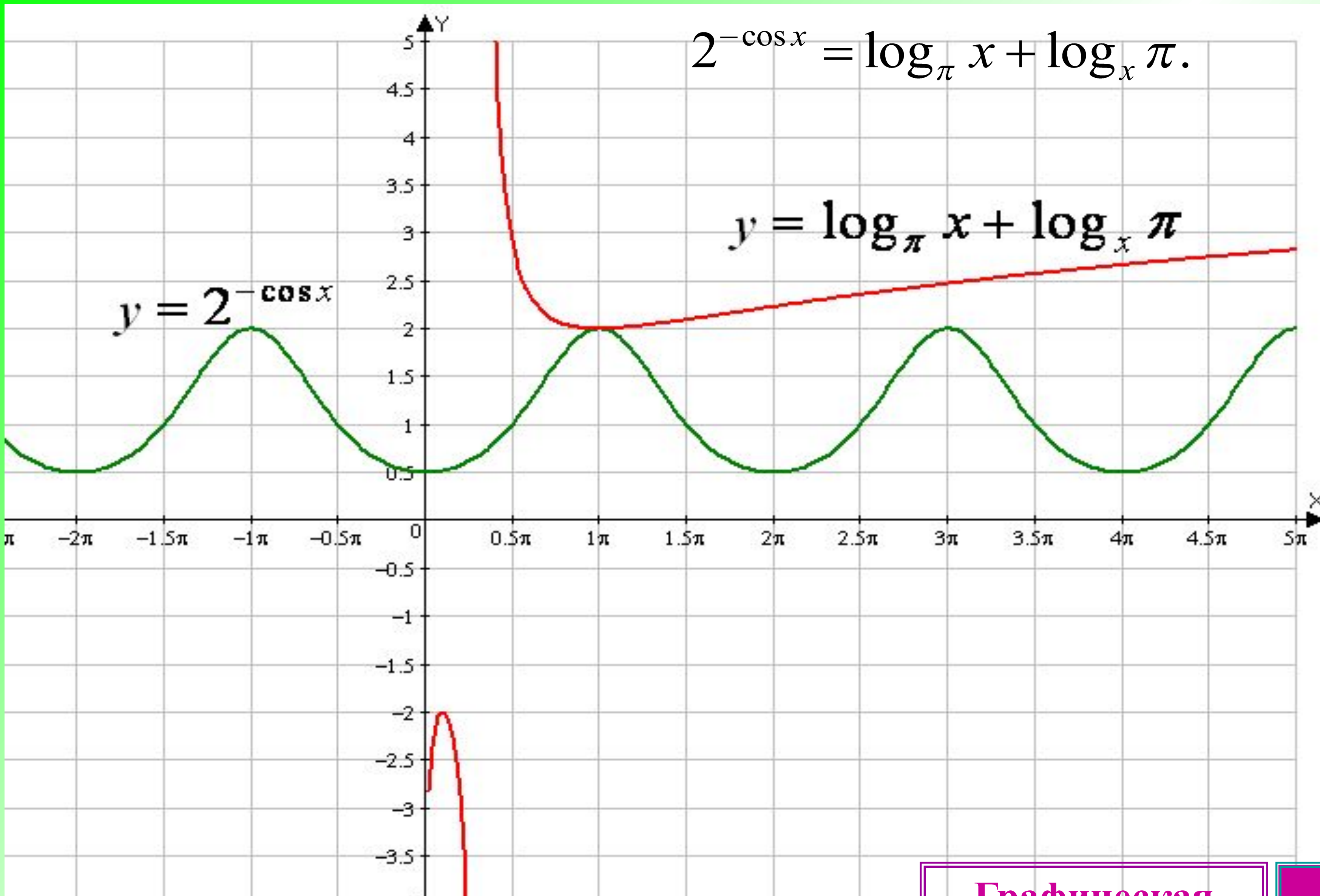


Графическая иллюстрация



Графическая иллюстрация

$$2^{-\cos x} = \log_{\pi} x + \log_{x} \pi.$$



Графическая иллюстрация

Пример 5. **Решить уравнение** $\sin x + \sin 9x = 2.$

Решение. Оценим обе части уравнения.

Поскольку $-1 \le \sin x \le 1$ **и** $-1 \le \sin 9x \le 1$, **то равенство** $\sin x + \sin 9x = 2$ **выполняется тогда и только тогда, когда**

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 9x = 1. \end{cases}$$

Решением первого уравнения системы являются значения

$$\tilde{o} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z.$$

При этих *x* найдем $\sin 9x = \sin\left(9 \cdot \frac{\pi}{2} + 18\pi n\right) = 1.$

Следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z$ **решение системы.**

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z$

Пример 6. **Решить уравнение** $\left(\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot\left(1 + tg^2 2y\right)\cdot\left(3 + \sin 3z\right) = 4.$

Решение. Очевидно, что $\left(\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right) \ge 2,$

$\left(1 + tg^2 2y\right) \ge 1,$ $\left(3 + \sin 3z\right) \ge 2.$ **Заметим, что перемножив почленно эти неравенства, получаем:**

$$\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot\left(1 + tg^2 2y\right)\cdot\left(3 + \sin 3z\right) \ge 4.$$

Следовательно, левая часть равна правой, лишь при условии:

одновременно: $\cos^2 x = 1,\ tg^2 2y = 0,\ \sin 3z = -1$

Значит, данное уравнение равносильно системе уравнений: $\begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ tg^2 2y = 0 \\ \sin 3z = -1 \end{cases}.$ **Решая систему уравнений, получаем:**

$$x = \pi m, m \in Z;\quad y = \frac{\pi}{2}k, k \in Z;\quad z = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi l, l \in Z$$

Пример 7. **Решите уравнение** $\cos^2(x\cdot\sin x)=1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}.$

Решение. Для решения уравнения оценим его части:

$0\le\cos^2(x\cdot\sin x)\le1,\qquad 1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}\ge1.$

Равенство возможно только при условии $\begin{cases}\cos^2(x\cdot\sin x)=1\\ 1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}=1\end{cases}.$

Сначала решим второе уравнение: $\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}=0,$

$\sqrt{x^2+x+1}=1,\quad x^2+x+1=1,\quad x^2+x=0,\quad x_1=0,\quad x_2=-1.$

Проверим справедливость первого равенства, подставив эти корни:

$x=0:\ \cos^2(0\cdot\sin0)=\cos^2 0=1$ **(верное равенство).**

При x = -1 имеем: $\cos^2(-1\cdot\sin(-1))=\cos^2(\sin1)\ne1$ **(неверное равенство).**

Итак, данное уравнение имеет единственный корень x = 0.

Ответ: 0.

Пример 8. **Найти все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение** $4^{49x^2-70x+26}=\cos 14\pi x-81a^2-72a-13$ **имеет решения. Найдите эти решения.**

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$4^{(7x-5)^2+1}=3+\cos\left(14\pi x\right)-(9a+4)^2.$$

При всех значениях *x* выражение $(7x-5)^2+1\geq 1\Rightarrow 4^{(7x-5)^2+1}\geq 4.$

При всех значения *x* выражения $-1\leq\cos 14\pi x\leq 1,\quad (9a+4)^2\geq 0.$

Поэтому $3+\cos 14\pi x-(9a+4)^2\leq 3+1=4.$

Следовательно, левая часть уравнения не меньше 4, а правая часть – не больше 4. Получаем систему:

$$\begin{cases}4^{(7x-5)^2+1}=4,\\ 3+\cos 14\pi x-(9a+4)^2=4;\end{cases}\quad \begin{cases}\left(7x-5\right)^2=0,\\ \cos 14\pi x=1,\\ (9a+4)^2=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\dfrac{5}{7},\\ a=-\dfrac{4}{9}.\end{cases}$$

Ответ: $x=\dfrac{5}{7}$ **при** $a=-\dfrac{4}{9}.$