Презентация на тему: Производная.

Выполнили ученицы 11»а»класса:
Челобитчикова Марина и Святенко Елена.
Под руководством учителя математики:
Плешаковой О.В.

2010 г

Содержание:

Из истории:

- В истории математики традиционно выделяются несколько этапов развития математических знаний:
- Формирование понятия геометрической фигурыФормирование понятия геометрической фигуры и числа как идеализации реальных объектов и множеств однородных объектов. Появление счёта и измерения, которые позволили сравнивать различные числа, длины, площади и объёмы.
- Изобретение арифметических операций. Накопление эмпирическим путём (методом проб и ошибок) знаний о свойствах арифметических действий, о способах измерения площадей и объёмовИзобретение арифметических операций. Накопление эмпирическим путём (методом проб и ошибок) знаний о свойствах арифметических действий, о способах измерения площадей и объёмов простых фигур и тел. В этом направлении далеко продвинулись шумеро-вавилонскиеИзобретение арифметических операций. Накопление эмпирическим путём (методом проб и ошибок) знаний о свойствах арифметических действий, о способах измерения площадей и объёмов простых фигур и тел. В этом направлении далеко продвинулись шумеро-вавилонские, китайскиеИзобретение арифметических операций. Накопление эмпирическим путём (методом проб и ошибок) знаний о свойствах арифметических действий, о способах измерения площадей и объёмов простых фигур

Понятие производной:

- Производной функции f в точке x называется число,к которому стремится разностное отношение.

Дифференцируемость

- Производная $f'(x_0)$ функции f в точке x_0, будучи пределом, может не существовать или существовать и быть конечной или бесконечной. Функция f является дифференцируемой в точке x_0 тогда и только тогда, когда её производная в этой точке существует и конечна:

$$f \in \mathcal{D}(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0) \in (-\infty; \infty).$$

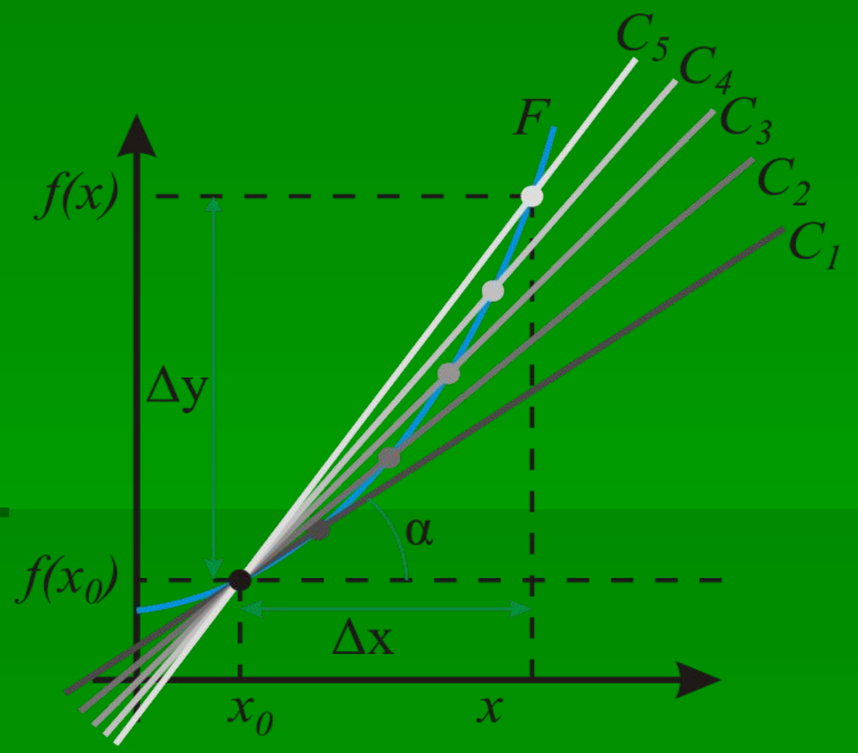
- Для дифференцируемой в x_0 функции f в окрестности $U(x_0)$ справедливо представление
  - $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

Замечания

- Назовём Δ*x* = *x* − *x*0 приращением аргумента функции, а Δ*y* = *f*(*x*0 + Δ*x*) − *f*(*x*0) приращением значения функции в точке *x*0. Тогда
  - $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$
- Пусть функция имеет конечную производную в каждой точке Тогда определена **производная функция** $f' : (a, b) \to \mathbb{R}.$
  -
- Функция, имеющая конечную производную в точке, непрерывна в ней. Обратное не всегда верно.
- Если производная функция сама является непрерывной, то функцию *f* называют **непрерывно дифференцируемой** и пишут: $f \in C^{(1)}\big((a, b)\big).$

Геометрический и физический смысл производной

- Геометрический смысл производной. На графике функцииГеометрический смысл производной. На графике функции выбирается абсцисса *x0* и вычисляется соответствующая ордината *f(x0)*. В окрестности точки *x0* выбирается произвольная точка *x*. Через соответствующие точки на графике функции F проводится секущая (первая светло-серая линия C5). Расстояние *Δx = x — x0* устремляется к нулю, в результате секущая переходит в касательную устремляется к нулю, в результате секущая переходит в касательную (постепенно темнеющие линии C5 — C1). Тангенс угла α наклона этой касательной — и есть производная в точке *x0*.



Производные высших порядков

- Понятие производной произвольного порядка задаётся рекуррентно. Полагаем
  $f^{(0)}(x_0) \equiv f(x_0)$.
- Если функция *f* дифференцируема в *x*0, то производная первого порядка определяется соотношением
  - $f^{(1)}(x_0) \equiv f'(x_0)$.
- Пусть теперь производная *n*-го порядка *f*(*n*) определена в некоторой окрестности точки *x*0 и дифференцируема. Тогда
  - $f^{(n+1)}(x_0) = \left(f^{(n)}\right)'(x_0)$.

Способы записи производных

- В зависимости от целей, области применения и используемого математического аппарата используют различные способы записи производных. Так, производная n-го порядка может быть записана в нотациях:
- Лагранжа *f*(*n*)(*x*0), при этом для малых n часто используют штрихи и римские цифры:
  - *f*(1)(*x*0) = *f*'(*x*0) = *fI*(*x*0),
  - *f*(2)(*x*0) = *f*''(*x*0) = *fII*(*x*0),
  - *f*(3)(*x*0) = *f*'''(*x*0) = *fIII*(*x*0),
  - *f*(4)(*x*0) = *fIV*(*x*0), и т. д.

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$$

- Такая запись удобна своей краткостью и широко распространена;
- Лейбница, удобная наглядной записью отношения бесконечно малых:
  -
- Ньютона, которая часто используется в механике для производной по времени функции координаты (для пространственной производной чаще используют запись Лагранжа). Порядок производной обозначается числом точек над функцией, например:
  - — производная первого порядка *x* по *t* при *t* = *t*0, или — вторая производная *f* по *x* в точке *x*0 и т.д.
- ЭйлераЭйлера, использующая дифференциальный операторЭйлера, использующая дифференциальный оператор (строго говоря, дифференциальное выражение, пока не введено соответствующее функциональное пространство), и потому удобная в вопросах, связанных с функциональным анализом: ,

$$\mathrm{D}^n f(x_0)$$

- Конечно, при этом надо не забывать, что служат все они для обозначения одних и те же объектов:
  -

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) = \overset{\overbrace{\cdot\,\cdot\,\ldots}^{n\ \text{РАЗ}}}{f}(x_0) = \mathrm{D}^n f(x_0).$$

Примеры:

- Пусть *f*(*x*) = *x*2. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}(x + x_0) = 2x_0.$$

- Пусть *f*(*x*) = | *x* | . Тогда если то
  - *f*'(*x*0) = sgn*x*0,
- где sgn обозначает функцию знака. Если *x*0 = 0, то $f'_+(x_0) = 1,\ f'_-(x_0) = -1,$ а
- следовательно *f*'(*x*0) не существует

Правила дифференцирования

- Операция нахождения производной называется дифференцированием. При выполнении этой операции часто приходится работать с частными, суммами, произведениями функций, а также с «функциями функций», то есть сложными функциями. Исходя из определения производной, можно вывести правила дифференцирования, облегчающие эту работу.
- (производная суммы равна сумме производных) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- (отсюда, в частности, следует, что производная произведения функции и константы равна произведению производной этой функции на константу)
- $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [T_1; T_2]$
- Если функция задана параметрически:
- то, $y'_x = \frac{d_y}{d_x} = \frac{d_y}{d_t} \cdot \frac{d_t}{d_x} = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

Вывод:

- Производная использовалась с глубоких времен,и применяется до сих пор,в наши дни.
- Производная одно из основных понятий дифференциального исчисления.

Источники информации

- Учебник по алгебре 10-11 класса. Автор:Колмогоров.
- Большая школьная энциклопедия. Автор:Штейн Е.А
- http://ru.wikipedia.org/