

# Принцип Дирихле

# Биография

Дирихле родился в городе Дюрен в семье почтмейстера.

В 12 лет Дирихле начал учиться в гимназии в Бонне, спустя два года в иезуитской гимназии в Кёльне, где в числе прочих преподавателей его учил Георг Ом.

В 1855 г. Дирихле становится профессором высшей математики в Гёттингенском университете.



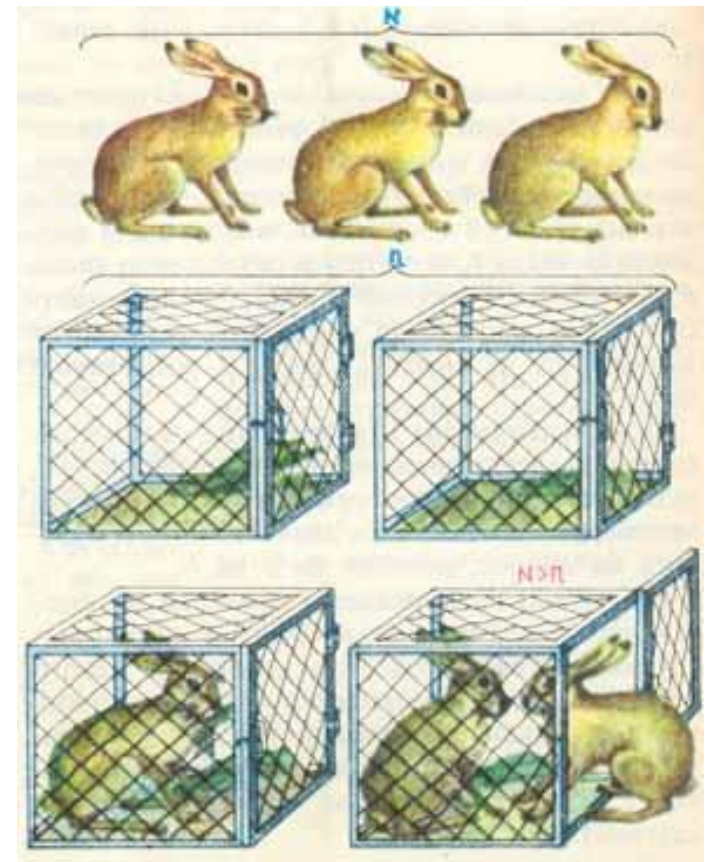
# Формулировка

Традиционная формулировка звучит так:  
«Если в  $n$  клетках сидит  $n+1$  или больше зайцев, то найдётся клетка, в которой сидят по крайней мере два зайца»

Но существуют еще две формулировки:

"При любом отображении множества  $P$ , содержащего  $n+1$  элементов, в множество  $Q$ , содержащее  $n$  элементов, найдутся два элемента множества  $P$ , имеющие один и тот же образ»

"Если  $nk+1$  зайцев размещены в  $n$  клетках, то найдутся  $k+1$  зайцев, которые посажены в одну клетку ( $n, k$  - натуральные числа)".



# Область применения

Один математик сказал, что Дирихле по частоте упоминаний ученикам навсегда обеспечено одно из самых высших мест. И добавил: "Пожалуй, есть способ лишить его лидерства — назвать чьим-нибудь именем принцип «никакое чётное число не равно никакому нечётному».

Несмотря на очевидность этого принципа и, казалось бы простоту, с его помощью в решении, многие сложные задачи сводятся к простому и эффективному решению.

Принцип Дирихле даёт только неконструктивное доказательство - мы не можем сказать, в какой именно клетке сидят два зайца, а знаем только, что такая клетка есть.

Зачастую вся сложность применения принципа Дирихле состоит в том чтобы определить, что считать «зайцем», что — «клеткой».

# Задачи решаемые с помощью принципа Дирихле

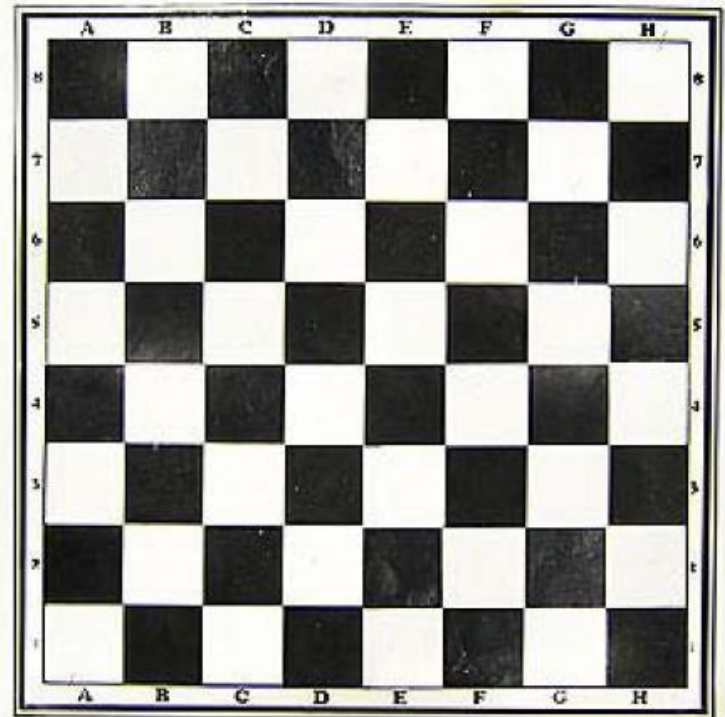
На шахматной доске стоят 44 ферзя.

Докажите, что каждый из них бьёт какого-нибудь другого ферзя.

# Доказательство

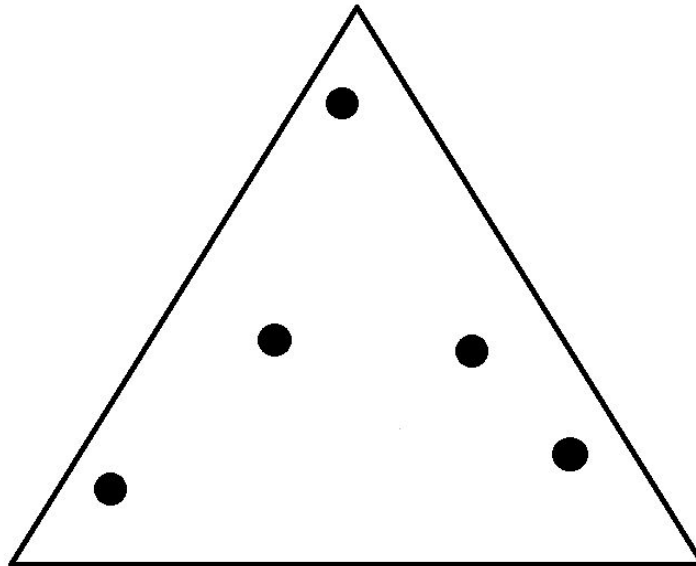
При любом положении на доске ферзь бьёт не менее 21 поля.

Пусть какой-то из этих 44 ферзей не бьёт никакого другого ферзя. Тогда все клетки, которые находятся под боем этого ферзя, пусты. А так как при любом положении на шахматной доске ферзь бьёт не менее 21 поля, то занято ферзями не более  $64 - 21 = 43$  полей.



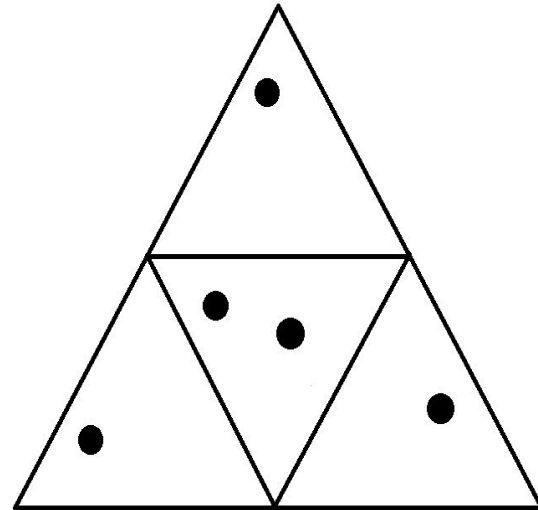
# Задачи решаемые с помощью принципа Дирихле

Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 расположено 5 точек. Доказать, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше  $0,5$ .



# Доказательство

Проведем средние линии  
треугольника. Они разобьют его  
на четыре правильных  
треугольника со стороной  $0,5$ . По  
принципу Дирихле из пяти точек  
хотя бы две окажутся в одном из  
четырёх треугольников.  
Используем лемму о том, что  
длина отрезка, расположенного  
внутри треугольника, меньше  
длины его наибольшей стороны.  
Расстояние между этими точками  
меньше  $0,5$  так как точки не лежат  
в вершинах треугольников.





# Задачи решаемые с помощью принципа Дирихле

Дано 11 различных целых чисел. Доказать, что из них можно выбрать два числа, разность которых делится на 10.

# Решение

При помощи принципа Дирихле определим что по крайней мере два числа из доступных 11 имеют одинаковый остаток при делении их на 10.

Пусть это будут числа  $Z = 10z + r$  и  $F = 10f + r$ .

(Буквой  $r$  означим остаток при делении этих чисел).

Тогда их разность делится на 10:

$$Z - F = 10(z - f).$$

# Задачи решаемые с помощью принципа Дирихле

Доказать, что если имеется 100 целых чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ , то из них можно выбрать несколько чисел, сумма которых делится на 100.

# Доказательство

Рассмотрим 100 следующих сумм:

$$1) S_1 = x_1$$

$$2) S_2 = x_1 + x_2$$

И т.д. вплоть до:

$$100) S_{100} = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{100}.$$

Если хотя бы одна из этих сумм делится на 100 то задача решена. Допустим, что ни одно из чисел  $S_1, S_2, \dots, S_{100}$  не делится на 100. По принципу Дирихле, два из них при делении на 100 дают равные остатки (т. к. «кроликов» у нас 100, а «клеток» может быть лишь 99). Пусть это  $S_Z$  и  $S_F$  ( $Z < F$ ). Тогда разность

$$S_F - S_Z = (x_1 + \dots + x_F) - (x_1 + \dots + x_Z) = x_{Z+1} + \dots + x_F \text{ делится на } 100, \\ \text{и поэтому сумма } x_{Z+1} + \dots + x_F \text{ является искомой.}$$

# Принцип Дирихле для длин и площадей

"Если внутри множества меры  $V$  расположено несколько множеств, сумма мер которых больше  $V$ , то найдётся общий элемент, принадлежащий по крайней мере двум из этих множеств".

Для длин и площадей это положение формулируется так:

"Если на отрезке длины  $L$  расположено несколько отрезков с суммой длин больше  $L$ , то хотя бы два из них имеют общую точку";

"Если внутри фигуры площади  $S$  находится несколько фигур, имеющих сумму площадей больше  $S$ , то хотя бы две из них имеют общую точку".

# Задачи решаемые с помощью принципа Дирихле

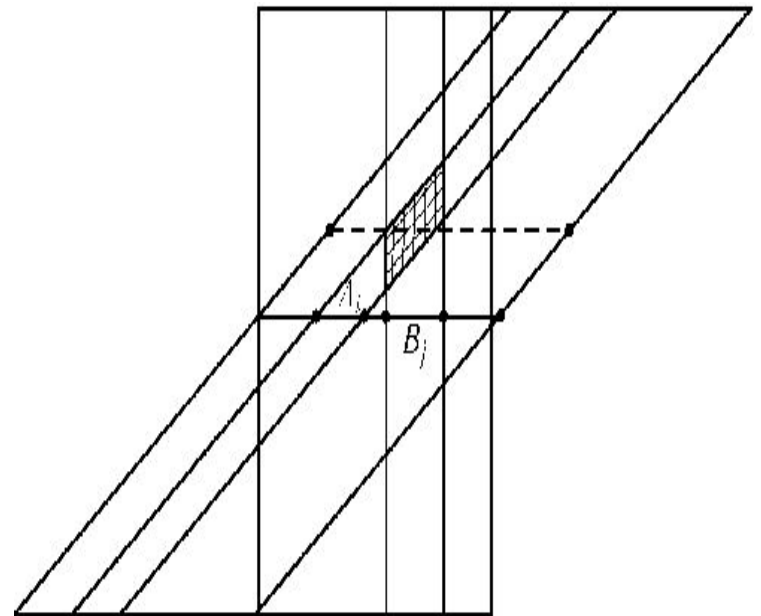
На отрезке длиной 1 расположены попарно не пересекающиеся отрезки, сумма длин которых равна  $p$ . Обозначим эту систему отрезков  $A$ . Пусть  $B$  — дополнительная система отрезков (отрезки систем  $A$  и  $B$  не имеют общих внутренних точек и полностью покрывают данный отрезок). Докажите, что существует параллельный перенос  $T$ , для которого пересечение  $B$  и  $T(A)$  состоит из отрезков, сумма длин которых не меньше  $p(1 - p)/2$ .

# Доказательство

Пусть  $s$  от  $-1$  до  $1$ . Сдвинем данный отрезок на  $s$  вдоль себя, а затем сдвинем его на  $s$  в ортогональном направлении.

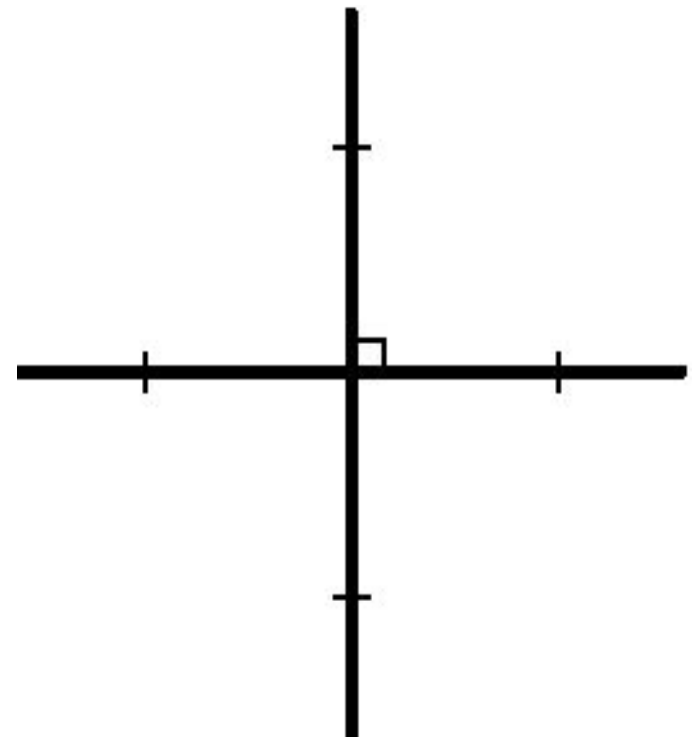
Заштрихованная на рис. область соответствует пересечению отрезков  $A_i$  и  $B_j$ . Ее площадь равна произведению длин этих отрезков. Если рассмотреть все пары отрезков систем  $A$  и  $B$ , то заштрихованная область будет иметь площадь  $p(1 - p)$ . Поэтому некоторое горизонтальное сечение заштрихованных областей имеет длину не меньше  $p(1 - p)/2$ .

Замечание. Если вместо отрезка рассматривать окружность (и вместо параллельного переноса поворот), то  $p(1 - p)/2$  можно заменить на  $p(1 - p)$ .



# Задачи решаемые с помощью принципа Дирихле

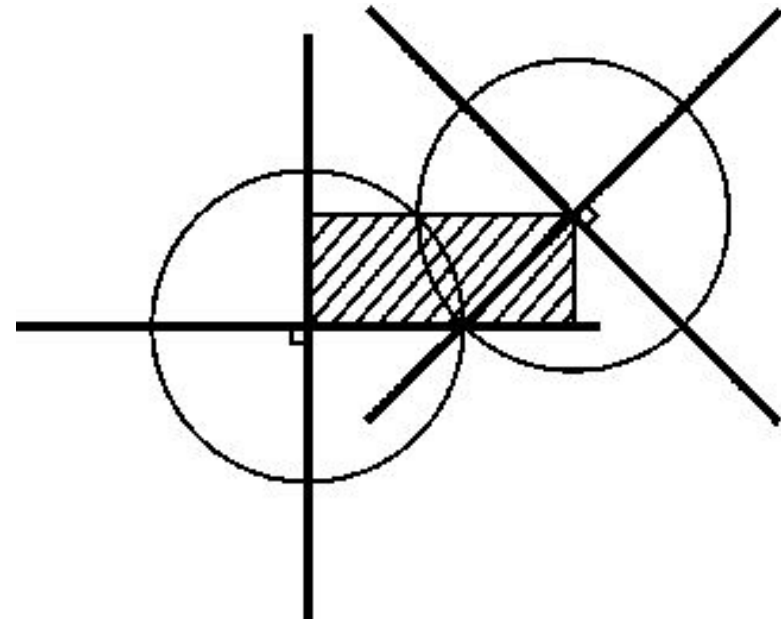
Назовем крестом фигуру, образованную диагоналями квадрата со стороной 1 (рис.). Докажите, что в круге радиуса 100 можно разместить лишь конечное число непересекающихся крестов.





# Доказательство

Для каждого креста рассмотрим круг радиусом  $1/2$  с центром в центре креста. Докажем, что если пересекаются два таких круга, то пересекаются и сами кресты. Расстояние между центрами пересекающихся равных кругов не превосходит их удвоенного радиуса, поэтому расстояние между центрами соответствующих им крестов не превосходит  $1/2$ . Рассмотрим прямоугольник заданный перекладинами первого креста и центром второго (рис.). Одна из перекладин второго креста проходит через этот прямоугольник, поэтому она пересекает первый крест, так как длина перекладины равна  $1/2$ , а длина диагонали прямоугольника не превосходит  $1/2$ . В круге конечного радиуса можно разместить лишь конечное число непересекающихся кругов радиуса  $1/2$



# Задачи решаемые с помощью принципа Дирихле

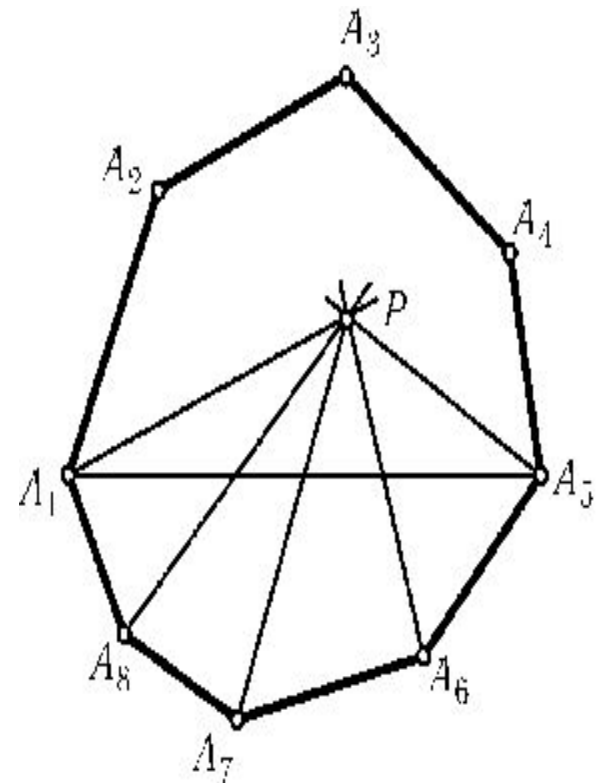
Внутри выпуклого  $2n$ -угольника взята точка  $P$ . Через каждую вершину и точку  $P$  проведена прямая. Докажите, что найдется сторона  $2n$ -угольника, с которой ни одна из проведенных прямых не имеет общих внутренних точек.

# Доказательство

Возможны два случая:

1. Точка  $P$  лежит на некоторой диагонали  $AB$ . Тогда прямые  $PA$  и  $PB$  совпадают и не пересекают сторон. Остаются  $2n - 2$  прямые; они пересекают не более  $2n - 2$  сторон.

2. Точка  $P$  не лежит на диагонали многоугольника  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ . Проведем диагональ  $A_1 A_{n+1}$ . По обе стороны от нее лежит по  $n$  сторон. Пусть для определенности точка  $P$  лежит внутри многоугольника  $A_1 \dots A_{n+1}$  (рис.). Тогда прямые  $PA_{n+1}, PA_{n+2}, \dots, PA_{2n}, PA_1$  (число этих прямых равно  $n + 1$ ) не могут пересекать стороны  $A_{n+1} A_{n+2}, A_{n+2} A_{n+3}, \dots, A_{2n} A_1$ . Поэтому оставшиеся прямые могут пересекать не более чем  $n - 1$  из этих  $n$  сторон.



---

**Спасибо за внимание!**