ПРОИЗВОДНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ, ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ И СТЕППЕНОЙ ФУНКЦИ.

Содержание.

- Производная показательной функции. Число .е.
- Производная логарифмической функции.
- Степенная функция.

Производная показательной функции

Происхождение.

Понятие функции является одним из основных понятии математики. Оно не возникло сразу в таком виде, как мы им пользуемся сейчас, а, как и другие фундаментальные понятия прошло длинный путь диалектического и исторического развития. Идея функциональной зависимости восходит к древнегреческой математике. Например, изменение площади, объема фигуры в зависимости от изменения ее размеров. Однако древними греками идея функциональной зависимости осознавалась интуитивно.

Происхождение.

Уже в 16 - 17 в. в, техника, промышленность, мореходство поставили перед математикой задачи, которые нельзя было решить имеющимися методами математики постоянных величин. Нужны были новые математические методы, отличные от методов элементарной математики. Впервые термин "функция" вводит в рассмотрение знаменитый немецкий математик и философ Лейбниц в 1694 г. Однако, этот термин (определения он не дал вообще) он употребляет в узком смысле, понимая под функцией изменение ординаты кривой в зависимости от изменения ее абсциссы.

Происхождение.

- Таким образом, понятие функции носит у него "геометрический налет". В современных терминах это определение связано с понятием множества и звучит так:«Функция есть произвольный способ отображения множества А = {а} во множество В = {в}, по которому каждому элементу а[pic]А поставлен в соответствие определенный элемент в[pic]В.

Происхождение.

Исследование поведения различных систем (технические, экономические, экологические и др.) часто приводит к анализу и решению уравнений, включающих как параметры системы, так и скорости их изменения, аналитическим выражением которых являются производные. Такие уравнения, содержащие производные, называются дифференциальными.

Происхождение.

В математике XVII в. самым же большим достижением справедливо считается изобретение дифференциального и интегрального исчисления. Сформировалось оно в ряде сочинений Ньютона и Лейбница и их ближайших учеников. Введение в математику методов анализа бесконечно малых стало началом больших преобразований.

Происхождение.

Но наряду с интегральными методами складывались и методы дифференциальные. Вырабатывались элементы будущего дифференциального исчисления при решении задач, которые в настоящее время и решаются с помощью дифференцирования. В то время такие задачи были трех видов: определение касательных к кривым, нахождение максимумов и минимумов функций, отыскивание условий существования алгебраических уравнений квадратных корней.

Показательная функция

В практике часто используются функции $y=2^x$, $y=10^x$, $y=(0,1)^x$ и т. д., т. е. функция вида $\boldsymbol{y=a^x}$ где a - заданное число, x -переменная. Такие функции называют ***показательными***.

Определение:

Показательной функцией называется функция

$$y=a^x$$

где a - заданное число, a>0 и a≠0.

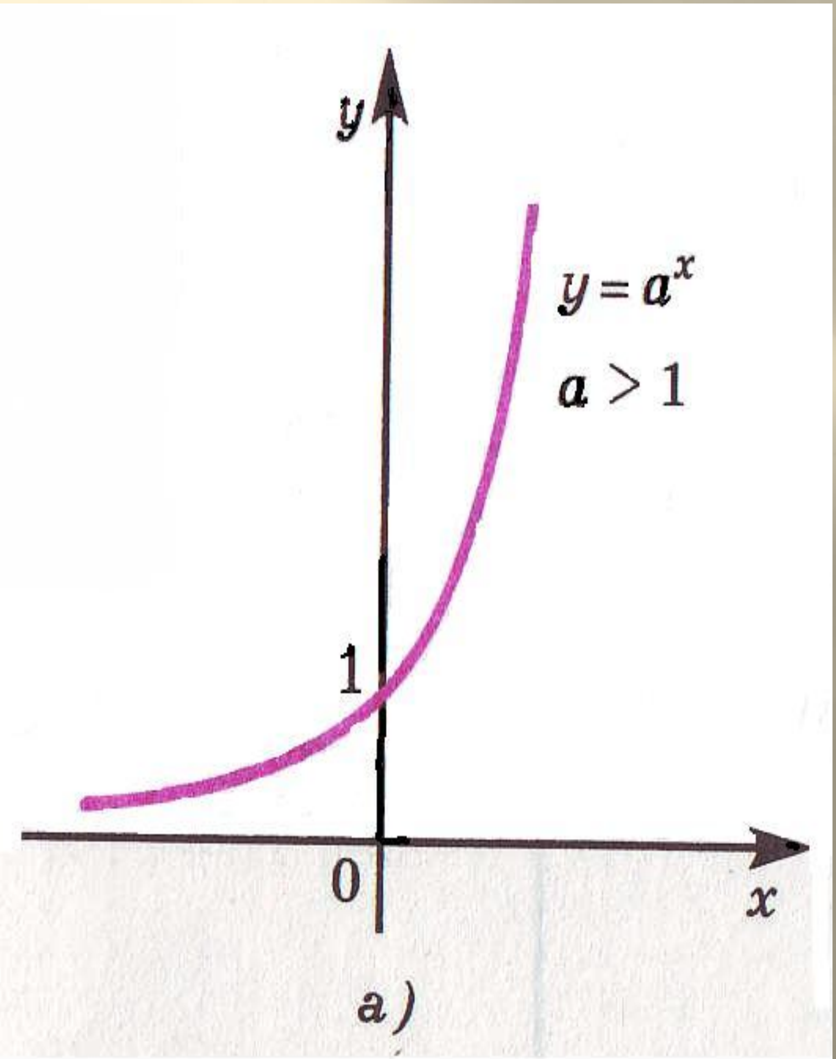
Свойства показательной функции

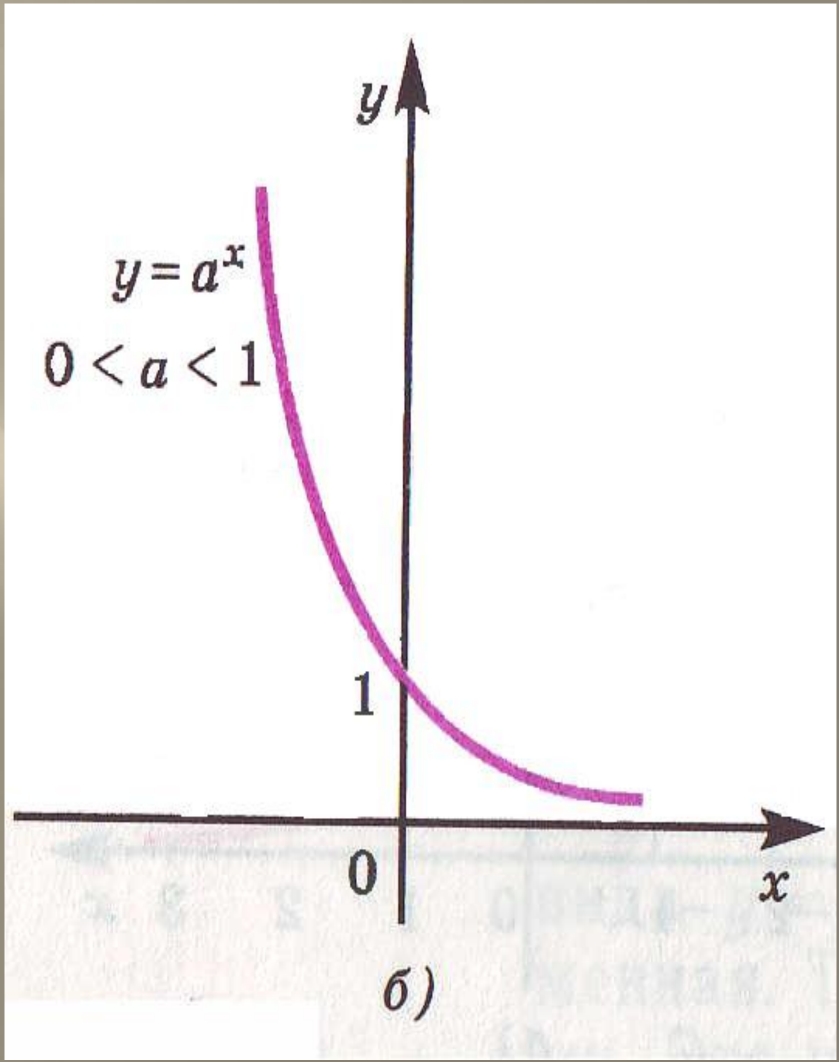
1) Область определения показательной функции - множество ***R*** всех действительных чисел.

2) Множество значений показательной функции - множество всех положительных чисел $\boldsymbol{R}_{+}$.

3) Показательная функция $y=a^X$ является возрастающей на множестве всех действительных чисел, если $a > 1$, и убывающей, если $0<a<1$.

График показательной функции





Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов. Так, радиоактивный распад описывается формулой:

$$M(t)=m_0(1/2)^{t/T}$$

где m (t) и m_0- масса радиоактивного вещества соответственно в момент времени t и в начальный момент времени $t = 0$, T – период полураспада (промежуток времени, за который первоначальное количество вещества уменьшается вдвое).

С помощью показательной функции выражается давление воздуха в зависимости от высоты подъема, ток самоиндукции в катушке после включения постоянного напряжения, и т.д.

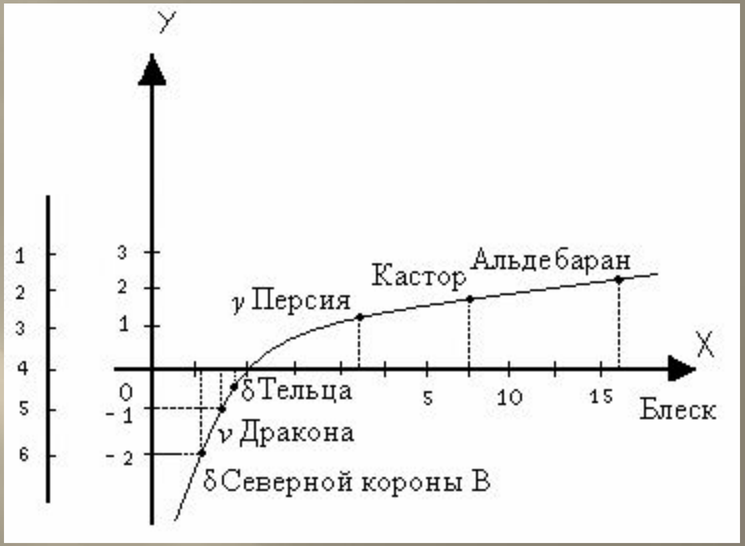
Применение производной при решении неравенств

Дифференциальное исчисление широко используется при исследовании функций. С помощью производной можно найти промежутки монотонности функции, ее экстремальные точки, наибольшие и наименьшие значения.

Логарифмическая функция

Применeня.

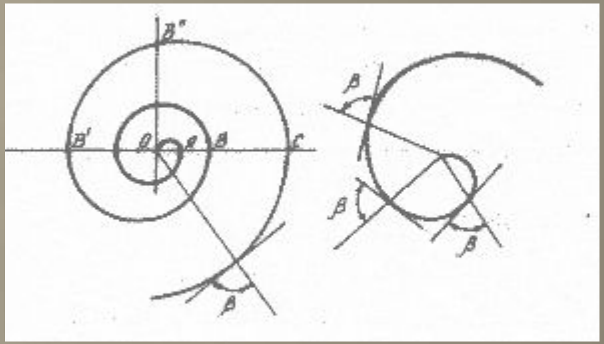
Широкое применение нашла логарифмическая функция **в астрономии**:
Например по ней изменяется величина блеска звезд, если сравнивать характеристики блеска отмеченные глазом и с помощью приборов, то можно составить следующий график:



По графику видно, что объективные и субъективные характеристики не пропорциональны, а прибор регистрирует возрастание блеска не на одну и ту же величину, а в 2,5 раза. Эта зависимость выражается логарифмической функцией.

Применения.

Ещё одно применение логарифмической функции можно найти, если рассматривать **логарифмическую спираль.**



логарифмическая спираль.

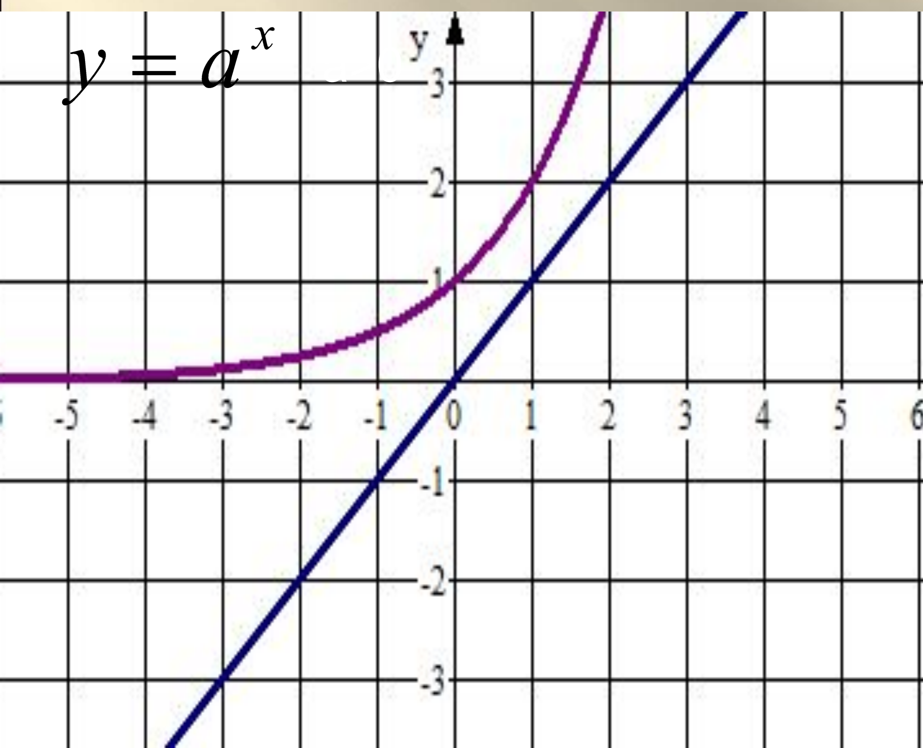
Спираль, по определению - это плоская линия, образованная движущейся точкой, которая удаляется по определенному закону от начала луча, равномерно вращающегося вокруг своего начала. Если начало спирали выбрать за полюс полярной системы координат, то математически спираль может быть представлена с помощью некоторого полярного уравнения *r = f(j)*, где *r* - радиус-вектор спирали, *j* - угол, откладываемый на полярной оси, *f(j)* - некоторая монотонно возрастающая или убывающая положительная функция. В случае с логарифмической спиралью точка удаляется по экспоненциальному закону (, где *a* - произвольное положительное число).

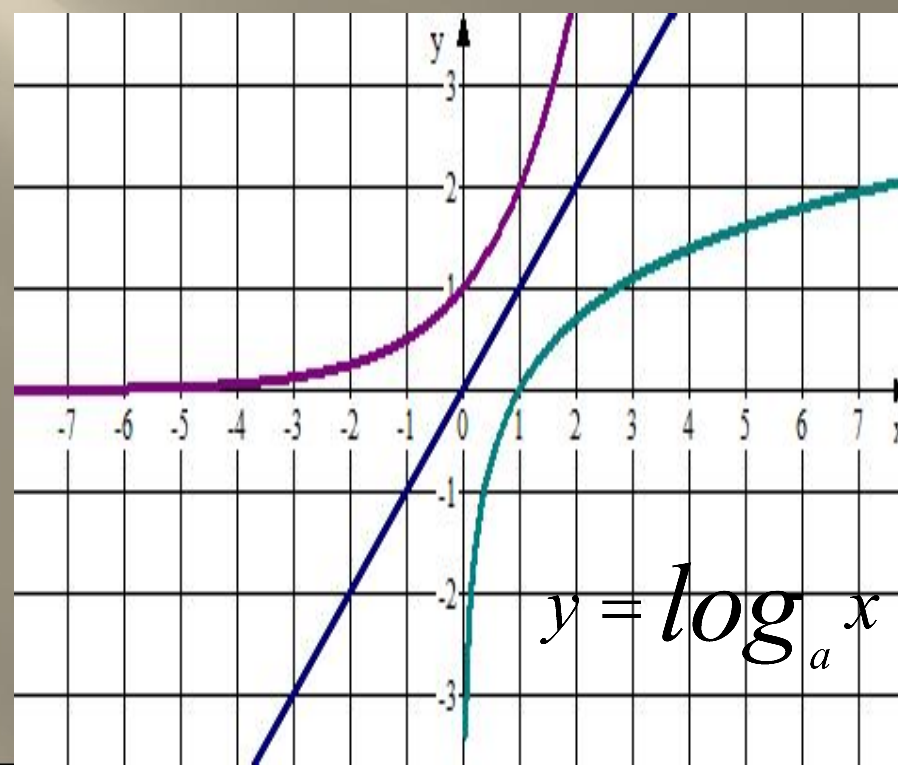
В математике часто встречается *логарифмическая функция*

$$y=\log_a x$$

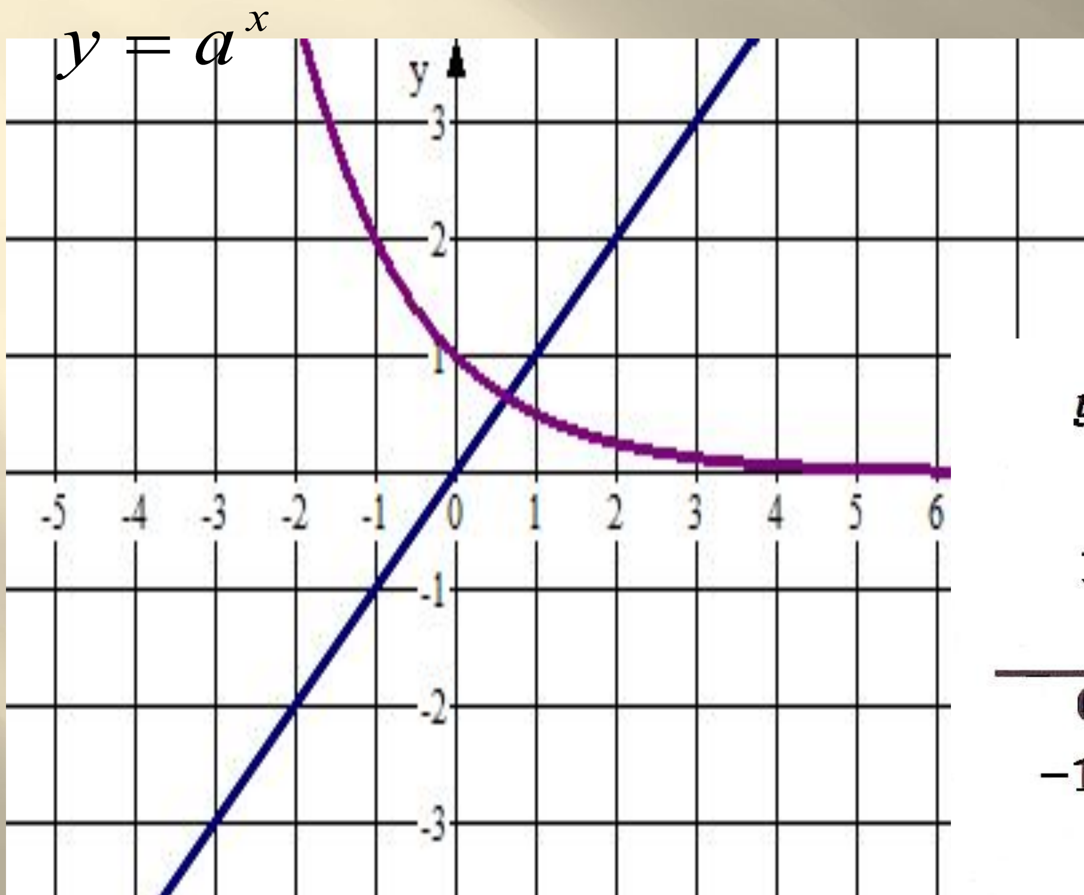
где a - заданное число, $a>0$, $a \neq 1$.

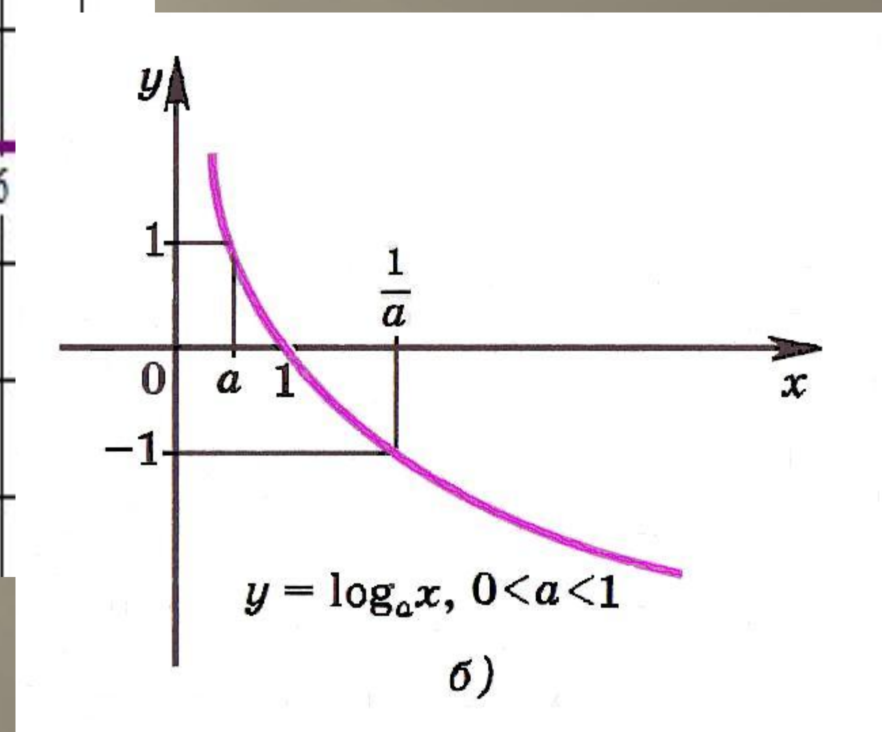
Как известно, график обратной функции симметричен графику прямой относительно биссектрисы 1 и 3 координатных углов. Это позволяет по известному графику показательной функции получить график логарифмической. График логарифмической функции называется ***логарифмикой.***





Построим график логарифмической функции если a<0





Таким образом, получаем графики логарифмической функции

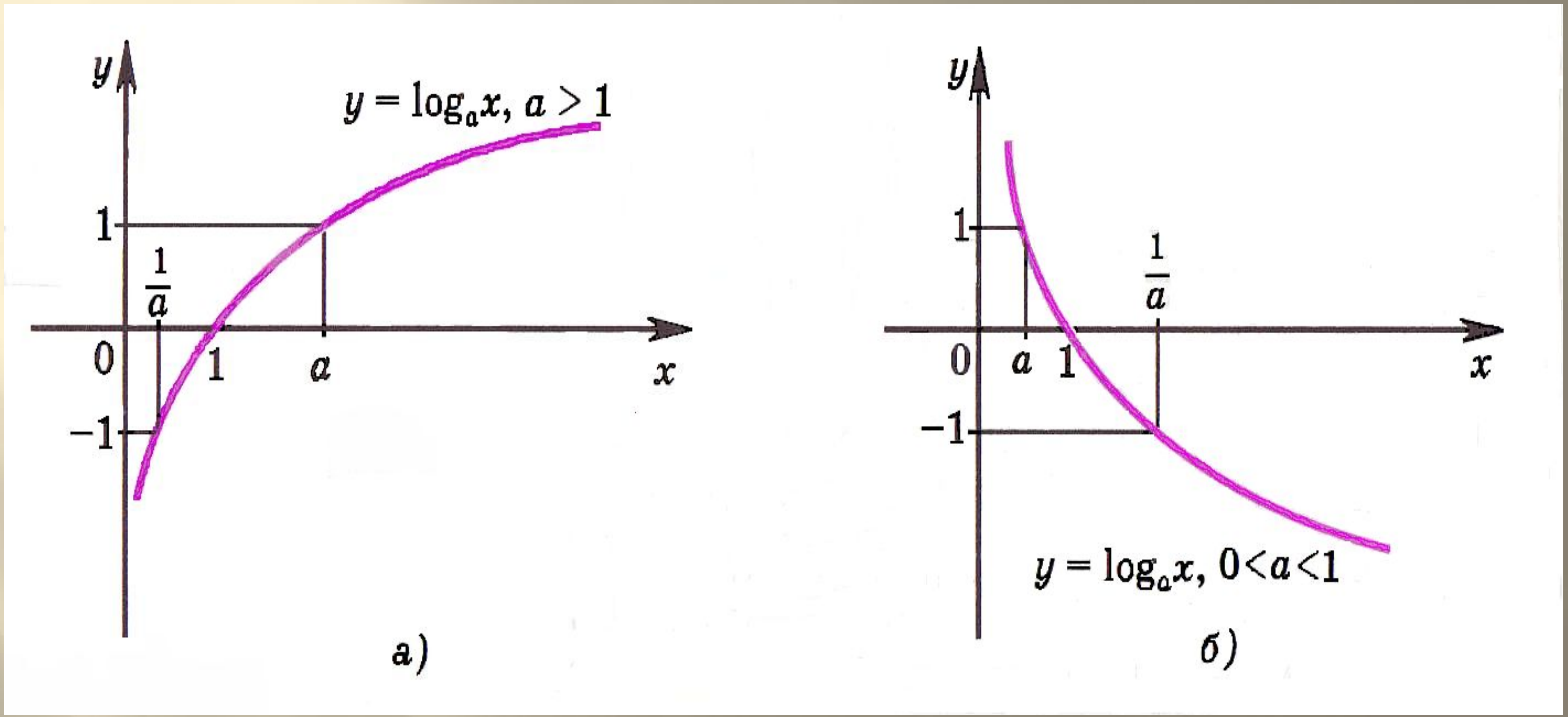


Рис.1

Свойства логарифмической функции

1) Область определения логарифмической функции - множество всех положительных чисел $\boldsymbol{R}_+$.

2) Множество значений логарифмической функции - множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

3) Логарифмическая функция $y=\log_a x$ является возрастающей на промежутке $x > 0$, если $a > 1$ (рис. 1а), и убывающей, если $0 < a < 1$ (рис. 1б).

4) Если $a > 1$, то функция $y=\log_a x$ принимает положительные значения при $x > 1$, отрицательные при $0 < x < 1$. Если $0 < a < 1$, то функция $y=\log_a x$ принимает положительные значения при $0 < x < 1$, отрицательные при $x > 1$.

Степенная функция.

Вы знакомы с функциями $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=1/x$ и т. д. Все эти функции являются частными случаями *степенной функции*, т. е. функции $y = x^p$, где p - заданное действительное число.

Виды степенной функции

1. Показатель $p=2n$ - **четное натуральное число.** В этом случае степенная функция $y = x^{2n}$, где n - натуральное число, обладает следующими свойствами:

- область определения - все действительные числа, т. е. множество ***R*** **;**

- множество значений - неотрицательные числа, т. е. $y \geq 0$;

- функция $y=x^{2n}$ четная, так как $(-x)^{2n} = x^{2n}$;

- функция является убывающей на промежутке $x \geq 0$ и возрастающей на промежутке $x \leq 0$.

График функции $\boldsymbol{y = x^P}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^4$ (рис. 1).

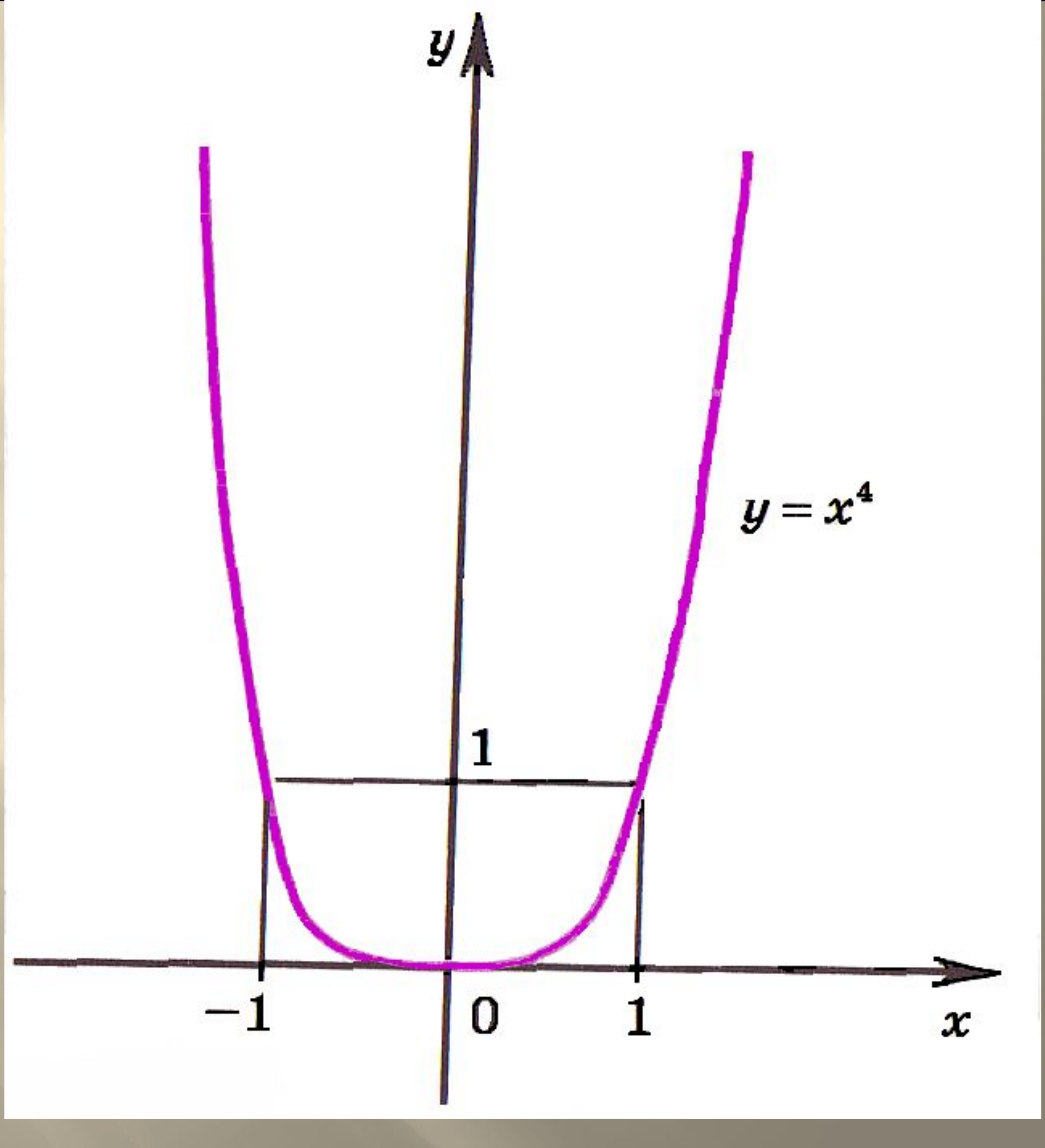


Рис. 1

2. Показатель $p=2n-1$ - нечетное натуральное число.

В этом случае степенная функция $y=x^{2n-1}$, где $2n-1$ - натуральное число, обладает следующими свойствами:

- область определения - множество R;
- множество значений - множество R;
- Функция $y=x^{2n-1}$ нечетная, так как $(-x)^{2n-1}=-x^{2n-1}$;
- функция является возрастающей на всей действительной оси.

График функции $y=x^{2n-1}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y=x^3$(рис. 2).

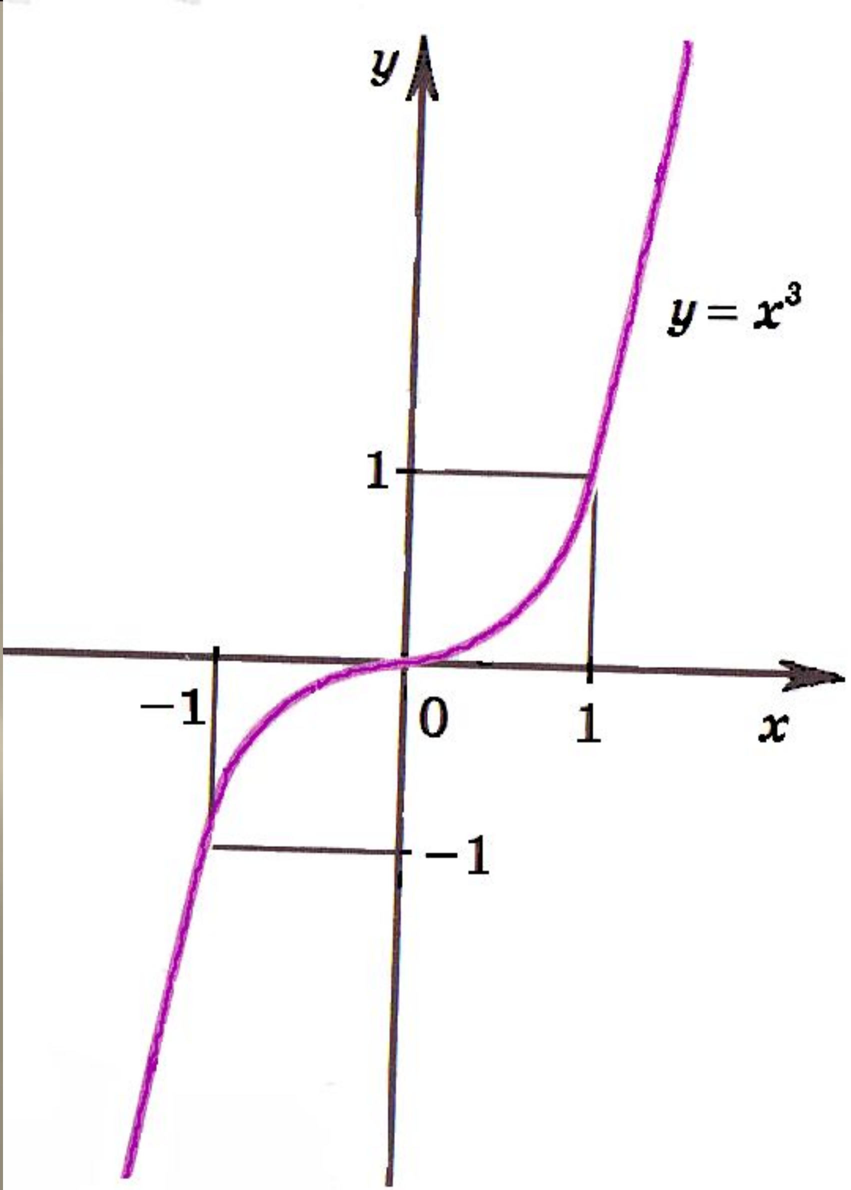


Рис.2

3. Показатель $p = -2n$, где n - натуральное число.

В этом случае степенная функция $y=x^{2n}$ обладает следующими свойствами:

- область определения - множество **R**, кроме $x= 0$;

- множество значений - положительные числа $y>0$;

- Функция $y=x^{2n}$- четная, так как $(-x)^{2n} =x^{2n}$;

-функция является возрастающей на промежутке $x<0$ и убывающей на промежутке $x>0$.

График функции $y=x^{2n}$имеет такой же вид, как, например, график функции $y=x^{-2}$(рис.3).

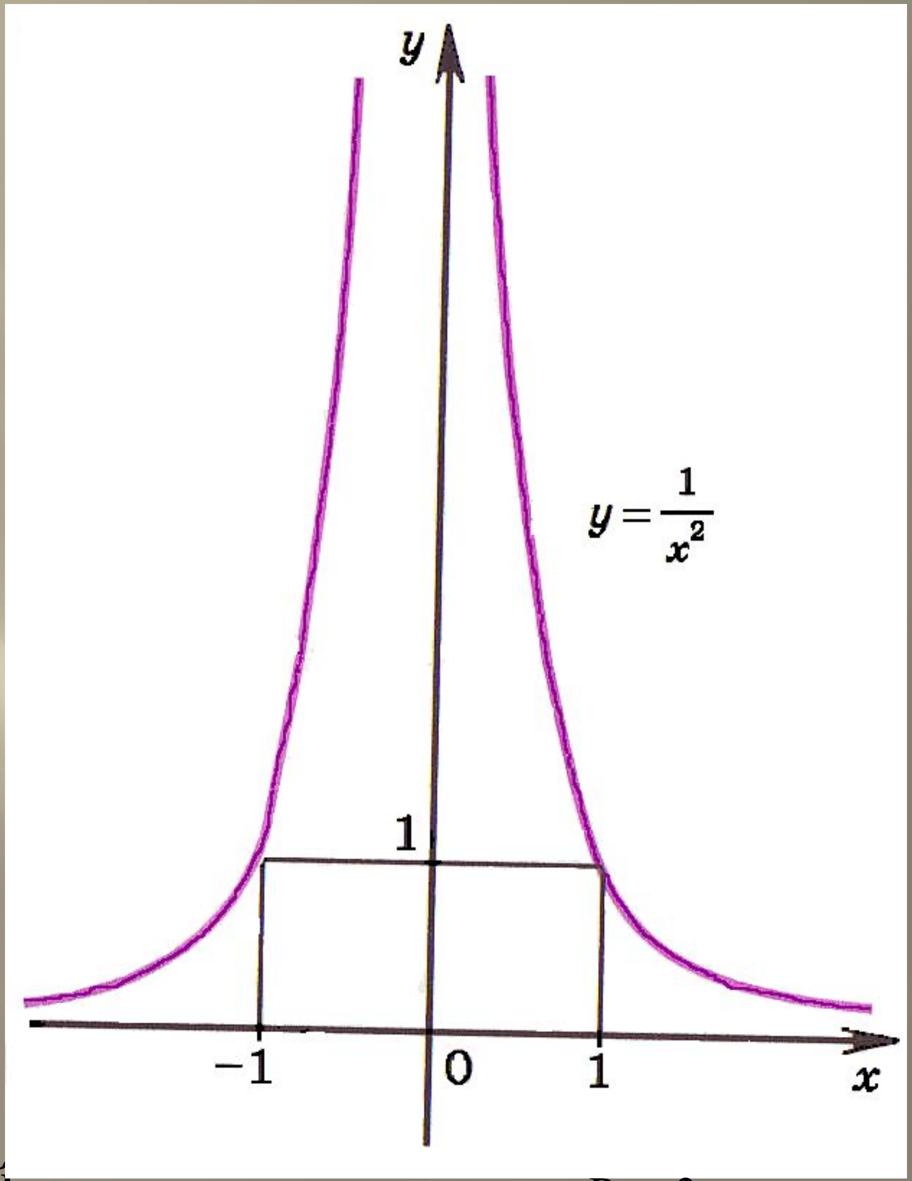


Рис.3

4. Показатель $p = -(2n - 1)$, где n - натуральное число.

В этом случае степенная функция $y=x^{-(2n-1)}$ обладает следующими свойствами:

- область определения - множество **R**, кроме $x=0$;
- множество значений - множество **R**, кроме $y=0$;
- функция нечетная, так как $(-x)^{-(2n-1)} = x^{-(2n-1)}$;
- функция является убывающей на промежутках $x<0$ и $x>0$.

График функции $y=x^{-(2n-1)}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y=x^{-3}$ (рис. 4).

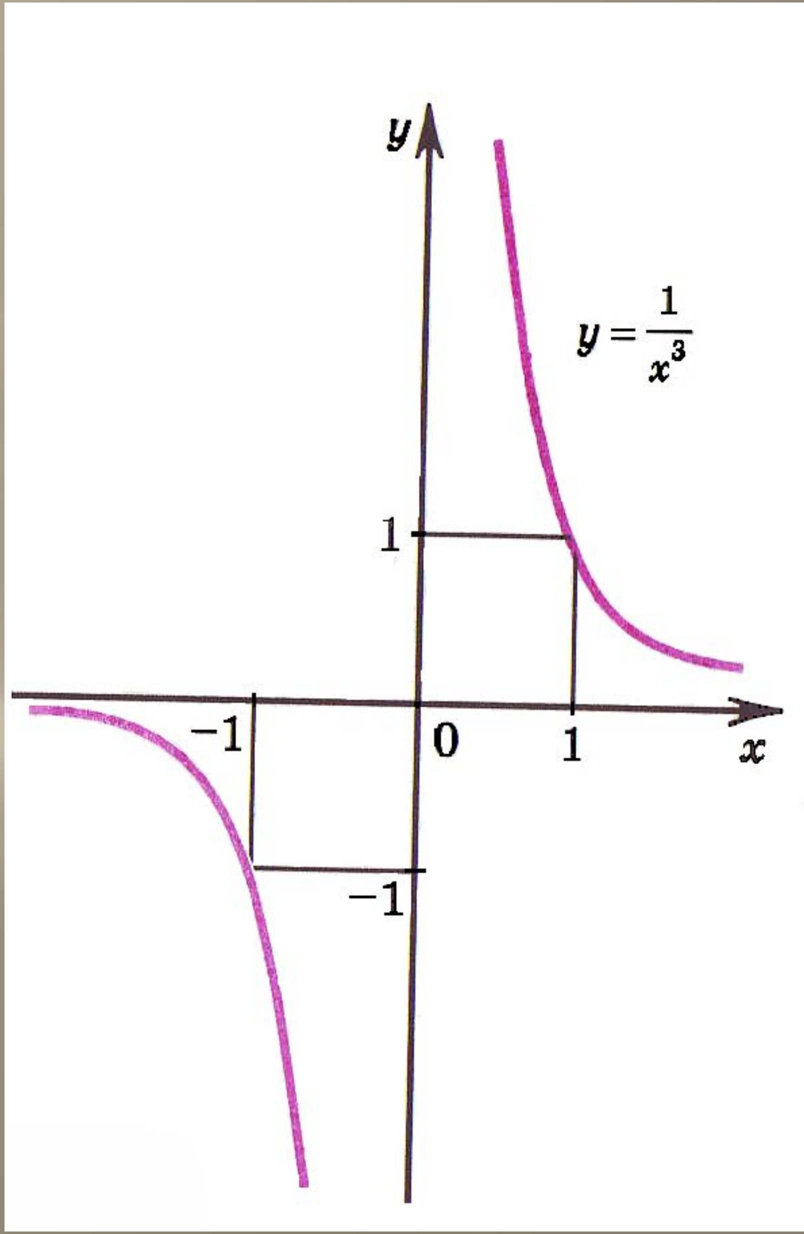


Рис.4

5. Показатель *p* - положительное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y=x^P$ обладает следующими <u>свойствами:</u>

- область определения - неотрицательные числа *x;*
- множество значений - неотрицательные числа *y*;
- функция является возрастающей на промежутке (x; ∞).

График функции $y=x^P$, где *p* - положительное нецелое число, имеет такой же вид, как, например, график функции $y=x$ (при $0<p<1$) или как, например, график функции $y=x$ (при $p>1$) (рис.5 *а, б*)

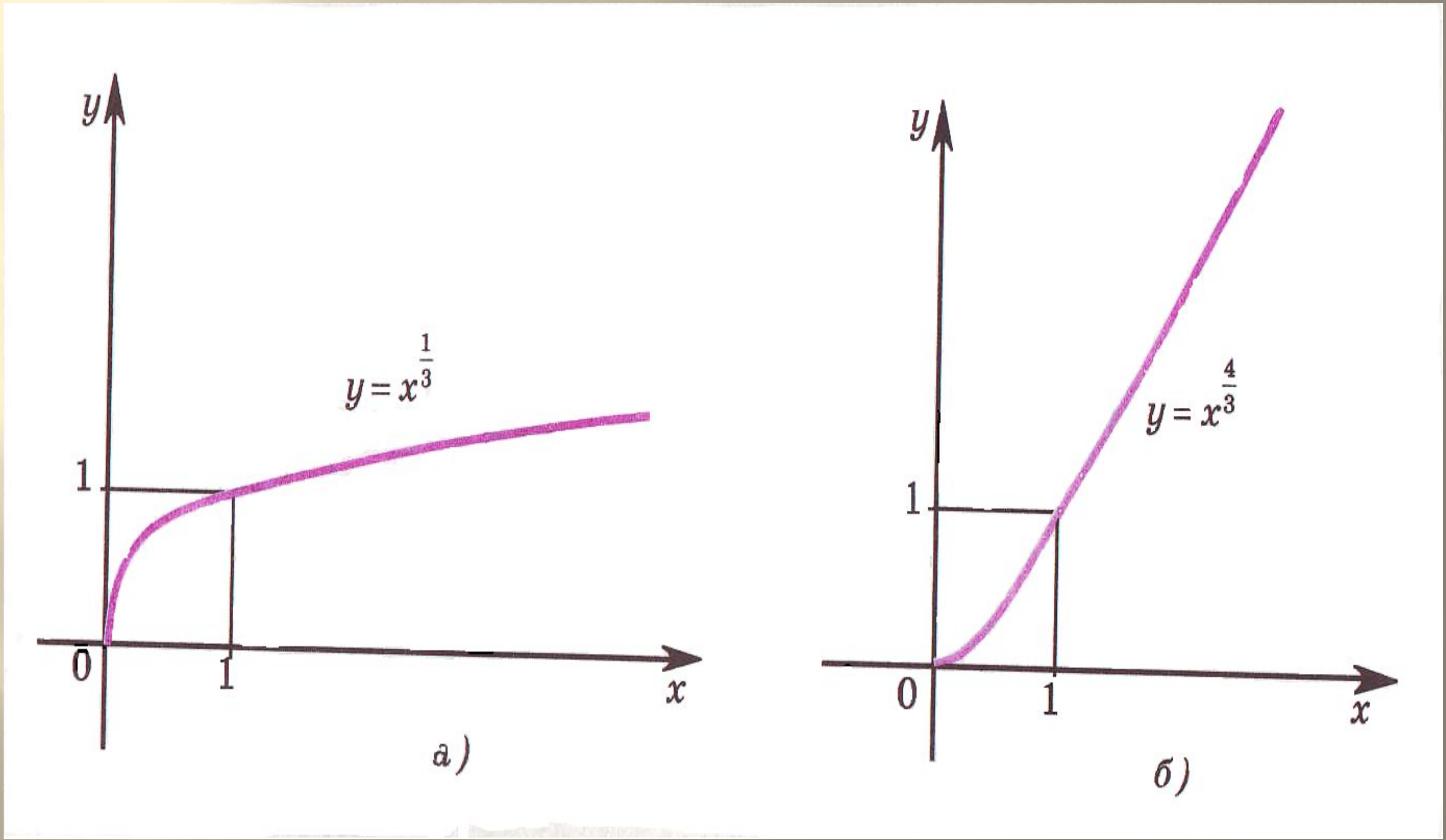


Рис.5

Конец.

Презентацию подготовил :Гольцман Рудик.