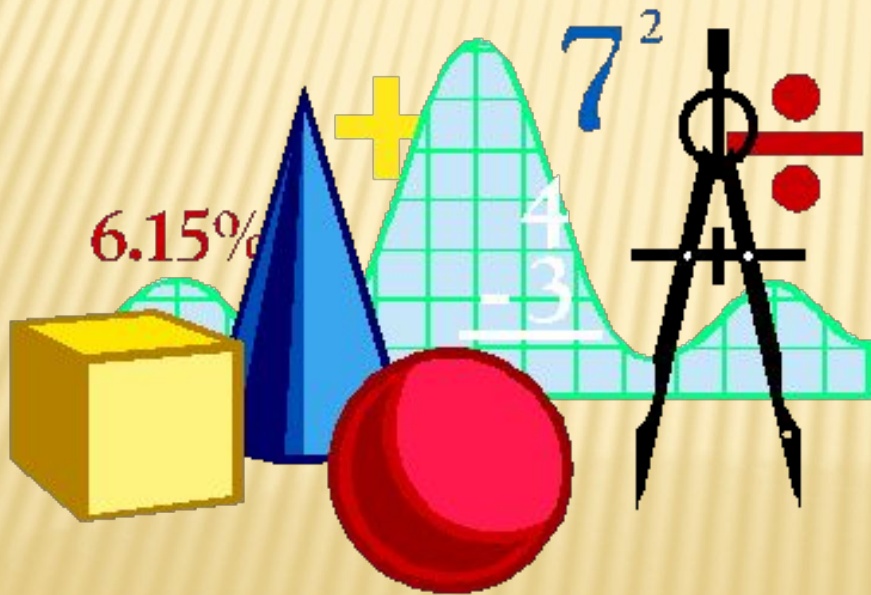


10 способов решения квадратных уравнений



История развития квадратных уравнений



Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне

Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени ещё в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до нашей эры вавилоняне. Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, кроме неполных, и такие, например, полные квадратные уравнения:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

$$x^2 - x = 14\frac{1}{2}$$

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены. Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилонии, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

Как составлял и решал Диофант квадратные уравнения

«Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение 96»

Диофант рассуждает следующим образом: из условия задачи вытекает, что искомые числа *не* равны, т.к. если бы они равны, то их произведение равнялось бы не 96, а 100. Таким образом, одно из них будет больше половины их суммы, т.е. **$10+X$** , другое же меньше, т.е. **$10-X$** .

Разность между ними $2X$

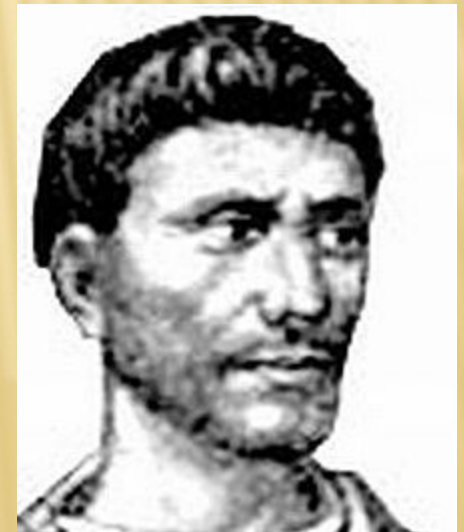
Отсюда **$X=2$** . Одно из искоемых чисел равно 12, другое 8. Решение **$X = -2$** для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.

УРАВНЕНИЕ:

$$(10+X)(10-X)=96$$

или же:

$$100 - X^2 = 96$$
$$X^2 - 4 = 0(1)$$



Квадратные уравнения в Индии

Задачи на квадратные уравнения встречаются и в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта, изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме: $ax^2+bx=c$, $a>0$

*Одна из задач знаменитого
индийского математика XII века
Бхаскары*

Обезьянок резвых стая
Всласть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.
А двенадцать по лианам...
Стали прыгать повисая...
Сколько было обезьянок
Ты скажи мне, в этой стае?.

Соответствующее задачи уравнение:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

Баскара пишет под видом:

$$x^2 - 64x = -768$$

Дополнил левую часть до квадрата,

$$x^2 - 64x + 32^2 = -768 + 1024,$$

$$(x - 32)^2 = 256$$

$$x - 32 = \pm 16$$

$$x^1 = 16, \quad x^2 = 48$$

Квадратные уравнения в Древней Азии

$$x^2 + 10x = 39$$

Вот как решал это уравнение среднеазиатский ученый ал-Хорезми:

Он писал : "Правило таково:

раздвои число корней,

получите в этой задаче пять,

умножь на это равное ему, будет двадцать пять,

прибавь это к тридцати девяти,

будет шестьдесят четыре,

извлеки из этого корень, будет восемь,

и вычти из этого половину числа корней, т.е.пять,

останется

это будет корень квадрата , который ты искал."

А второй корень ? Второй корень не находили, так как отрицательные числа не были известны.

$$x=2x \cdot 5$$

5

$$5 \cdot 5 = 25$$

$$25 + 39$$

64

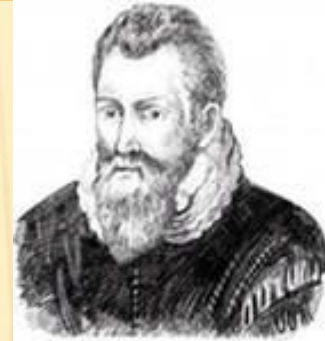
8

$$8 - 5$$

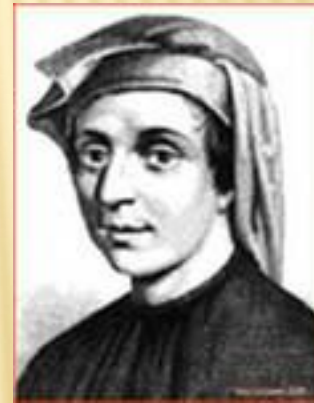
3

Квадратные уравнения в Европе XIII-XVII вв.

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду $x^2+vx+c=0$, было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. **Штифелем**.



Формулы решения квадратных уравнений в Европе были впервые изложены в 1202 г. итальянским математиком **Леонардом Фибоначчи**.



Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Лишь в 17 в. благодаря трудам **Декарта, Ньютона и других ученых** способ решения квадратных уравнений принимает современный вид



О теореме Виета

Теорема, выражающая связь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, носящая имя Виета, была им сформулирована впервые в 1591 г. Следующим образом: «Если $B+D$, умноженное на $A-A$, равно BD , то A равно B и равно D ».

Чтобы понять Виета, следует помнить, что A , как и всякая гласная буква, означало у него неизвестное (наше x), гласные же B, D — коэффициенты при неизвестном.

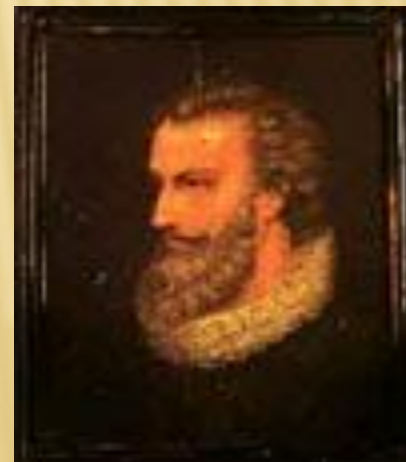
На языке современной алгебры вышеприведенная формулировка Виета означает:

Если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q , то есть

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 x_2 = q$$

(сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену).



Метод разложения на множители

Цель:

привести квадратное уравнение общего вида к виду:

$$A(x) \cdot B(x) = 0,$$

где $A(x)$ и $B(x)$ – многочлены относительно x .

Способы:

- *Вынесение общего множителя за скобки;*
- *Использование формул сокращенного умножения;*
- *Способ группировки.*

Пример:

$$4x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$4(x + 1) \left(x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

Метод выделения полного квадрата

Решим уравнение: $x^2 + 6x - 7 = 0$.

$$x^2 + 6x - 7 = 0.$$

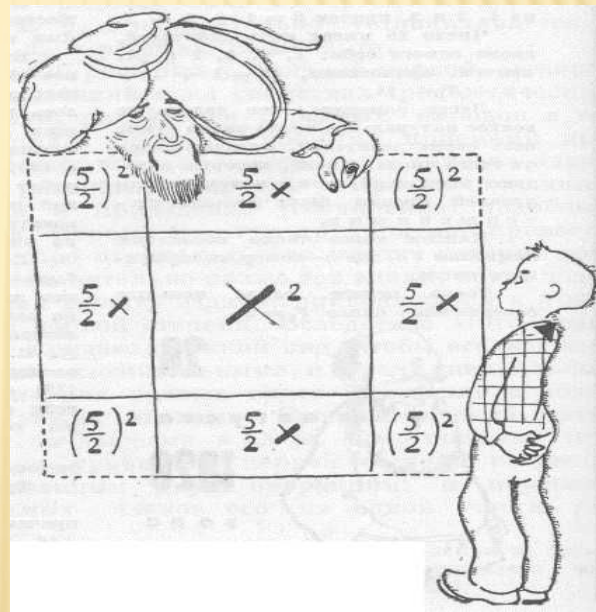
$$(x + 3)^2 - 16 = 0.$$

$$(x + 3)^2 = 16.$$

$$x + 3 = 4; \quad x + 3 = -4.$$

$$x = 1, \quad x = -7.$$

Ответ: 1; -7.



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Решение квадратных уравнений по формуле

$$ax^2+bx+c=0$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ зывают **дискриминантом** квадратного уравнения.

Корни квадратного уравнения:

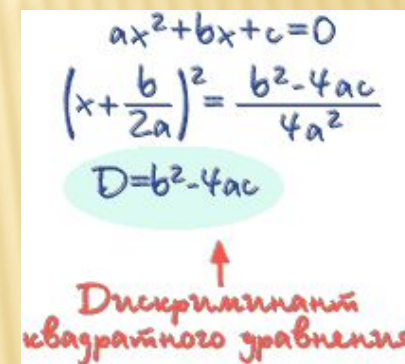
Если $D > 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Если $D < 0$,

$$x = \frac{-b}{2a}$$

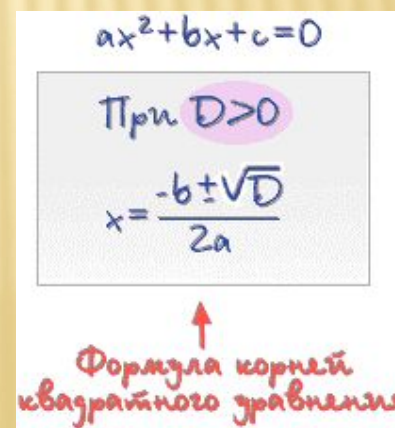
Если $D < 0$, **Нет корней**



Handwritten derivation of the discriminant formula:

$$ax^2+bx+c=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$D=b^2-4ac$$

↑
Дискриминант квадратного уравнения



Handwritten formula for the roots of a quadratic equation:

$$ax^2+bx+c=0$$

При $D > 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

↑
Формула корней квадратного уравнения

Решение уравнений с помощью теоремы Виета

если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$

то $x_1 + x_2 = -p$ $(D \geq 0)$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

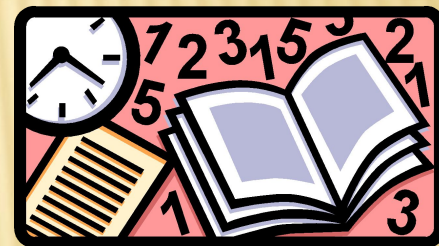
Например:

$$X^2 + 3X - 10 = 0$$

$X_1 \cdot X_2 = -10$, значит корни имеют разные
знаки

$X_1 + X_2 = -3$, значит больший по модулю
корень - отрицательный

Подбором находим корни: $X_1 = -5$, $X_2 = 2$



Решение уравнений способом «переброски»

Решите уравнение: $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

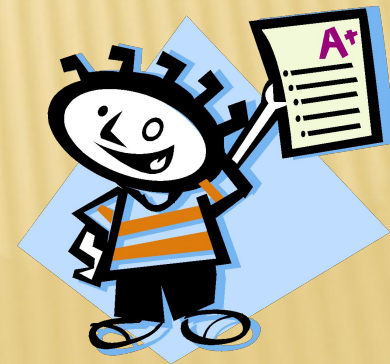


Перебросим коэффициент 2 к свободному члену

$$y^2 - 11y + 30 = 0.$$

$D > 0$, по теореме, обратной теореме Виета,
получаем корни: 5; 6,
далее возвращаемся к корням исходного уравнения: 2,5; 3.

Ответ: 2,5; 3.



Свойства коэффициентов квадратного уравнения

Если в квадратном уравнении $a+b+c=0$,
то один из корней равен 1, а
второй по теореме Виета равен

Если в квадратном уравнении $a+c=b$,
то один из корней равен (-1),
а второй по теореме Виета равен

Пример:

$$137x^2 + 20x - 157 = 0.$$

$$a = 137, b = 20, c = -157.$$

$$a + b + c = 137 + 20 - 157 = 0.$$

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-157}{137}$$

Ответ $\frac{-157}{137}$

Второй коэффициент - четный

Если $b = 2k$, то корни уравнения $ax^2 + 2kx + c = 0$ находят

ся по формуле

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

где

$$D_1 = \frac{D}{4} = k^2 - ac = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

$x^2 + px + q = 0$ — приведенное квадратное уравнение.

Старший коэффициент равен 1.

Квадратное
уравнение
общего вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \\ a \neq 1$$

\Leftrightarrow

Приведенное
квадратное уравнение:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \\ \text{здесь } p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}$$

Формула корней приведенного квадратного уравнения.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$



Графический способ решения квадратного уравнения

Не используя формул квадратное уравнение можно решить графическим способом. Решим уравнение $x^2 - x - 1 = 0$.

Для этого построим два графика:
1) $y = x^2$
2) $y = x + 1$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	9	4	1	0	1	4	9

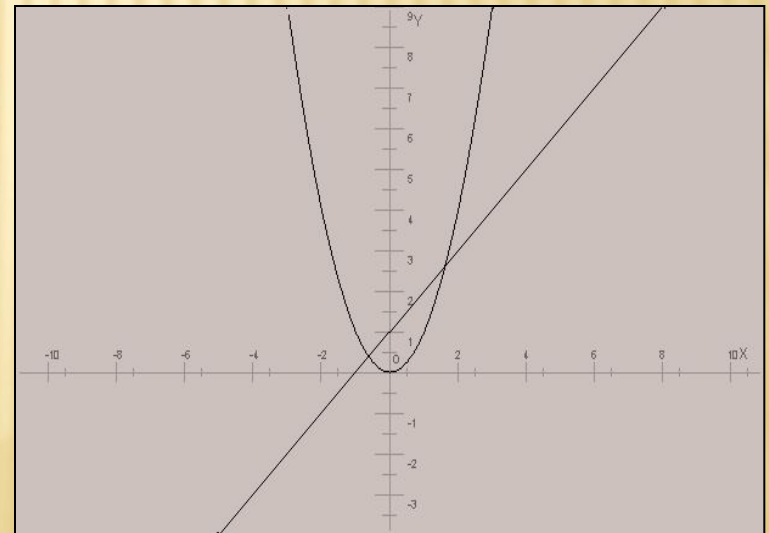
X	-1	0	1
Y	0	1	2

Абсциссы точек пересечения графиков и будут корнями уравнения.

Если графики пересекаются в двух точках, то уравнение имеет два корня.

Если графики пересекаются в одной точке, то уравнение имеет один корень.

Если графики не пересекаются, то уравнение корней не имеет.



Ответ: $x \approx -0.6; x \approx 2.6$

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) можно рассматривать как абсциссы точек пересечения окружности с центром Q ($-\frac{b}{2a}$, $\frac{a+c}{2a}$) проходящей через точку $A(0; 1)$, и оси Ox .

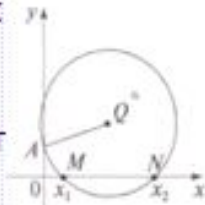
1) если $QA > \frac{a+c}{2a}$, то

окружность пересекает ось Ox в двух точках

$M(x_1; 0)$ и

$N(x_2; 0)$

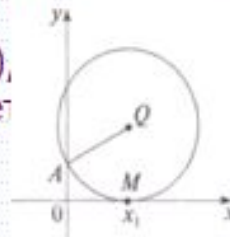
уравнение имеет корни $x_1; x_2$



2) если $QA = \frac{a+c}{2a}$, то

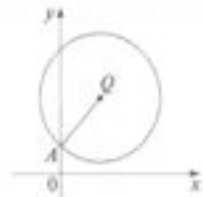
окружность касается оси Ox

в точке $M(x_1; 0)$,
уравнение имеет корень x_1 .



если $QA < \frac{a+c}{2a}$,

то окружность не имеет общих точек с осью Ox ,
уравнения нет корней.



Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

Это старый и незаслуженно забытый способ решения квадратных уравнений, помещенный на с.83 «Четырехзначные математические таблицы» Брадис В.М.

Таблица XXII. Номограмма для решения уравнения
 $z^2 + pz + q = 0$

Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

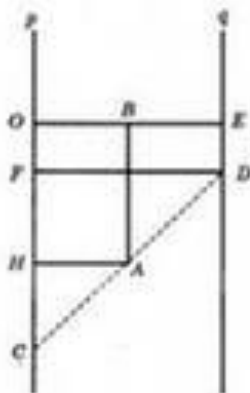
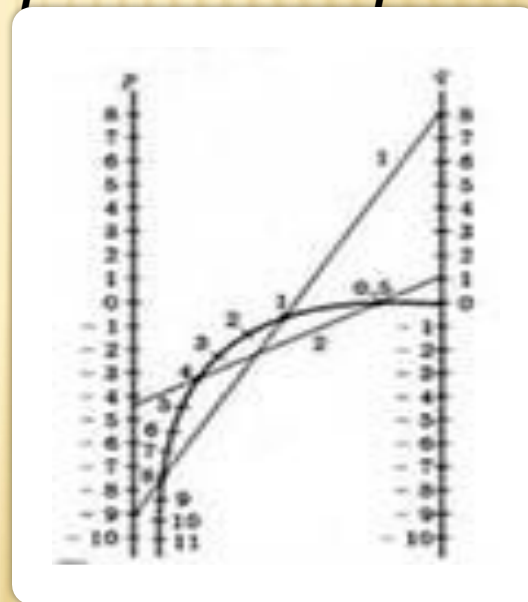


Рис. 11

Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$
номограмма дает корни



$$Z_1 = 8.0 \text{ и } Z_2 = 1.0$$

Геометрический способ решения квадратных уравнений

В древности, когда геометрия была более развита, чем алгебра, квадратные уравнения решали не алгебраически, а геометрически.

А вот, например, как древние греки решали уравнение:

$$y^2 + 6y - 16 = 0$$

$$y^2 + 6y = 16$$

$$y^2 + 6y + 9 = 16 + 9$$

Выражения $y^2 + 6y + 9$ и $16 + 9$ геометрически представляют собой один и тот же квадрат, а исходное уравнение

$$y^2 + 6y - 16 + 9 - 9 = 0$$
 тоже уравнение.

Откуда и получаем что $y + 3 = \pm 5$ и $y_1 = 2, y_2 = -8$

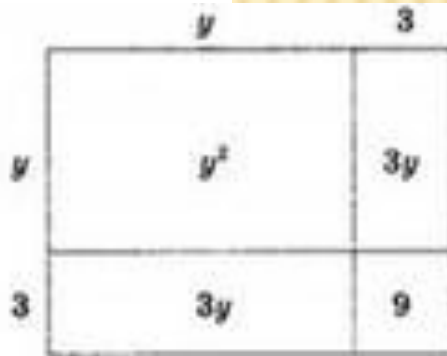


Рис. 16

Заключение

- **данные приёмы решения заслуживают внимания, поскольку они не все отражены в школьных учебниках математики;**
- **овладение данными приёмами поможет учащимся экономить время и эффективно решать уравнения;**
- **потребность в быстром решении обусловлена применением тестовой системы вступительных экзаменов;**

