«Производная и ее применение в **алгебре, геометрии**».

Цель работы:

- **Закрепление изученного материала по теме «Производная» и ознакомление с её прикладной частью.**

План работы:

1. Исследование функции на монотонность
2. Касательная к графику.
3. Наибольшие, наименьшие значения функций.
4. Нахождение дифференциала для приближенных вычислений.
5. Доказательство неравенств.

Определение производной

Производной данной функции в точке х называется предел отношения приращения этой функции к приращению аргумента в точке х, когда приращение аргумента стремится к нулю.

1.Исследование функции на монотонность

Будем считать, что рассматриваемая функция *y=f(x)* определена и дифференцируема в каждой точке отрезка $a \le x \le b$.

функция f(x) возрастает (или убывает) в промежутке a<x<b, если:

производная f '(x) не отрицательна (или не положительна) в промежутке a<x<b,

$$f'(x) \ge 0 \quad (\text{или } f'(x) \le 0)$$

Пример. Определить промежутки возрастания и убывания функции: $y = x^3 - x^2 - 8x + 2$.

Решение: Чтобы применить признаки возрастания и убывания функции, найдем производную данной функции и определим значения *x*, при которых она положительна или отрицательна:

$$y' = 3x^2 — 2x — 8.$$

Корни трехчлена: $x_1 = - 4/3$, $x_2 = 2$.

Отсюда:

$$y' = 3(x+4/3)(x-2).$$

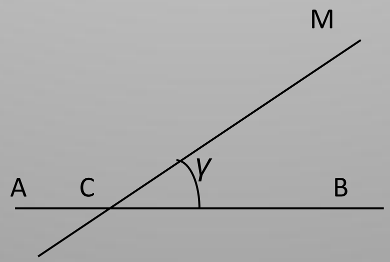
возрастает убывает возрастает

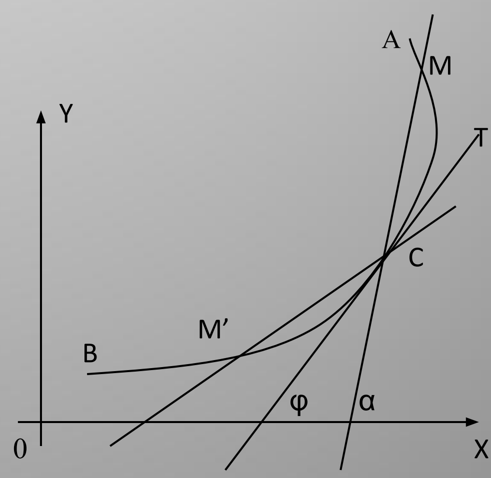
\+ -4/3 - 2 +

Ответ: функция возрастает в промежутках $- \infty < x < -4/3$ и $2 < x < + \infty$ и убывает в промежутке $— 4/3 < x < 2$.

2.Касательная к графику

- Вообразим, что на кривой *АВ* точка *М* неограниченно приближается к неподвижной точке *С*, секущая *СМ* при этом вращается вокруг точки *С*. Может случиться, что, независимо от того, будет ли точка *М* приближаться к *С* в направлении от *А* к *С* или от *В* к С (на черт точка *М'*), существует одна и та же прямая *СТ* — предельное положение секущей *СМ.*





Определение. ***Прямая СТ, предельное положение секущей СМ, называется касательной к кривой в точке С.***
Точка С называется ***точкой прикосновения или касания.***

Если к линии y=f(x) в точке x имеется касательная, непараллельная Oy, то угловой коэффициент касательной равен значению производной f '(x), в точке x.

Если функция y=f(x) имеет определенную производную в точке x, то:
1) в этой точке имеется касательная к графику функции,
2) угловой коэффициент ее равен значению производной f '(x) в точке x.

Задача . Найдите площадь треугольника *AMB*, если *A* и *B* — точки пересечения с осью *OX* касательных, проведенных к графику $y = (9—x^2)/6$ из точки *M(4;3)*.

Решение.

$y_{кас} = y(x_0) + y'(x_0)(x — x_0)$; $y'(x_0) = 1/6 \cdot (-2x) = -x/3$; **т.к.** $y_{кас}$ **проходит через** *M(4;3)*, **то**

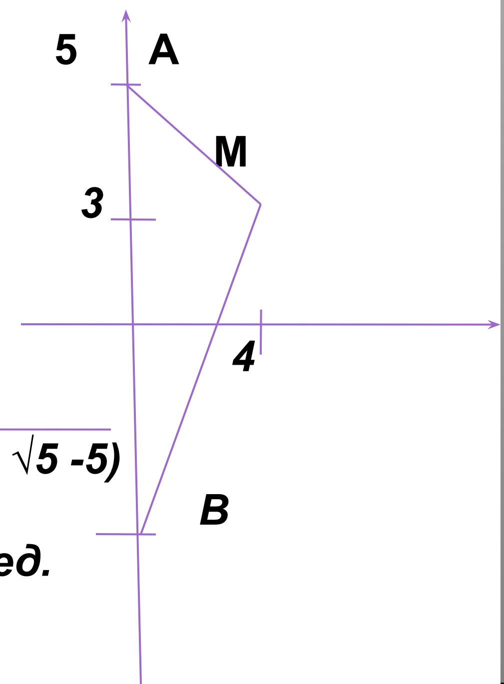
$$3 = (9 — x_0^2) — (4 — x_0) \cdot x_0/3$$

$$x_0^2 — 8x_0 — 9 = 0;$$

$Д/4 = 16 + 9 = 25$; $x_0 = 9$; $x_0 = -1$

$y_{кас1} = -12 - 3 \cdot (x – 9) = -3x + 15$

$y_{кас2} = 4/3 + 1/3 \cdot (x + 1) = 1/3x + 5/3$



A(5;0); B(-5;0);

AM = 2√ 5 (ед.);

AB = 10 (ед.);

BM = 4√5 (ед.);

p/2 = 3√5 +5

S = √ (3√5 +5) · (√5 +5) · (5 - √5) · (3 √5 -5)

S = 20 (кв.ед.).

Ответ: 20 кв.ед.

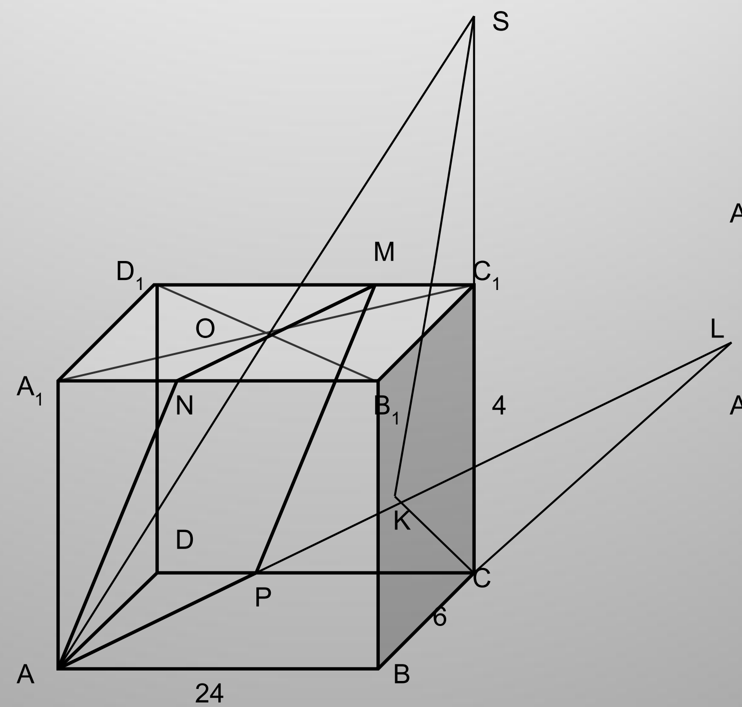
. 3.Наибольшие, наименьшие значения функций

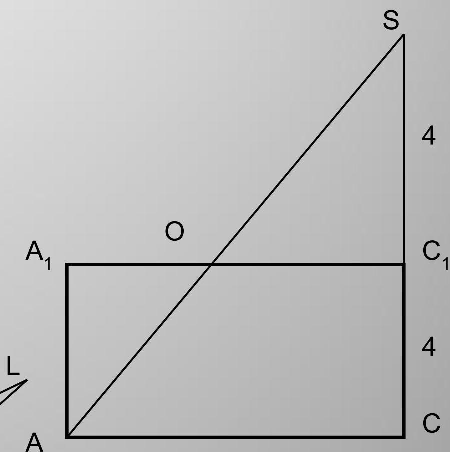
Задача . В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $CD = 24$, $AD= 6$ и $DD_1 =4$ проведена плоскость через центр симметрии грани $A_1B_1C_1D_1$, вершину A и точку P, лежащую на ребре DC. Какую наименьшую площадь может иметь сечение параллелепипеда этой плоскостью? На какие части делит точка P ребро DC в этом случае?

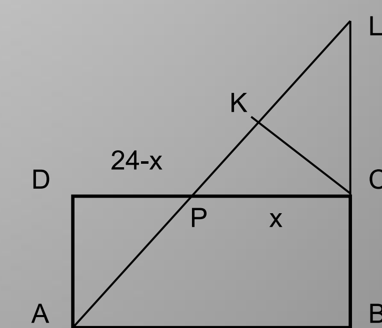
Решение.

Проведем плоскость и построим сечение (рис.).
$AO \in AA_1C_1C$ - линия, принадлежащая данной плоскости. Продолжим AO до пересечения с CC_1 в точке S. Тогда SP - линия пересечения грани DD_1C_1C и данной плоскости, а сечение $ANMP$ - параллелограмм. $S_{сеч} = S_{AMNP} = SK \cdot AP/2$
$SK/2$— высота параллелограмма $ANMP$.

В ΔASC OC_1 - средняя линия (значит $SC_1 = 4$), в ΔPSC также средняя линия MC_1, а плоскость $A_1B_1C_1D_1$ делит пополам любую линию между S и плоскостью $ABCD$, а значит и SK.







Пусть $PC = x$; ΔCLP подобен ΔDAP

$LC/AD = x/(24—x)$, $LC = 6x/(24 – x)$.

Из ΔCLP: $KC = (6x \cdot x/(24—x))/(\sqrt{(36x^2/(24—x)^2)+x^2}) =$

$= 6x/(\sqrt{(36+ (24—x)^2})$;

Из ΔSCK: $SK = \sqrt{SC^2+ KC^2} = \sqrt{64+36x^2/(36+(24—x)^2)} =$
$2\sqrt{16+9x^2/(36+(24—x)^2)}$;

Из ΔADP: $AP = \sqrt{36+(24—x)^2}$;

$S_{сеч} = AP \cdot SK/2 = 0{,}5 \cdot (\sqrt{36+(24—x)^2})\ 2\sqrt{16+9x^2/(36+(24—x)^2)} =$

$= \sqrt{16(36+(24—x)^2)+9x^2}$;

Если $S'(x) = 0$, то $18x+16 \cdot 2(24—x)(-1) = 0$;

$50x—768 = 0$, $x = 384/25$ (это точка min);

$S_{сеч} = 312$;

$DP = 24—384/25 = 216/25$;

Ответ: *312 кв. ед.; DC- 384/25; 216/25*.

4.Нахождение дифференциала для приближенных вычислений.

Определение. ***Дифференциалом (dy) функции y=f(x) называется произведение значения производной f '(x) на произвольное приращение Δx аргумента x, т. е.***

$$dy=f'(x)\cdot\Delta x$$

при достаточно малом Δx

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\Delta x$$

Это означает, что *при малых изменениях аргумента (от начального значения x) величину изменения функции y=f(x) можно приближенно считать пропорциональной величине изменения аргумента с коэффициентом пропорциональности, равным значению производной f '(x);*

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$$

Пример:

Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

$y=\sqrt{x^3},\quad x=0,98$ **В нашем случае:** $x_0=1$

$f(x)=\sqrt[3]{x} \quad \Delta x=0,98-1=-0,02$

Вычисляем: $f(x_0)=f(1)=1$

$f'(x)=\dfrac{3\sqrt{x}}{2} \qquad f'(1)=\dfrac{3\cdot 1}{2}=1,5$

Имеем: $\sqrt{0,98^3}\approx 1+1,5\cdot(-0,02)=0,97$

5.Доказательство неравенств.

- **Если функция f имеет положительную (отрицательную) производную в каждой точке некоторого промежутка, то она возрастает (убывает) на этом промежутке. При нахождении промежутков монотонности нужно иметь в виду, что если функция возрастает (убывает) на интервале *(a,b)* и непрерывна в точках *a* и *b,* то она возрастает (убывает) на отрезке *[a,b].***

Для отыскания наибольших и наименьших значений *f* на отрезке *[a,b]* достаточно сравнить между собой значения *f* в точках *a, b* и в критических точках из отрезка *[a,b].*

Эти результаты применимы при решении многих элементарных задач, связанных с неравенствами.

Задача . Доказать что $(e+x)^{e-x} > (e-x)^{e+x}$ для $0 < x < e$.

Решение.

Данное неравенство равносильно следующему:

$$(e - x) \cdot \ln(e + x) > (e + x) \cdot \ln(e - x).$$

Пусть $f(x)=(e-x) \cdot \ln(e + x) - (e + x) \cdot \ln(e - x)$,

тогда $f'(x)= -\ln(e + x)+(e - x)/(e + x) - \ln(e - x)+(e + x)/(e - x)$.

Так как $(e - x)/(e + x)+ (e + x)/(e - x)=2(e^2+x^2)/(e^2-x^2) > 2$,

$$\ln(e + x)+\ln(e - x)=\ln(e^2-x^2) < \ln e^2 = 2,$$

то $f'(x) > 0$ **при** $0 < x < e$**. Следовательно, функция** f **возрастает на интервале** $(0,e)$**. Функция** $f(0)$ **- непрерывна. Поэтому эту точку можно включить в промежуток возрастания. Поскольку** $f(0)=0$**, а** f **возрастает при** $0 < x < e$**, то** $f(x) > 0$ **при** $0 < x < e$**. Отсюда получаем решение задачи.**