

«Производная и ее
применение в алгебре,
геометрии».



Цель работы:

- **Закрепление изученного материала по теме «Производная» и ознакомление с её прикладной частью.**



План работы:

1. Исследование функции на монотонность
2. Касательная к графику.
3. Наибольшие, наименьшие значения функций.
4. Нахождение дифференциала для приближенных вычислений.
5. Доказательство неравенств.



Определение производной

Производной данной функции в точке x называется предел отношения приращения этой функции к приращению аргумента в точке x , когда приращение аргумента стремится к нулю.





1. Исследование функции на монотонность

Будем считать, что рассматриваемая функция $y=f(x)$ определена и дифференцируема в каждой точке отрезка $a \leq x \leq b$.

функция $f(x)$ возрастает (или убывает) в промежутке $a < x < b$, если:

производная $f'(x)$ не отрицательна (или не положительна) в промежутке $a < x < b$,

$$f'(x) \geq 0 \text{ (или } f'(x) \leq 0)$$

Пример. Определить промежутки возрастания и убывания функции: $y = x^3 - x^2 - 8x + 2$.



Решение: Чтобы применить признаки возрастания и убывания функции, найдем производную данной функции и определим значения x , при которых она положительна или отрицательна:

$$y' = 3x^2 - 2x - 8.$$

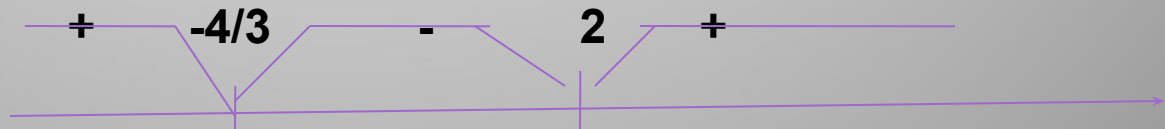
Корни трехчлена: $x_1 = -4/3$, $x_2 = 2$.

Отсюда:

$$y' = 3(x + 4/3)(x - 2).$$

возрастает
возрастает

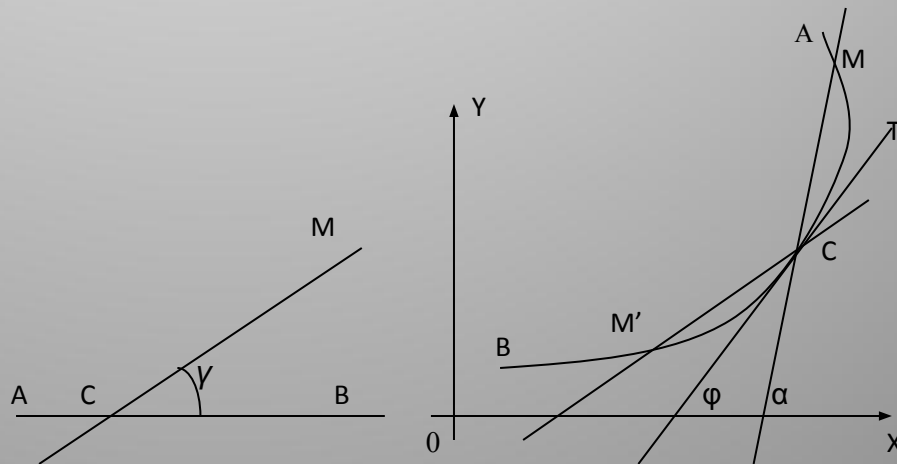
убывает



Ответ: функция возрастает в промежутках $-\infty < x < -4/3$ и $2 < x < +\infty$ и убывает в промежутке $-4/3 < x < 2$.

2. Касательная к графику

- Вообразим, что на кривой AB точка M неограниченно приближается к неподвижной точке C , секущая CM при этом вращается вокруг точки C . Может случиться, что, независимо от того, будет ли точка M приближаться к C в направлении от A к C или от B к C (на черт точка M'), существует одна и та же прямая CT — предельное положение секущей CM .





Определение. Прямая СТ, предельное положение секущей SM, называется касательной к кривой в точке С.

Точка С называется *точкой прикосновения* или *касания*.

Если к линии $y=f(x)$ в точке x имеется касательная, непараллельная Оу, то угловой коэффициент касательной равен значению производной $f'(x)$, в точке x .

Если функция $y=f(x)$ имеет определенную производную в точке x , то:

- 1) в этой точке имеется касательная к графику функции,**
- 2) угловой коэффициент ее равен значению производной $f'(x)$ в точке x .**

Задача . Найдите площадь треугольника AMB , если A и B — точки пересечения с осью OX касательных, проведенных к графику $y = (9-x^2)/6$ из точки $M(4;3)$.

Решение.

$y_{кас} = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0); y'(x_0) = 1/6 \cdot (-2x) = -x/3$; т.к. $y_{кас}$ проходит через $M(4;3)$, то

$$3 = (9 - x_0^2) - (4 - x_0) \cdot x_0/3$$

$$x_0^2 - 8x_0 - 9 = 0;$$

$$D/4 = 16 + 9 = 25; x_0 = 9; x_0 = -1$$

$$y_{кас1} = -12 - 3 \cdot (x - 9) = -3x + 15$$

$$y_{кас2} = 4/3 + 1/3 \cdot (x + 1) = 1/3x + 5/3$$

$$A(5;0); B(-5;0);$$

$$AM = 2\sqrt{5} \text{ (ед.)};$$

$$AB = 10 \text{ (ед.)};$$

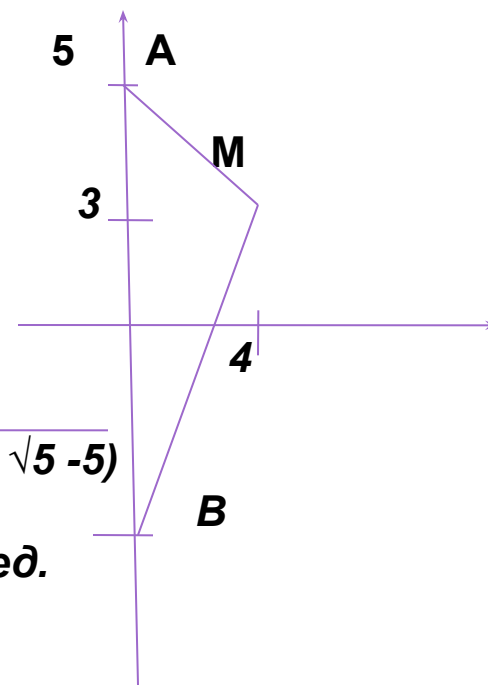
$$BM = 4\sqrt{5} \text{ (ед.)};$$

$$p/2 = 3\sqrt{5} + 5$$

$$S = \sqrt{(3\sqrt{5} + 5) \cdot (\sqrt{5} + 5) \cdot (5 - \sqrt{5}) \cdot (3\sqrt{5} - 5)}$$

$$S = 20 \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ: 20 кв.ед.



. 3. Наибольшие, наименьшие значения функций

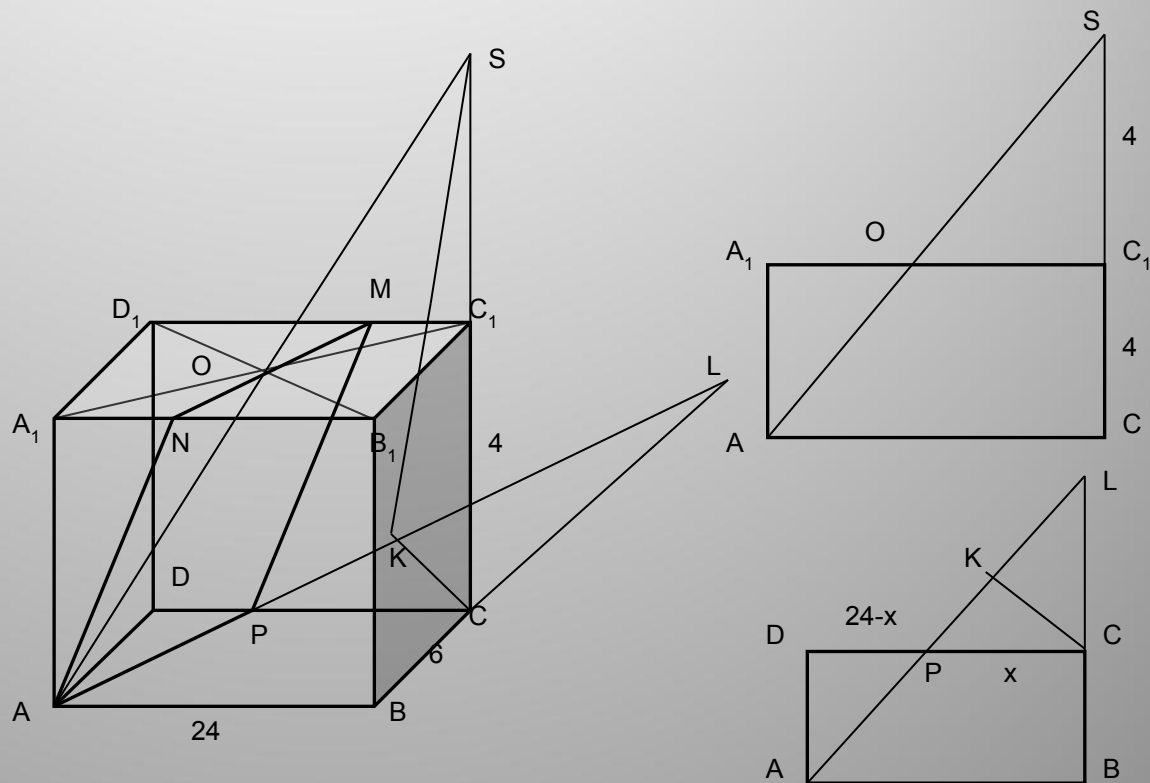
Задача . В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребрами $CD = 24$, $AD = 6$ и $DD_1 = 4$ проведена плоскость через центр симметрии грани $A_1 B_1 C_1 D_1$, вершину A и точку P , лежащую на ребре DC . Какую наименьшую площадь может иметь сечение параллелепипеда этой плоскостью? На какие части делит точка P ребро DC в этом случае?

Решение.

Проведем плоскость и построим сечение (рис.). $AO \in AA_1 C_1 C$ - линия, принадлежащая данной плоскости. Продолжим AO до пересечения с CC_1 в точке S . Тогда SP - линия пересечения грани $DD_1 C_1 C$ и данной плоскости, а сечение $ANMP$ - параллелограмм. $S_{\text{сеч}} = S_{AMNP} = SK \cdot AP/2$
 $SK/2$ — высота параллелограмма $ANMP$.



В $\triangle ASC$ OC_1 - средняя линия (значит $SC_1 = 4$), в $\triangle PSC$ также средняя линия MC_1 , а плоскость $A_1B_1C_1D_1$ делит пополам любую линию между S и плоскостью $ABCD$, а значит и SK .





Пусть $PC = x$; $\triangle CLP$ подобен $\triangle DAP$

$$LC/AD = x/(24-x), LC = 6x/(24-x).$$

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle CLP: KC &= (6x \cdot x/(24-x))/(\sqrt{(36x^2/(24-x)^2)+x^2}) = \\ &= 6x/(\sqrt{(36+(24-x)^2)}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle SCK: SK &= \sqrt{SC^2+KC^2} = \sqrt{64+36x^2/(36+(24-x)^2)} = \\ &= 2\sqrt{16+9x^2/(36+(24-x)^2)}; \end{aligned}$$

$$\text{Из } \triangle ADP: AP = \sqrt{36+(24-x)^2};$$

$$\begin{aligned} S_{\text{сеч}} &= AP \cdot SK/2 = 0,5 \cdot (\sqrt{36+(24-x)^2}) \cdot 2\sqrt{16+9x^2/(36+(24-x)^2)} = \\ &= \sqrt{16(36+(24-x)^2)+9x^2}; \end{aligned}$$

Если $S'(x) = 0$, то $18x+16 \cdot 2(24-x)(-1) = 0$;

$50x-768 = 0$, $x = 384/25$ (это точка min);

$$S_{\text{сеч}} = 312;$$

$$DP = 24-384/25 = 216/25;$$

Ответ: 312 кв. ед.; DC- 384/25; 216/25.

4. Нахождение дифференциала для приближенных вычислений.

Определение. Дифференциалом (dy) функции $y=f(x)$ называется произведение значения производной $f'(x)$ на произвольное приращение Δx аргумента x , т. е.

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

при достаточно малом Δx

$$\Delta y \approx dy = f'(x) \Delta x$$

Это означает, что при малых изменениях аргумента (от начального значения x) величину изменения функции $y=f(x)$ можно приближенно считать пропорциональной величине изменения аргумента с коэффициентом пропорциональности, равным значению производной $f'(x)$;

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

Пример:

Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

$$y = \sqrt{x^3}, \quad x = 0,98 \quad \text{В нашем случае:} \quad x_0 = 1$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \Delta x = 0,98 - 1 = -0,02$$

$$\text{Вычисляем:} \quad f(x_0) = f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2} \quad f'(1) = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1,5$$

$$\text{Имеем:} \quad \sqrt{0,98^3} \approx 1 + 1,5 \cdot (-0,02) = 0,97$$



5. Доказательство неравенств.

- Если функция f имеет положительную (отрицательную) производную в каждой точке некоторого промежутка, то она возрастает (убывает) на этом промежутке. При нахождении промежутков монотонности нужно иметь в виду, что если функция возрастает (убывает) на интервале (a,b) и непрерывна в точках a и b , то она возрастает (убывает) на отрезке $[a,b]$.

Для отыскания наибольших и наименьших значений f на отрезке $[a,b]$ достаточно сравнить между собой значения f в точках a , b и в критических точках из отрезка $[a,b]$.

Эти результаты применимы при решении многих элементарных задач, связанных с неравенствами.



**Задача . Доказать что $(e+x)^{e-x} > (e-x)^{e+x}$
для $0 < x < e$.**

Решение.

Данное неравенство равносильно следующему:


$$(e - x) \cdot \ln(e + x) > (e + x) \cdot \ln(e - x).$$

Пусть $f(x) = (e-x) \cdot \ln(e+x) - (e+x) \cdot \ln(e-x)$,

тогда $f'(x) = -\ln(e+x) + (e-x)/(e+x) - \ln(e-x) + (e+x)/(e-x)$.

Так как $(e-x)/(e+x) + (e+x)/(e-x) = 2(e^2+x^2)/(e^2-x^2) > 2$,

$$\ln(e+x) + \ln(e-x) = \ln(e^2-x^2) < \ln e^2 = 2,$$



то $f'(x) > 0$ при $0 < x < e$. Следовательно, функция f возрастает на интервале $(0, e)$. Функция $f(0)$ - непрерывна. Поэтому эту точку можно включить в промежуток возрастания. Поскольку $f(0) = 0$, а f возрастает при $0 < x < e$, то $f(x) > 0$ при $0 < x < e$. Отсюда получаем решение задачи.

