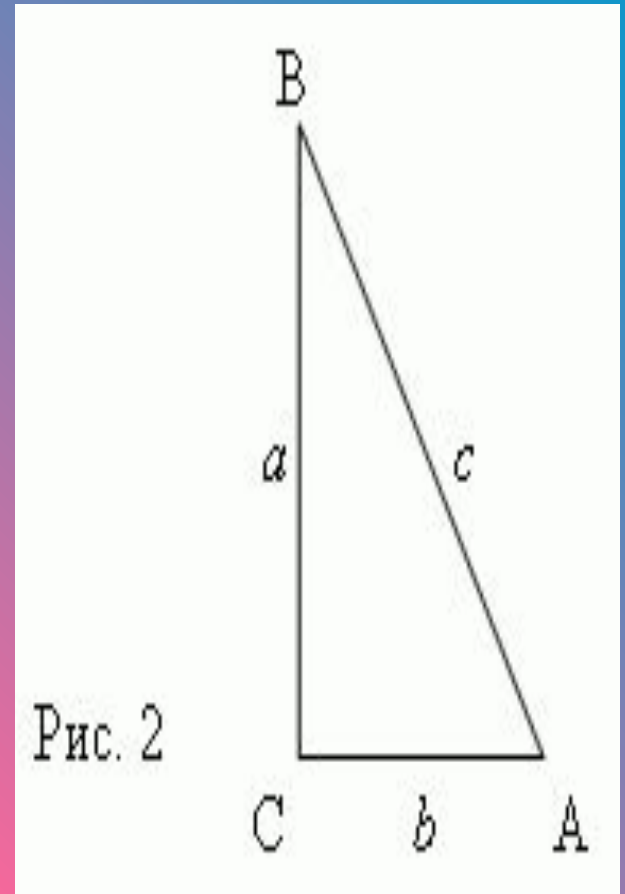


Тригонометрические функции

- **Тригонометрические функции** острого угла есть отношения различных пар сторон прямоугольного треугольника
- 1) *Синус* - отношение противолежащего катета к гипотенузе: $\sin A = a / c$.
- 2) *Косинус* - отношение прилежащего катета к гипотенузе: $\cos A = b / c$.
- 3) *Тангенс* - отношение противолежащего катета к прилежащему: $\operatorname{tg} A = a / b$.
- 4) *Котангенс* - отношение прилежащего катета к противолежащему: $\operatorname{ctg} A = b / a$.
- 5) *Секанс* - отношение гипотенузы к прилежащему катету: $\operatorname{sec} A = c / b$.
- 6) *Косеканс* - отношение гипотенузы к противолежащему катету: $\operatorname{cosec} A =$
 $= c / a$.
- Аналогично записываются формулы для другого острого угла В



Пример:

Прямоугольный треугольник ABC (рис.2) имеет катеты:

$$a = 4, \quad b = 3.$$

Найти синус, косинус и тангенс угла A.

Решение. Во-первых, найдём гипотенузу, используя теорему Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

Согласно вышеприведенным формулам имеем:

$$\sin A = a / c = 4 / 5$$

$$\cos A = b / c = 3 / 5$$

$$\operatorname{tg} A = a / b = 4 / 3$$

Для некоторых углов можно записать точные значения их тригонометрических функций. Наиболее важные случаи приведены в таблице:

| A | sin A | cos A | tan A | cot A | sec A | cosec A |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0° | 0 | 1 | 0 | ∞ | 1 | ∞ |
| 30° | 1/2 | $\sqrt{3}/2$ | $1/\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | $2/\sqrt{3}$ | 2 |
| 45° | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1 | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ |
| 60° | $\sqrt{3}/2$ | 1/2 | $\sqrt{3}$ | $1/\sqrt{3}$ | 2 | $2/\sqrt{3}$ |
| 90° | 1 | 0 | ∞ | 0 | ∞ | 1 |

- Углы 0° и 90°, не являются острыми в прямоугольном треугольнике, однако при расширении понятия тригонометрических функций эти углы также рассматриваются. Символ ∞ в таблице означает, что абсолютное значение функции неограниченно возрастает, если угол приближается к указанному значению.

Связь тригонометрических функций острого угла

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Тригонометрические функции двойного угла:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = 2 \operatorname{tg} x / (1 - \operatorname{tg}^2 x)$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} x - 1 / (2 \operatorname{ctg} x)$$

Тригонометрические функции половинного угла

Часто бывают полезны формулы, выражающие степени \sin и \cos простого аргумента через \sin и \cos кратного, например:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

Формулы для $\cos 2x$ и $\sin 2x$ можно использовать для нахождения значений Т. ф. половинного аргумента

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

Тригонометрические функции СУММЫ УГЛОВ

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x-y) = -\frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

- Для больших значений аргумента можно пользоваться так называемыми формулами приведения, которые позволяют выразить Т. ф. любого аргумента через
- Т. ф. аргумента x , что упрощает составление таблиц Т. ф. и пользование ими, а также построение графиков. Эти формулы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}
 \sin(\varphi + n\pi) &= \pm \sin \varphi \\
 \cos(\varphi + n\pi) &= \pm \cos \varphi \\
 \operatorname{tg}(\varphi + n\pi) &= \operatorname{tg} \varphi \\
 \sin\left(\varphi + n\frac{\pi}{2}\right) &= \pm \cos \varphi \\
 \cos\left(\varphi + n\frac{\pi}{2}\right) &= \mp \sin \varphi \\
 \operatorname{tg}\left(\varphi + n\frac{\pi}{2}\right) &= -\operatorname{ctg} \varphi
 \end{aligned} \right\}$$

- в первых трёх формулах n может быть любым целым числом, причём верхний знак соответствует значению $n = 2k$, а нижний - значению $n = 2k + 1$; в последних - n может быть только нечётным числом, причём верхний знак берётся при $n = 4k + 1$, а нижний при $n = 4k - 1$.

- Важнейшими тригонометрическими формулами являются формулы сложения, выражающие Т. ф. суммы или разности значений аргумента через Т. ф. этих значений:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) &= \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \pm \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \cos(\varphi_1 \pm \varphi_2) &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \mp \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \operatorname{tg}(\varphi_1 \pm \varphi_2) &= \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 \pm \operatorname{tg}\varphi_2}{1 \mp \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2} \end{aligned} \right\}$$

- знаки в левой и правой частях всех формул согласованы, то есть верхнему (нижнему) знаку слева соответствует верхний (нижний) знак справа. Из них, в частности, получаются формулы для Т. ф. кратных аргументов, например:

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$

Производные всех Тригонометрических функций выражаются через Тригонометрические функции

-

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

График функции $y = \sin x$ имеет вид:

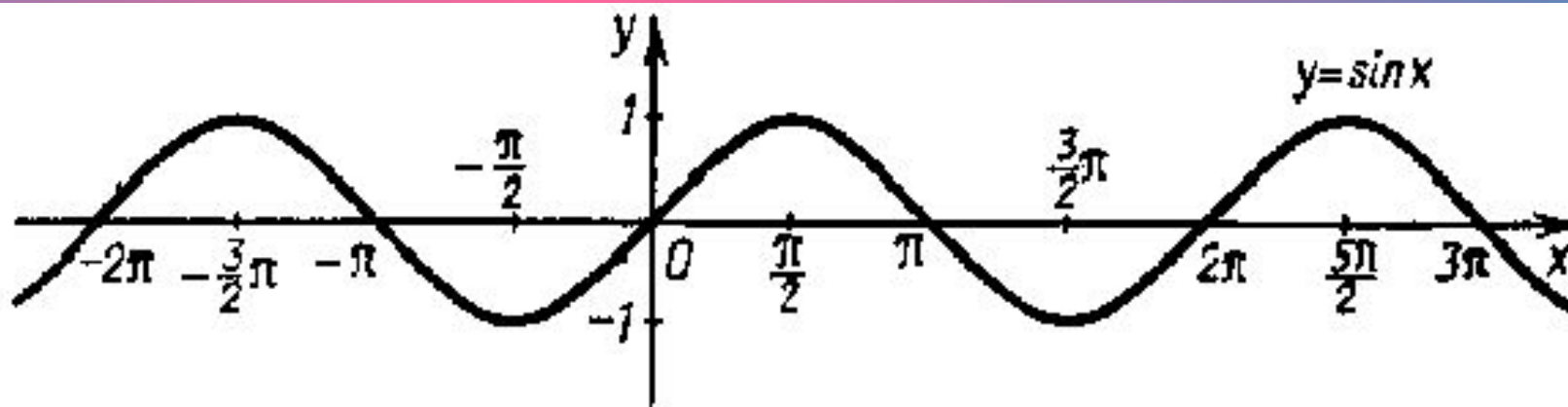


График функции $y = \cos x$ имеет вид:

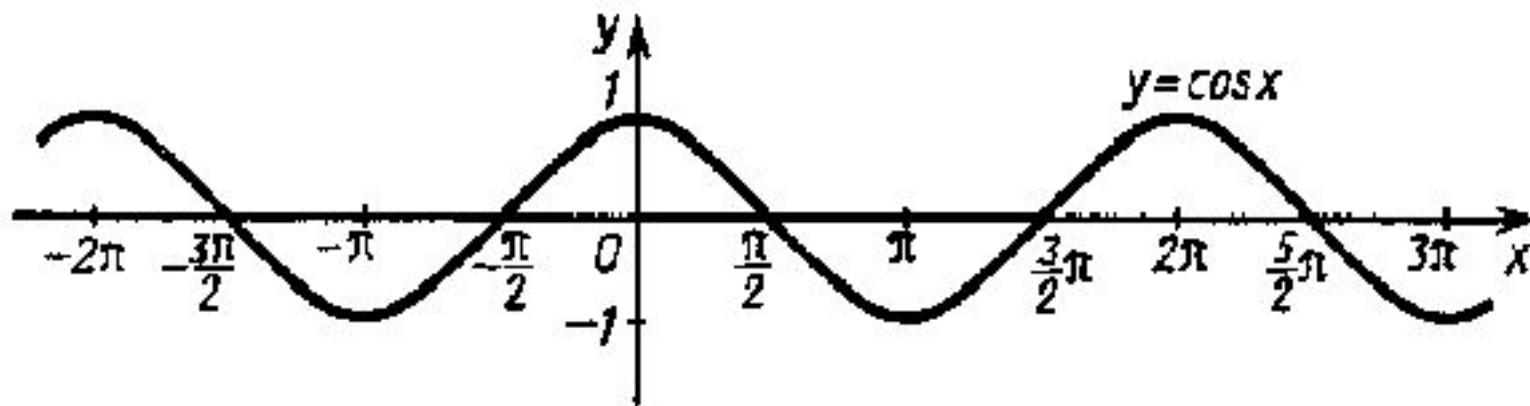


График функции $y = \operatorname{tg}x$ имеет вид:

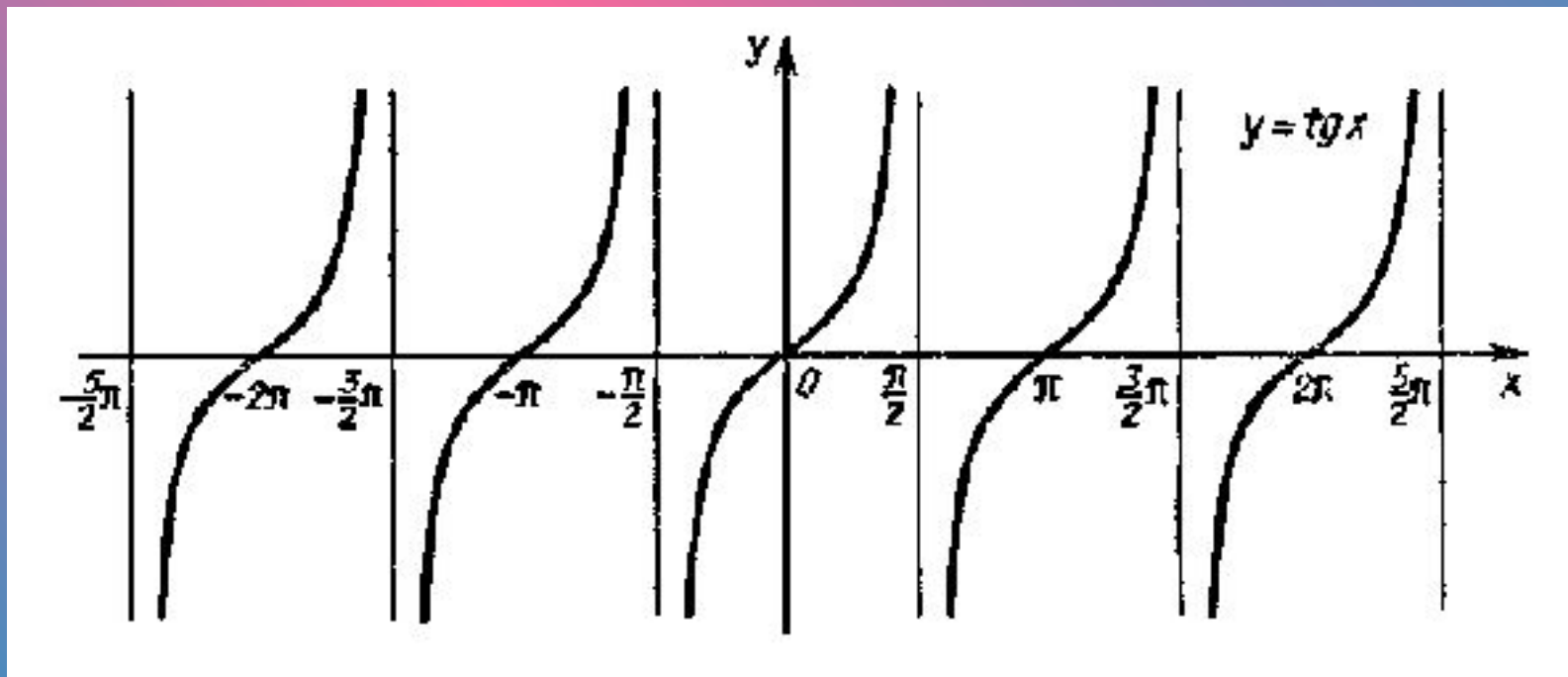
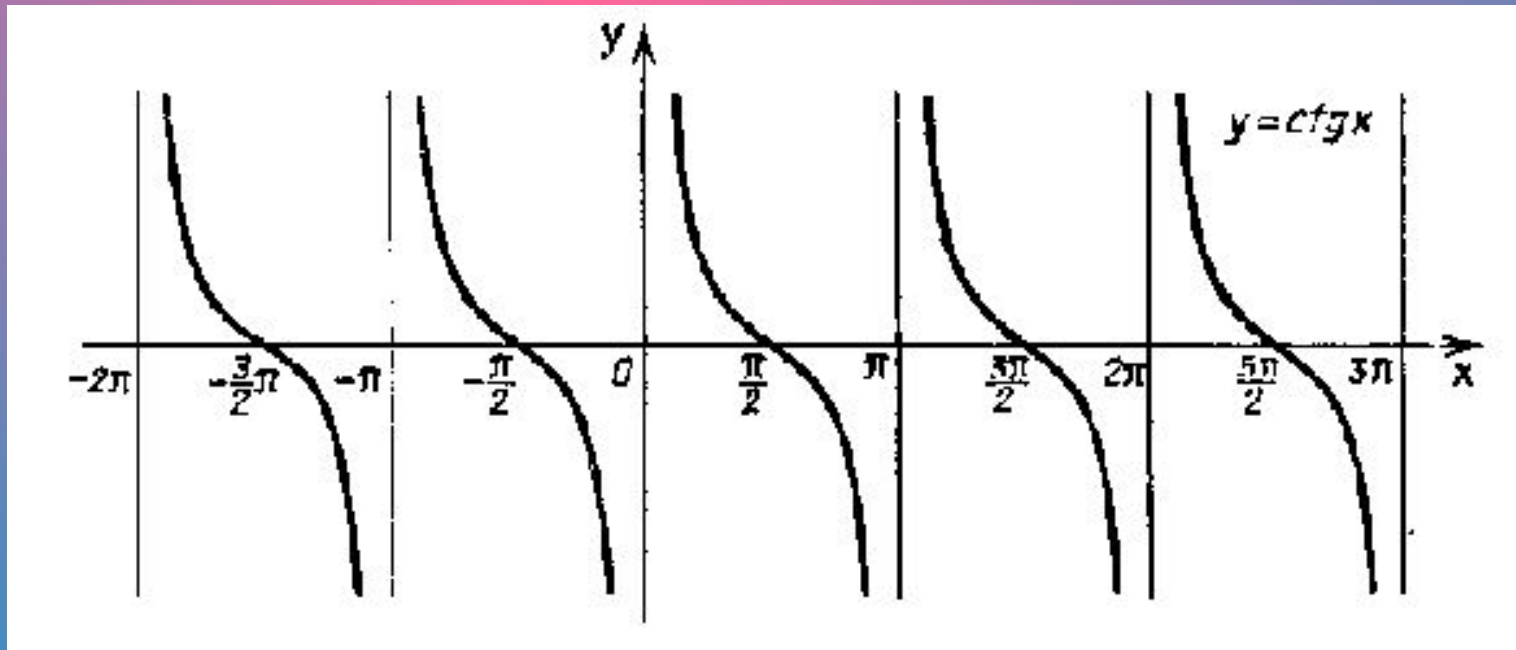


График функции $y = ctgx$ имеет вид:



История возникновения тригонометрических функций

- Т. ф. возникли впервые в связи с исследованиями в астрономии и геометрии. Соотношения отрезков в треугольнике и окружности, являющиеся по существу Т. ф., встречаются уже в 3 в. до н. э. в работах математиков Древней Греции - Евклида, Архимеда, Аполлония Пергского и др. Однако эти соотношения не являются у них самостоятельным объектом исследования, так что Т. ф. как таковые ими не изучались. Т. ф. рассматривались первоначально как отрезки и в такой форме применялись Аристархом (конец 4 - 2-я половина 3 вв. до н. э.)

- Гиппархом (2 в. до н. э.), Менелаем (1 в. н. э.) и Птолемеем (2 в. н. э.) при решении сферических треугольников. Птолемея составил первую таблицу хорд для острых углов через $30'$ с точностью до 10^{-6} . Разложение Т. ф. в степенные ряды получено И. Ньютоном (1669). В современную форму теорию Т. ф. привёл Л. Эйлер (18 в.). Ему принадлежат определение Т. ф. для действительного и комплексного аргументов, принятая ныне символика, установление связи с показательной функцией, ортогональности системы синусов и косинусов