

# Производная

Определение. Правила и формулы  
дифференцирования. 10 класс.

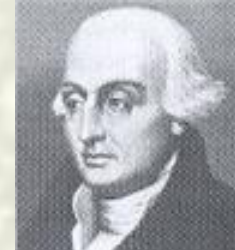
*Помни слова великого ученого:  
«Математику уже затем учить надо,  
что она ум в порядок приводит.»*

*М.В.Ломоносов.*



# Историческая страничка

1. Выражение вида  $\Delta f$  появилось уже в конце 17 в. и означает «приращение».
2. Термин производная ввел в 1797г. Ж. Лагранж



1736-1813гг.



1643-1727гг.

3. И. Ньютон называл производную функцию флюксийей, а саму функцию – флюентой.

4. Раздел математики, в котором изучаются производные и их применения к исследованию функций, называется дифференциальным исчислением.
5. Дифференциальное исчисление создано Ньютоном и Лейбницем в конце 17 столетия.



1646-1716гг.



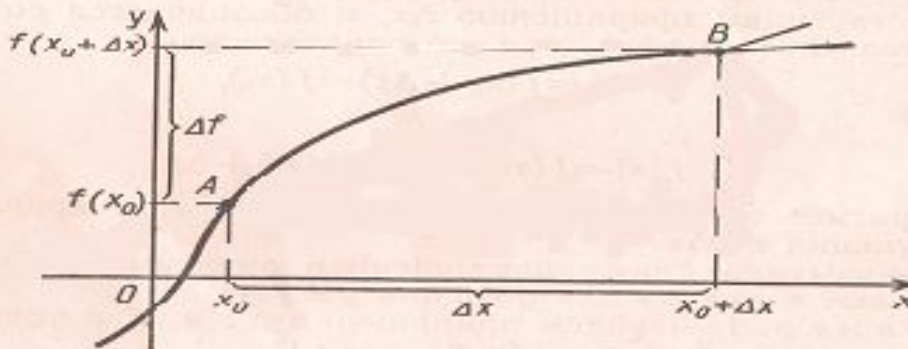
# Приращение аргумента, приращение функции.

Пусть  $x$  – произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки  $x_0$ . Разность  $x - x_0$  называется приращением независимой переменной (или приращением аргумента) в точке  $x_0$  и обозначается  $\Delta x$ .

$\Delta x = x - x_0$  – приращение независимой переменной

Приращением функции  $f$  в точке  $x_0$  называется разность между значениями функции в произвольной точке и значением функции в фиксированной точке.

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ – приращение функции } f$$
$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$



# Определение производной.

Отношение приращения функции к приращению аргумента называется

разностным отношением  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Производной функции  $f$  в точке  $x_0$  называется число к которому стремиться разностное отношение:  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Задача. Найти производную функции  $f(x) = x^2$ , используя определение.

Решение. 1)  $f(x_0) = x_0^2$  - значение функции в фиксированной точке.

$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$  - значение функции в произвольной точке.

2) Найдём приращение функции:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

3) Найдём разностное отношение:  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$

4) При  $\Delta x \rightarrow 0$   $2x_0 + \Delta x \rightarrow 2x_0$ , значит  $(x_0^2)' = 2x_0$ .

5) Для любого  $x$ :  $(x^2)' = 2x$ .



# Основные формулы дифференцирования.

1)  $(x^n)' = nx^{n-1}$  – производная степенной функции

Частные случаи:  $a) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ;  $b) \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ;  $c) (x)' = 1$

2)  $(kx+b)' = k$  – производная линейной функции

3)  $c' = 0$  – производная постоянной

4) Производные тригонометрических функций:

a)  $(\sin x)' = \cos x$     b)  $(\cos x)' = -\sin x$

c)  $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$     d)  $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$



# Основные правила дифференцирования

Если функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то справедливы следующие правила:

$$1) (u+v)' = u' + v'$$

$$2) (uv)' = u'v + uv'$$

$$3) (cu)' = cu'$$

$$4) (u/v)' = (u'v - uv')/v^2, v \text{ не равно нулю}$$

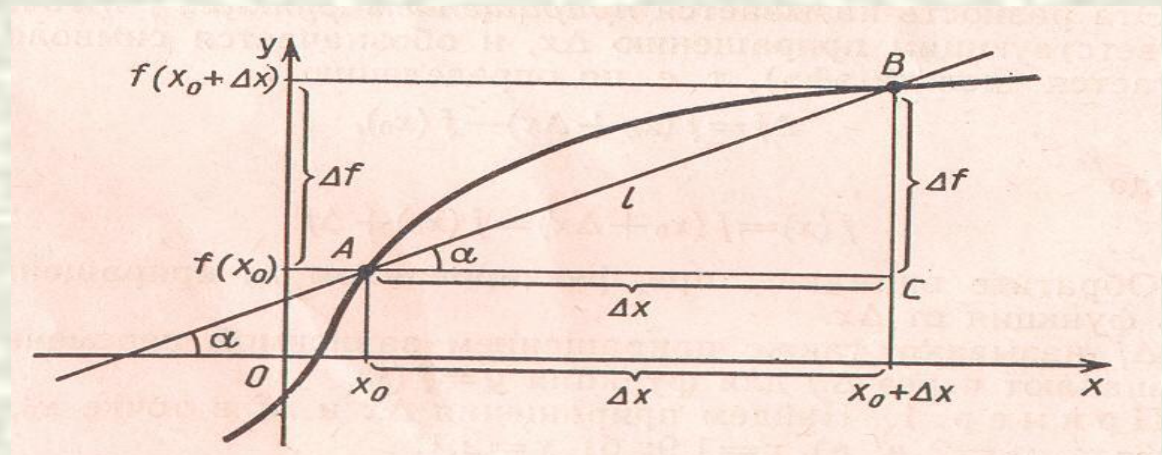
$$5) h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$



# Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная в точке  $x_0$  равна угловому коэффициенту касательной в точке  $x_0$  и тангенсу угла наклона касательной

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \Delta y / \Delta x$$



# Механический смысл производной

---

Механический смысл производной состоит в том, что производная пути по времени равна мгновенной скорости в момент времени  $t_0$ :

$$S'(t_0) = V(t_0).$$





# Образцы решения задач.

---

$$1. (x^{10})' = 10x^9$$

$$2. (2x + 3)' = 2 \quad 5' = 0$$

$$3. (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4. (2\sin x)' = 2\cos x$$

$$5. \cos(3x - 4)' = (\cos(3x - 4))' (3x - 4)' = -3\sin(3x - 4)$$

$$6. (x\sin x)' = x'\sin x + x(\sin x)' = \sin x + x\cos x$$

*Решая примеры, проговаривай вслух.*

*Помни: «Мысль рождается с собственной речи!»*

---

# Проверь свои знания!

□Продифференцируй функцию:

1)  $f(x)=4/(9+7x)^5$     2)  $g(x)=x^2\sin 2x$

3)  $y=1/\cos 2x$     4)  $u(x)=x^2/x^3-1$

□Найди угловой коэффициент касательной к графику функции  $y=15x+\cos x$  в точке с абсциссой  $x_0=-\pi$ .

□Найди точки, в которых  $f'(x)=0$ ,  $f(x)'\gt 0$ , если  $f(x)=2x+\cos(4x-\pi)$ .

□Задай формулой хотя бы одну функцию, производная которой равна:

а)  $4x+5$

б)  $6x^2-\sin x$

# Подготовься к ЕГЭ.

- Найди производную функций:

$$y=(7x+3)^3 \quad y=x^2/x+3$$

$$y=3x^4+\sin x+5 \quad y=\operatorname{tg}x+3\sin 2x$$

- Найди тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику функции  $y=-4/x$  в точке с абсциссой равной  $-3$ .
- Найди значение производной функции  $y=x\cos x$  в точке  $x_0=\pi$ .
- Решить уравнение  $f'(x)=0$ , если  $f(x)=x^3-2x^2$



**Желаем успехов**

**в изучении математики!**

Авторы: Костышева В.В. – учитель математики ЮСШ№2

Белова О.В. - учитель информатики  
учащиеся 10-б класса.

г.Юхнов. 2005г.

